

Neutrini e Materia Invisibile

2. La Materia Invisibile nell'Universo

- Elementi di Cosmologia del Big Bang
- Evidenza per l'esistenza di materia invisibile
- Ricerche di materia invisibile
- Costante cosmologica
- Misura precisa del Fondo Elettromagnetico (“Cosmic Microwave Background”, CMB)

Bibliografia:

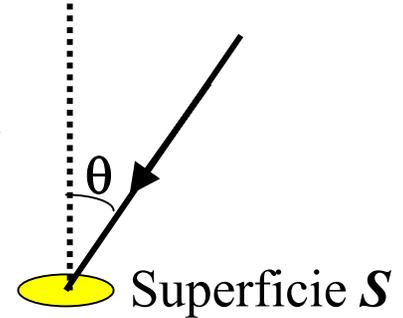
- **Andrew Liddle, An Introduction to Modern Cosmology (Wiley)**
- **J. Garcia-Bellido, Cosmology, <http://ific.uv.es/imfp04/>**
- **G. Jungman et al., Supersymmetric Dark Matter, Physics Reports 267 (1996) 195**
- **S. Perlmutter and B.P. Schmidt, Measuring cosmology with Supernovae, astro-ph/0303428 v1**

Elementi di Cosmologia del Big Bang

Il grande enigma cosmologico del XIX secolo:

- **Universo immobile e infinito \Rightarrow luminosità infinita (paradosso di Olbers 1826)**

Quantità di energia ricevuta su una superficie S per secondo:



$$\frac{dE}{dt} = SL\rho \int \cos\theta \frac{1}{r^2} dx dy dz = SL\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta d(\cos\theta) \underbrace{\int_0^{\infty} r^2 dr \frac{1}{r^2}}_{\text{INTEGRALE INFINITO}}$$

L : luminosità media delle stelle
(energia irradiata / s su 4π)

ρ : numero medio di stelle per
unità di volume

**INTEGRALE
INFINITO**

Assorbimento della luce da “polvere” interstellare?

NO: all’equilibrio Energia assorbita = Energia emessa

- **Universo immobile e di dimensioni finite:
implosione gravitazionale \Rightarrow concentrazione di tutta la massa
nel baricentro**

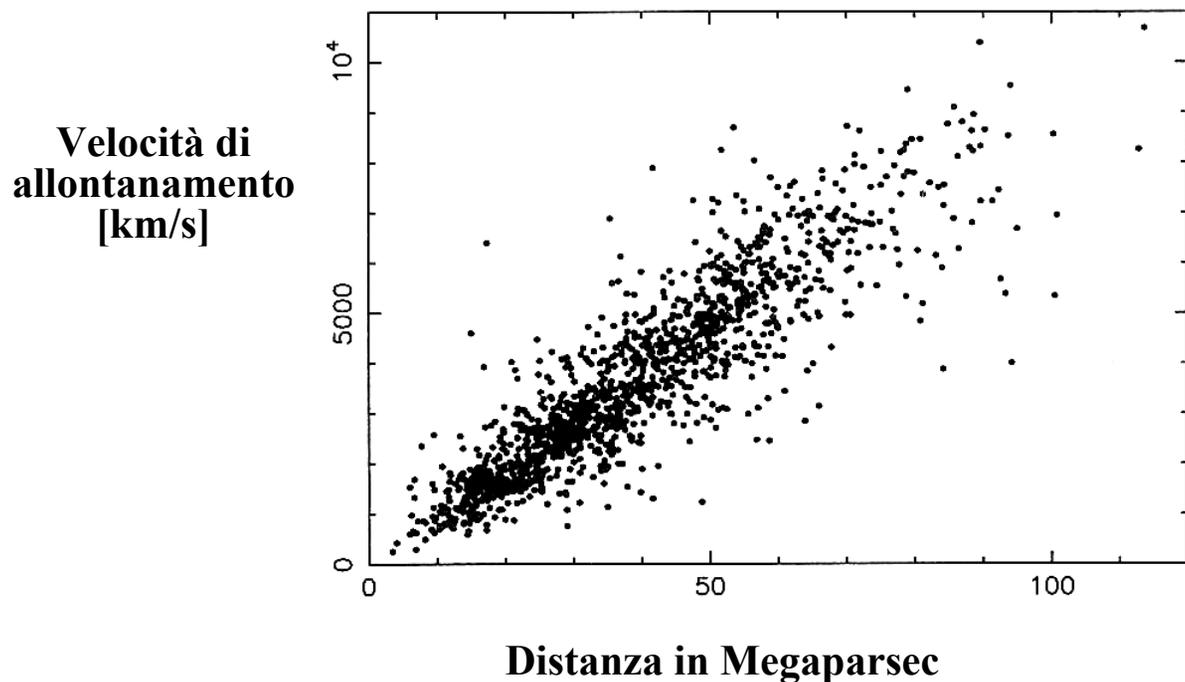
Soluzione dell'enigma dalle misure col telescopio di Mount Wilson (diametro 1 m)

