Quantità di moto e urti

- **Corpo di massa m e velocità $\vec{v}$**

Definiamo q. d. m

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} p_x = m v_x \\ p_y = m v_y \\ p_z = m v_z \end{cases}$$

Comprensione intuitiva:

pallina $v = 2\,m/s$ vs. camion $v = 2\,m/s$

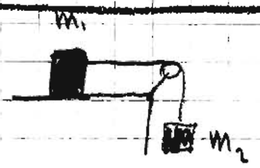
[Mettere in moto il camion (dare una spinta) è + difficile che mettere in moto la pallina

- Riprendiamo il II principio di Newton

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } m \text{ è costante}}}{=} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

- Concetto di sistema: modello semplificato in cui ci concentriamo su una parte di spazio

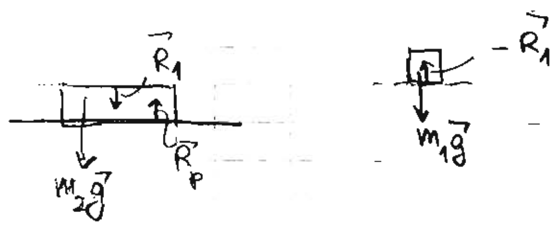
Es.



$m_1 + m_2 +$ filo

1+2

Forze

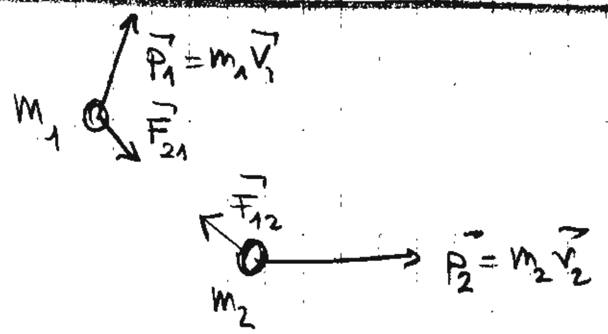


Forze esterne: $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $\vec{R}_p$

Forze interne: $\vec{R}_1$ e $-\vec{R}_1 \Rightarrow \boxed{\sum_{int} \vec{F}_i = 0}$

Sistema isolato $\rightarrow$ no $\vec{F}_{ext}$!

- Prendiamo sistema isolato di 2 palline



$$\vec{F}_{21} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \frac{d}{dt}\vec{p}_1 \quad ; \quad \vec{F}_{12} = \frac{d}{dt}\vec{p}_2$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante}$$

$$\vec{p}_{1_i} + \vec{p}_{2_i} = \vec{p}_{1_f} + \vec{p}_{2_f}$$

Se $\Sigma \vec{F}_{ext} = 0$

$\vec{P}_{tot} = \text{cost}$

- Altra definizione: impulso di una forza

Suppongo 1 forza su un corpo $\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

Si definisce impulso di $\vec{F}$ $\quad \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \vec{I}$

$$\Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \vec{I}$$

$$\vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_{in}) \equiv \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

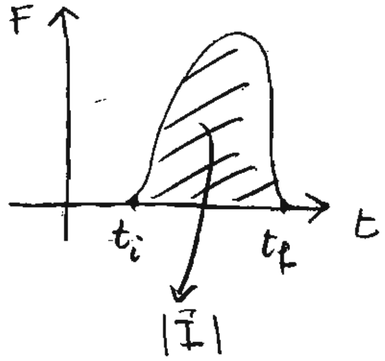
$$\Rightarrow \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{I}$$

se ho più forze su un corpo

$$\boxed{p_f - p_i = \sum_i \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_i \, dt = \sum_i \vec{I}_i}$$ Th. dell'impulso

Sia $\Delta t = t_f - t_i$. Per Δt piccolo,

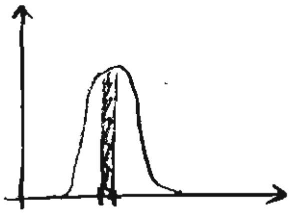
$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t \neq 0 \quad \text{se}$$



Se $\Delta t \to 0$

se F resta "piccola"

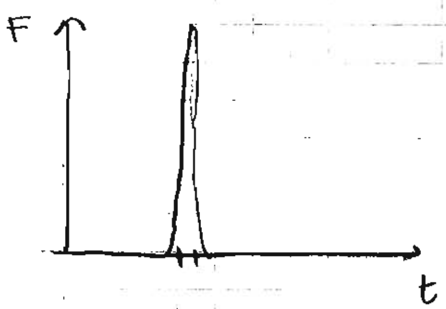
l'area → 0



↓

forza non impulsiva   es: peso, molla, f. grav.

