Corso di studi in Informatica
Fisica - II Semestre A.A 2007-2008. Prima verifica - Pisa, 2 aprile 2008.

Problema 1

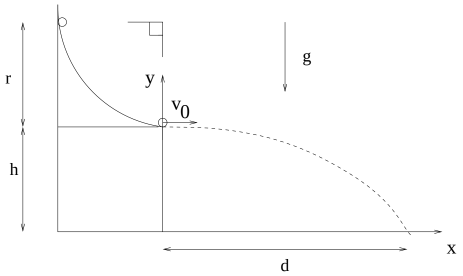
1. La pallina di massa m è soggetta solo alla forza peso e alla reazione vincolare del trampolino liscio. Poiché non c'è attrito, la reazione vincolare è ortogonale al trampolino stesso e quindi non fa lavoro. Si conserva perciò l'energia meccanica della pallina:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U_{peso}(fin) = \frac{1}{2}mv_{in}^2 + U_{peso}(in) \tag{1}$$

Scegliendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale U_{peso} alla quota a cui la pallina si stacca dalla guida, e usando che v_{in}=0, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= U_{peso}(in) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= mgr \\ v_0 &= \sqrt{2gr} \end{aligned} \tag{2}$$

2. Quando la pallina si stacca dal trampolino, la sua velocità, in modulo pari a $\sqrt{2gr}$, è diretta tangente alla guida, e quindi in orizzontale. Scegliendo l'asse x e y come in figura, si ottiene:



$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{3}$$

L'istante in cui la pallina tocca terra è quello in cui $y(t) = 0$. Perciò tale istante si trova dall'equazione

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{2h/g} \tag{4}$$

La distanza d è $x(t)$ calcolato nell'istante dato dall'Eq. (4), e quindi

$$d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gr\,\frac{2h}{g}} = \sqrt{4rh} \tag{5}$$

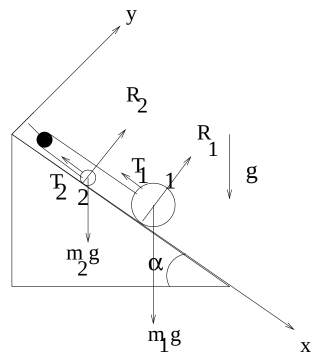
3. Sempre usando la conservazione dell'energia meccanica (ma si poteva procedere anche basandosi sulla cinematica del moto parabolico), si trova che

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U_{peso}(h) = \frac{1}{2}mv_{impatto}^2 + U_{peso}(y=0) \tag{6}$$

Scegliendo questa volta lo zero dell'energia potenziale gravitazionale U_{peso} in $y = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_{impatto}^2 \\ \frac{1}{2}m(2gr) + mgh &= \frac{1}{2}mv_{impatto}^2 \\ v_{impatto} &= \sqrt{2g(r+h)} \end{aligned} \tag{7}$$

Problema 2



4. Si disegni il grafico delle forze che agiscono sui due corpi

   Applicando il secondo principio di Newton, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 + m_1\mathbf{g} + \mathbf{R}_1 &= m_1\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{T}_2 + m_2\mathbf{g} + \mathbf{R}_2 &= m_2\mathbf{a}_2 \end{aligned} \tag{8}$$

   Scegliendo gli assi cartesiani come in figura, e scomponendo queste due equazioni su questi assi, si trova:

$$\begin{aligned} -T_1 + m_1 g\sin\alpha &= m_1 a_{1,x} \\ R_1 - m_1 g\cos\alpha &= 0 \\ -T_2 + m_2 g\sin\alpha &= m_2 a_{2,x} \\ R_2 - m_2 g\cos\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

   Si sfrutta adesso che i) il filo è di massa trascurabile e quindi $T_1 = T_2 \equiv T$, e ii) il filo è inestensibile e quindi $a_{1,x} = -a_{2,x} = a$. Perciò:

$$\begin{aligned} -T + m_1 g\sin\alpha &= m_1 a \\ R_1 - m_1 g\cos\alpha &= 0 \\ -T + m_2 g\sin\alpha &= -m_2 a \\ R_2 - m_2 g\cos\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

   Risolvendo, si trova:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\sin\alpha \\ R_1 &= m_1 g\cos\alpha \\ T &= \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\sin\alpha \\ R_2 &= m_2 g\cos\alpha \end{aligned} \tag{11}$$

5. Le Eq. (8) si modificano in presenza dell'attrito statico, con il sistema all'equilibrio, in

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 + m_1\mathbf{g} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{F}_{S,1} &= 0 \\ \mathbf{T}_2 + m_2\mathbf{g} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{F}_{S,2} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

   Con la stessa scelta di assi, ed usando ancora il fatto che $T_1 = T_2$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
-T + m_1 g \sin\alpha - F_{S,1} &= 0 \\
R_1 &= m_1 g \cos\alpha \\
-T + m_2 g \sin\alpha + F_{S,2} &= 0 \\
R_2 &= m_2 g \cos\alpha
\end{aligned} \tag{13}
$$