Edwin Hubble (~1920): misura dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali – le galassie si allontanano dall'osservatore

⇒ **l'Universo non è immobile ma si espande**

Osservazione empirica:

velocità di allontanamento proporzionale alla distanza Galassia – osservatore



1 Megaparsec (Mpc)
= 3.261×10^6 anni-luce
= 3.086×10^{22} m

Legge di Hubble

$$v = H_0 d$$

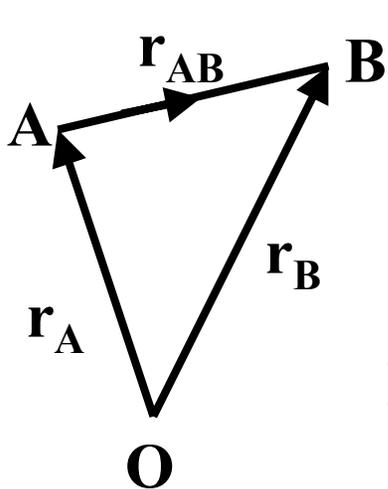
v : velocità di allontanamento
 d : distanza Galassia - osservatore

H_0 : costante di Hubble ($[H_0] = [t^{-1}]$)

$$H_0 = 100 h_0 \text{ (km/s) Mpc}^{-1} = h_0 \times (9.778 \times 10^9 \text{ anni})^{-1}$$

Costante di Hubble normalizzata $h_0 = (0.71 \pm 0.07) \times \frac{1.15}{0.95}$

Indipendenza della legge di Hubble dalla posizione dell'osservatore



$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_A &= H_0 \mathbf{r}_A \\ \dot{\mathbf{r}}_B &= H_0 \mathbf{r}_B \end{aligned} \right\} \text{osservatore in O}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \dot{\mathbf{r}}_B - \dot{\mathbf{r}}_A = H_0 (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = H_0 \mathbf{r}_{AB}$$

(osservatore in A)

Composizione dell'Universo

■ **Stelle (contenute in Galassie)**

Esempio: il Sole ($M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg). $0.2 M_{\odot} < \text{massa stellare} < 10 M_{\odot}$

■ **Galassie: agglomerati di $\sim 10^{11}$ stelle in rotazione intorno ad un asse**