Se invece



$\vec{F} \to \infty$ se $\Delta t \to 0$

$F \cdot \Delta t \neq 0$

↑

forza impulsiva

es. Reazioni del piano, tensioni del filo

- Sistema di 2 palline con forze esterne

$$\vec{I}_{tot} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 \, dt + \dots$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \, dt$$

$\sum \vec{F}_{su1} = m_1 \vec{a}_1$

$\sum \vec{F}_{su2} = m_2 \vec{a}_2$

$$= p_1(t_2) - p_1(t_1) + p_2(t_2) - p_2(t_1)$$

$$= p_{tot}(t_2) - p_{tot}(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \vec{F}_{ext_i} + \cancel{\sum_i \vec{F}_{int_i}} \right) dt$$

F_{int} si annullano 2 a 2

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_{ext_i} \, dt$$

$\Rightarrow$ Se su un sistema di 2 palline le $\vec{F}_{ext}$ non sono impulsive, si conserva la P_{tot} del sistema.

Urti

Due corpi A e B

$$\frac{m_A \quad \vec{v}_A}{m_B \quad \vec{v}_B}$$

Se le forze esterne sono non impulsive, nell'urto si conserva la q. d. moto:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{q}(t_2) - \vec{q}(t_1)$$

se $t_2 \sim t_1$ ($\Delta t \to 0$)

peso, molla ← $\vec{I} \to 0$ forze non impulsive

$\vec{I} \not\to 0$ forze impulsive → reazioni vincolari

prima	dopo
$\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$	$\vec{q}_A = m_A \vec{u}_A$
$\vec{p}_B = m_B \vec{v}_B$	$\vec{q}_B = m_B \vec{u}_B$

$$\boxed{\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{q}_A + \vec{q}_B}$$

Due tipi di urto:

1) completamente anelastico: A e B dopo l'urto restano uniti e si muovono con la stessa velocità

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B$$

⇒ dati $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, $\vec{u}_A$ e $\vec{u}_B$ sono 4 incognite (urto piano) e 4 eq.

$$\begin{cases} m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{u}_A + m_B \vec{u}_B \\ \vec{u}_A = \vec{u}_B \end{cases}$$

2) Urto elastico: dopo l'urto, non resta nei due corpi traccia della loro interazione ⇒ se anche ho compressione dei due corpi, l'energia immagazzinata viene restituita tutta ⇒ $\mathcal{L}_{\text{tutte le forze}} = 0$ ⇒ en. cinetica si conserva ⇒

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2$$

$$\Rightarrow \text{ho} \quad \text{4 eq} \begin{cases} m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{u}_A + m_B \vec{u}_B \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 \end{cases}$$

ma 6 incognite

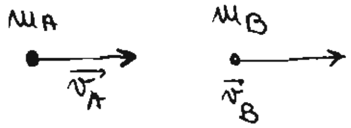
Devo dare altre informazioni (vedi esercitazioni)

Esempi:

1) **Urto centrale elastico:**

le uniche forze (impulsive) agiscono lungo $\hat{x}$ (congiungente 2 centri) $\Rightarrow$ se prima dell'urto $v_y = 0$, anche dopo l'urto $\Rightarrow$ Tutto avviene lungo x. Inoltre $\vec{I}_{R_1} = -\vec{I}_{R_2}$ $(\vec{R}_1 = -\vec{R}_2)$

$\Rightarrow \vec{I}_{tot} = I_{tot,x} = 0$



$$\begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A u_A + m_B u_B \\ \cancel{\tfrac{1}{2}} m_A v_A^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_B v_B^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_A u_A^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_B u_B^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A (v_A - u_A) = m_B (u_B - v_B) \\ m_A (v_A + u_A)(v_A - u_A) = m_B (u_B + v_B)(u_B - v_B) \end{cases}$$

divido

$$\boxed{v_A + u_A = u_B + v_B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} m_A (v_A - u_A) = m_B (u_B - v_B) \\ v_A + u_A = u_B + v_B \end{cases}}$$

$u_A = u_B + v_B - v_A$

$$\Rightarrow \quad m_A (2 v_A - u_B - v_B) = m_B (u_B - v_B)$$

$$\begin{cases} u_B = \dfrac{(m_B - m_A) v_B + 2 m_A v_A}{m_A + m_B} \\[2ex] u_A = \dfrac{(m_A - m_B) v_A + 2 m_B v_B}{m_A + m_B} \end{cases}$$

Casi particolari:

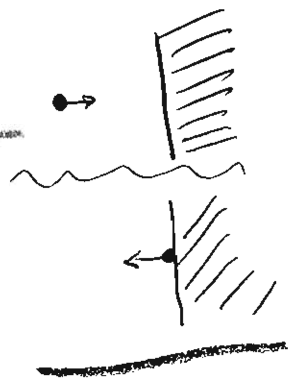
- $m_A = m_B$ $\qquad \begin{cases} u_B = v_A \\ u_A = v_B \end{cases} \Rightarrow$ i corpi si scambiano le loro velocità

- $v_B = 0$ $\qquad u_B = \dfrac{2 m_A v_A}{m_A + m_B}$

$$u_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A$$

Se $m_A = m_B$ $\qquad \begin{cases} u_B = v_A \\ u_A = 0 \end{cases}$ A si ferma e B riparte con la velocità di A

Se $m_B = \infty$ $\qquad \begin{cases} u_B = 0 \\ u_A = -v_A \end{cases}$ È il caso del rimbalzo sul muro!