Per le leggi sull'attrito statico,

$$
\begin{aligned}
F_{S,1} &\leq \mu_S R_1 \\
F_{S,2} &\leq \mu_S R_2
\end{aligned} \tag{14}
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
F_{S,1} &= m_1 g \sin\alpha - T \leq \mu_S m_1 g \cos\alpha \\
F_{S,2} &= -m_2 g \sin\alpha + T \leq \mu_S m_2 g \cos\alpha
\end{aligned} \tag{15}
$$

Sommando queste due equazioni si ottiene

$$
m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\alpha \leq \mu_S m_1 g \cos\alpha + \mu_S m_2 g \cos\alpha \tag{16}
$$

Perciò

$$
\mu_s \geq \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{17}
$$

Problema 3

6. Il moto del satellite è un moto circolare su una circonferenza di raggio $(r_T + d)$. La sua accelerazione centripeta perciò è data da $\omega^2 (r_T + d)$, dove ω è la velocità angolare. La relazione tra velocità angolare e velocità è $v = \omega (r_T + d)$. Poichè $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, e l'unica forza agente è quella gravitazionale, si ha che

$$
m\omega^2 (r_T + d) = G \frac{M_T m}{(r_T + d)^2} \tag{18}
$$

Perciò

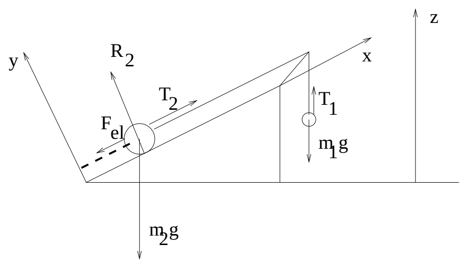
$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{G \frac{M_T}{(r_T + d)^3}} \\
v &= \omega (r_T + d) = \sqrt{G \frac{M_T}{(r_T + d)}}
\end{aligned} \tag{19}
$$

7. Il periodo di rotazione del satellite è dato da

$$
T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(r_T + d)^3}{G M_T}} \tag{20}
$$

Problema 4

8. Si disegni il grafico delle forze che agiscono sui due corpi



Applicando il secondo principio di Newton, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 + m_2\mathbf{g} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{F}_{el} &= 0 \\ \mathbf{T}_1 + m_1\mathbf{g} &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Scegliendo gli assi cartesiani come in figura (gli assi x e y si usano per il corpo 2 e z per il corpo 1), e scomponendo queste due equazioni su questi assi, si trova:

$$\begin{aligned} T_2 - m_2 g \sin\alpha - F_{el} &= 0 \\ R_2 - m_2 g \cos\alpha &= 0 \\ T_1 - m_1 g &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Si sfrutta adesso che il filo è di massa trascurabile e quindi $T_1 = T_2 \equiv T$. Perciò:

$$\begin{aligned} T - m_1 g &= 0 \\ R_2 - m_2 g \cos\alpha &= 0 \\ T - m_2 g \sin\alpha - F_{el} &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Per cui, dalla prima equazione,

$$T = m_1 g \tag{24}$$

9. Sempre dal sistema di equazioni (23), sfruttando che $F_{el} = k(l_{equilibrio} - l_0) = k\Delta l$, si ottiene che

$$m_1 g - m_2 g \sin\alpha = F_{el} = k\Delta l \tag{25}$$

Perciò

$$\Delta l = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha}{k} g \tag{26}$$

10. Applichiamo il teorema delle forze vive sia per il corpo 1 che per il corpo 2. Ricordando che in un qualunque istante

$$dx_1 = -dz_2 \rightarrow ! \mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| \tag{27}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 &= L_{m_1 g} + L_{T_1} \\ \frac{1}{2}m_2 v^2 - \frac{1}{2}m_2 v_0^2 &= L_{m_2 g} + L_{T_2} + L_{molla} \end{aligned} \tag{28}$$

Sfruttiamo adesso il fatto che il peso e la forza elastica sono forze conservative, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 + m_1g(h+\Delta l) - m_1gh &= L_{T_1} \\ \frac{1}{2}m_2v^2 - \frac{1}{2}m_2v_0^2 + m_2gl_0\sin\alpha - m_2g(l_0+\Delta l)\sin\alpha - \frac{1}{2}k\Delta l^2 &= L_{T_2} \end{aligned} \tag{29}$$

dove con h si è indicata l'altezza del corpo 1 all'istante t_1. Dall'equazione (27) si vede anche che $L_{T_1} = -L_{T_2}$, perché i moduli di $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ sono uguali e gli spostamenti dei loro punti di applicazione sono uguali ed opposti. Sommando perciò le due equazioni (29), si ottiene

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 - \frac{1}{2}m_2v_0^2 - \frac{1}{2}k\Delta l^2 - m_2g(l_0+\Delta l)\sin\alpha - m_1gh + m_2gl_0\sin\alpha + m_1g(h+\Delta l) = 0 \tag{30}$$

Semplificando, si ottine

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + (m_2\sin\alpha - m_1)g\Delta l \\ v &= \sqrt{v_0^2 + \frac{k\Delta l^2 + 2(m_2\sin\alpha - m_1)g\Delta l}{m_1+m_2}} \end{aligned} \tag{31}$$