Esempio: la Via Lattea

Spessore del disco: ~ 980 anni-luce



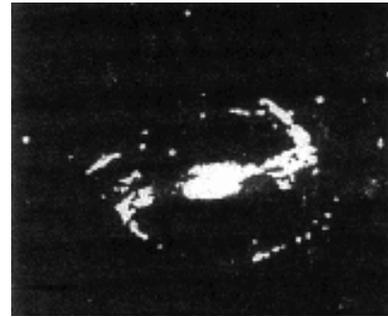
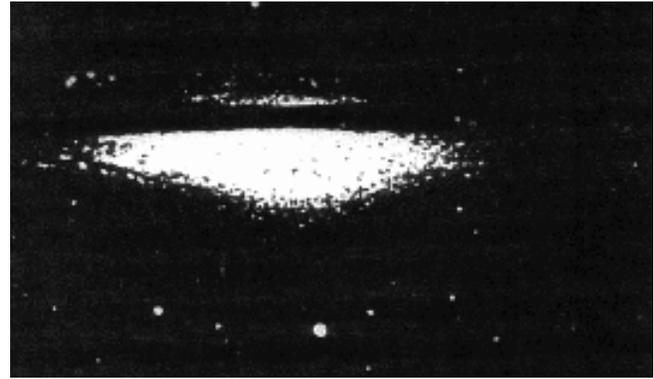
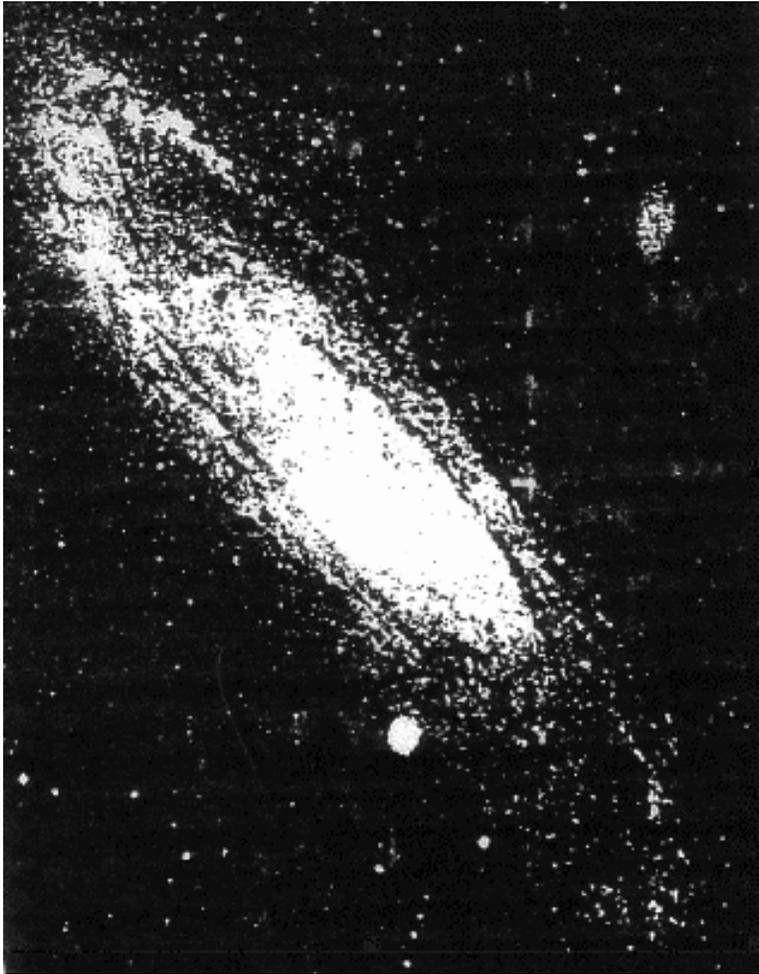
■ **Gruppi di Galassie**

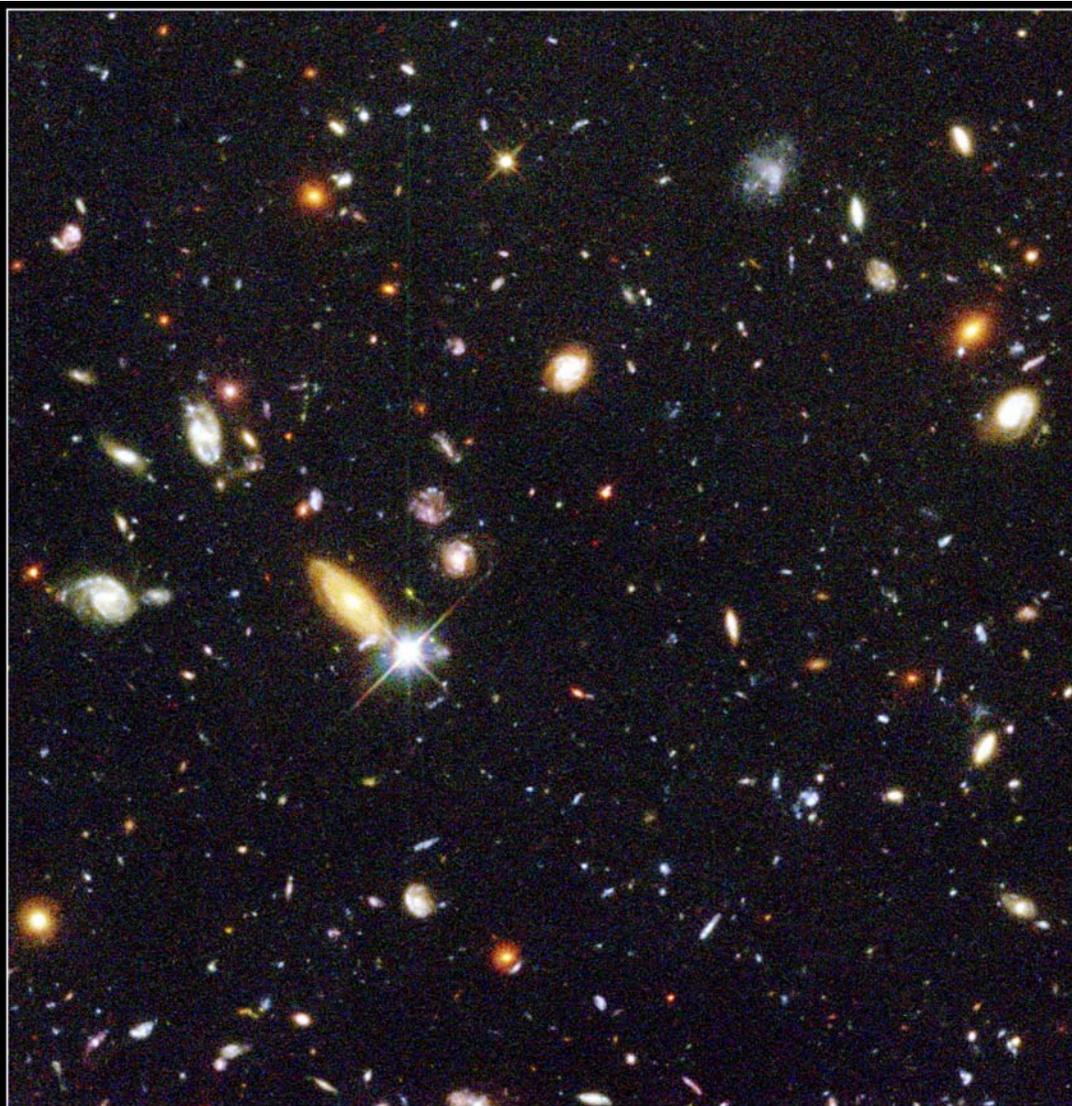
La Via Lattea risiede nel “Gruppo Locale”