2) <u>Urto centrale completamente anelastico</u>

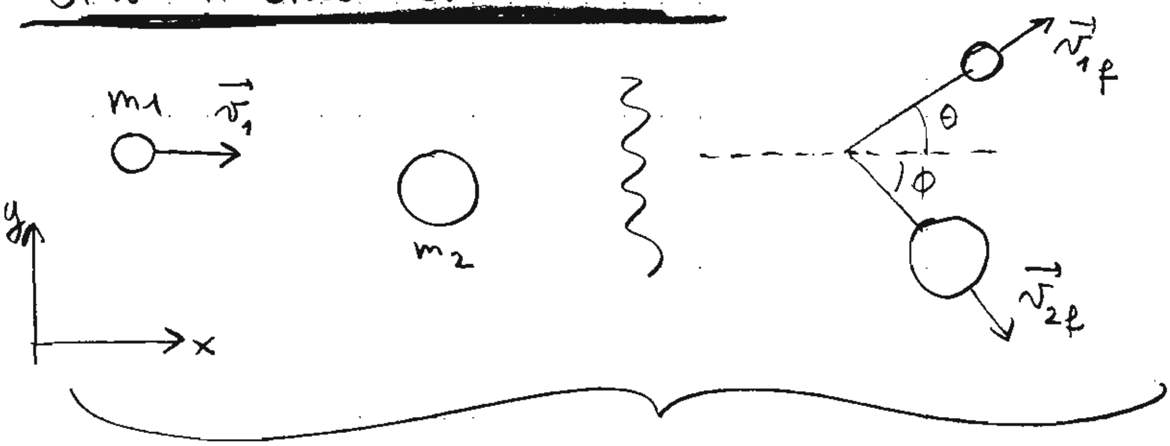
$$\begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A u_A + m_B u_B \\ u_A = u_B \end{cases} \Rightarrow$$

$$u = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(m_A + m_B) u^2 - \frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)} (v_A - v_B)^2$$

Urto in due dimensioni



Urto radente

$$\left.\begin{aligned} m_1 v_{1x} &= m_1 v_{1f,x} + m_2 v_{2f,x} \\ 0 &= m_1 v_{1f,y} + m_2 v_{2f y} \end{aligned}\right\} \text{ conserv. q. d. moto}$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$
$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi$$

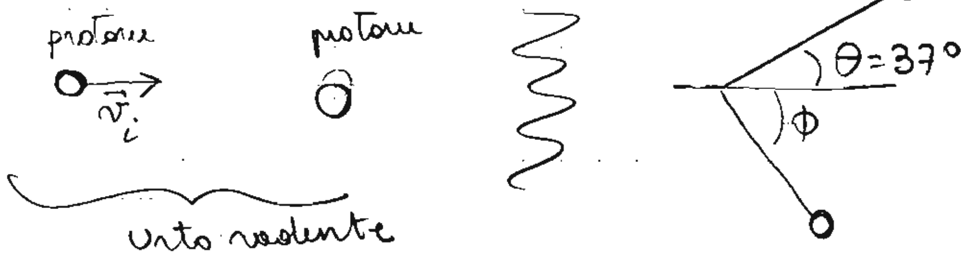
se urto è elastico

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Ho 3 eqn. e 4 incognite (v_{1f}, v_{2f}, θ e ϕ)

$\Rightarrow$ nei pb. si dà un altro dato (per es. θ o ϕ)

Esempio



v_i data. Trovare ϕ, v_{1f} e v_{2f}. Urto elastico

$v_i = 3.5 \times 10^5$ m/s

$$\begin{cases} \cancel{m}\, v_i = \cancel{m}\, v_{1f} \cos 37^\circ + \cancel{m}\, v_{2f} \cos\phi \\ 0 = \cancel{m}\, v_{1f} \sin 37^\circ - \cancel{m}\, v_{2f} \sin\phi \\ \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\, v_i^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\, v_{1f}^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\, v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$v_{1f} \sin 37^\circ = v_{2f} \sin\phi$$

$$v_i - v_{1f} \cos 37^\circ = v_{2f} \cos\phi \quad \to \text{quadro e sommo}$$

$$v_{2f}^2 = v_{1f}^2 + v_i^2 - 2 v_i v_{1f} \cos 37^\circ$$

$$\cancel{v_i^2} = v_{1f}^2 + v_{1f}^2 + \cancel{v_i^2} - 2 v_i v_{1f} \cos 37^\circ$$

$$0 = 2 v_{1f}^2 - 2 v_i v_{1f} \cos 37^\circ$$

$$\Rightarrow \quad v_{1f} = v_i \cos 37^\circ = 2.8 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$v_{2f}^2 = v_i^2 (1 + \cos^2 37^\circ) - 2 v_i^2 \cos^2 37$$

dall'energia

$$= v_i^2 (1 - \cos^2 37^\circ) = v_i^2 \sin^2 37$$

$$\Rightarrow \quad v_{2f} = v_i \sin 37^\circ = 2.1 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$\sin\phi = \frac{\cancel{v_i} \cos 37^\circ}{\cancel{v_i} \sin 37^\circ} \sin 37^\circ = 0.799$$

$$\Rightarrow \quad \phi = 53^\circ$$