Altre Galassie del Gruppo Locale: Grande Nebulosa di Magellano (~ 50 kpc da noi);
Andromeda (~ 770 kpc da noi)

Volume tipico di un Gruppo di Galassie: qualche Mpc^3

**L'Universo può essere considerato uniforme e isotropo
su dimensioni $> 100 \text{ Mpc} = 3.086 \times 10^{24} \text{ m} = 3.263 \times 10^8$ anni-luce**





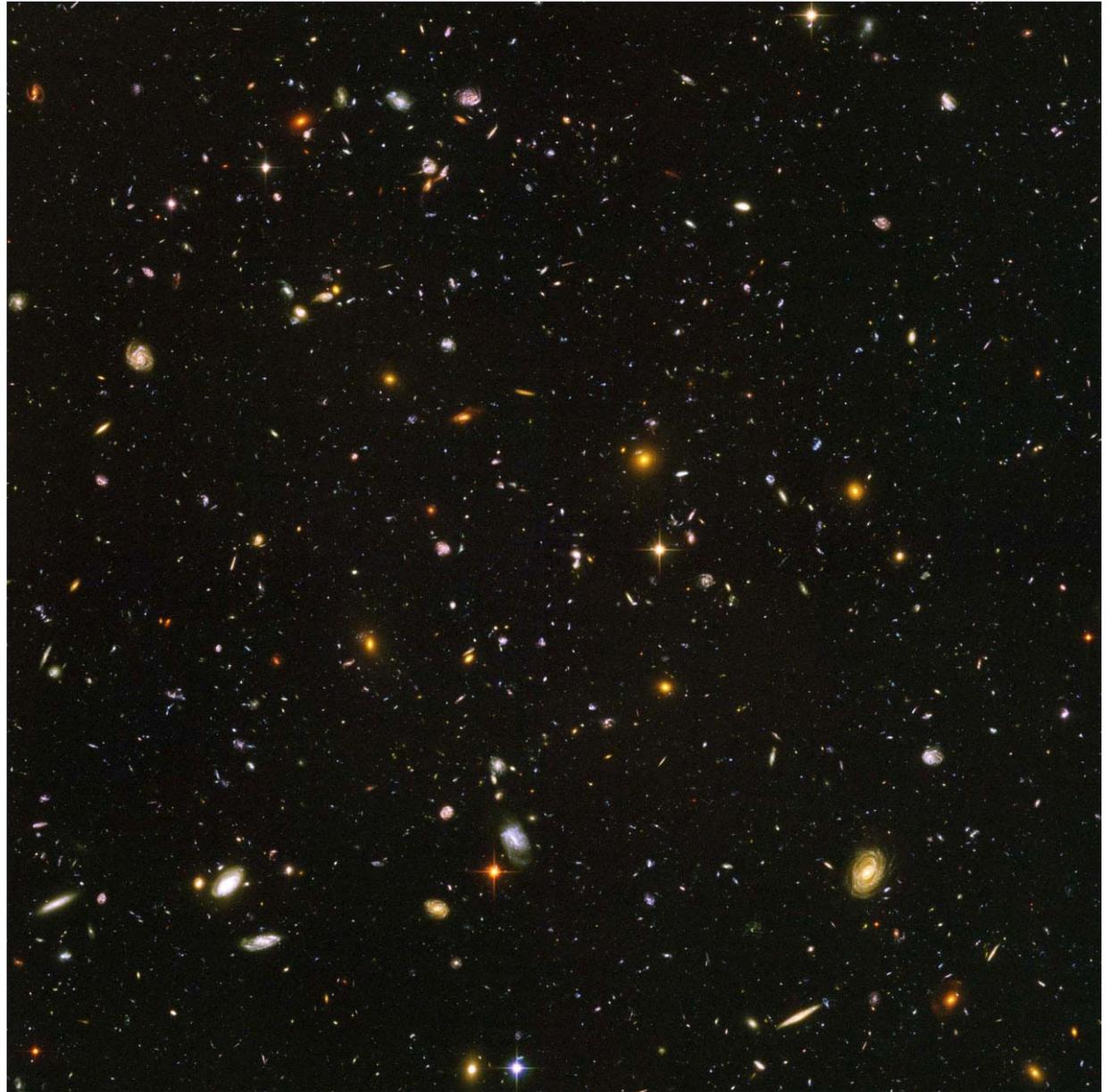
Hubble Deep Field
Hubble Space Telescope • WFPC2

Hubble Ultra-Deep Field

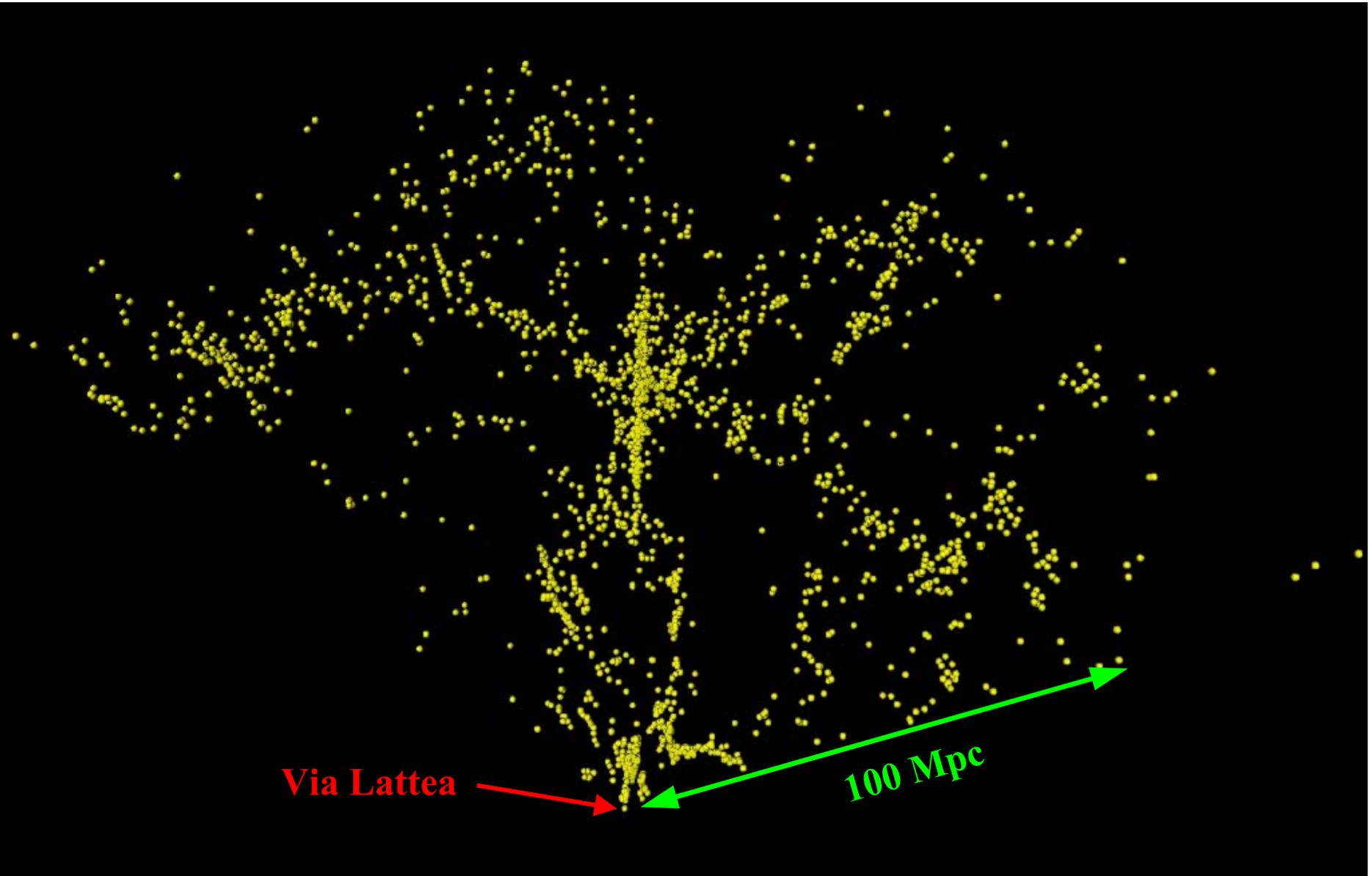
Dimensioni del campo:
~ 0.1 diametri lunari

Tempo di esposizione:
24.09.2003 – 16.01.2004

~ 10^4 galassie
Le ~ 100 galassie
più piccole e più rosse
si formarono ~ 8×10^8 anni
dopo il Big Bang



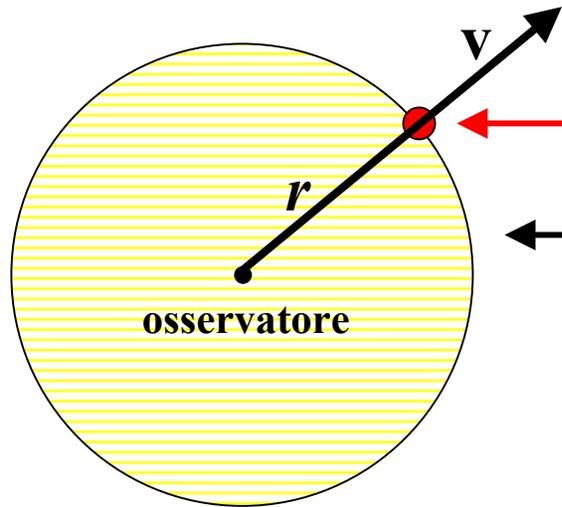
Mappa delle Galassie in un piccolo intervallo angolare di Universo



Evoluzione dell'Universo

Equazione di Einstein-Friedmann

(ricavata senza utilizzare la Relatività Generale)



ρ : densità dell'Universo

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

massa contenuta nella
sfera di raggio r

Energia totale della Galassia (teorema di Gauss):

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{r} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho r^2 m$$

↑
costante di
Newton

Definizione:

coordinate fisiche $\vec{r} \equiv (x, y, z)$

coordinate co-moventi $\vec{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$ definite ad un dato istante t .

Le galassie sono immobili nel sistema di coordinate co-moventi

$$\vec{r} = a(t) \vec{u}$$

$a(t)$: fattore adimensionale di scala che descrive l'espansione dell'Universo

Velocità di allontanamento delle Galassie:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{a}\vec{u} \quad \left(\frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \text{ per definizione} \right)$$

Energia totale della Galassia espressa in funzione di a , u :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{a}^2 u^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho a^2 u^2 m$$

Dividendo per $ma^2u^2 / 2$:

$$\frac{2E}{ma^2u^2} = \underbrace{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho}_{\text{termine che dipende soltanto da } t \text{ e non dipende da } E, m, u}$$

termine che dipende soltanto da t
e non dipende da E, m, u

$$\frac{2E}{mu^2}$$

non dipende da t ($E = \text{costante}$); non può dipendere da m, u



$$\frac{2E}{mu^2} = \text{costante} \equiv -k$$

definizione



$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}$$

Equazione di Einstein - Friedmann

**Descrizione dell'evoluzione del fattore di scala dell'Universo $a(t)$
in funzione della densità ρ e della costante k**

Interpretazione della legge di Hubble $\vec{v} = H_0 \vec{r}$

Velocità di allontanamento delle Galassie: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{r} = a(t)\vec{u} \quad \begin{array}{l} \nearrow \vec{v} = \dot{a}\vec{u} \\ \searrow \vec{u} = \frac{\vec{r}}{a} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} = H \vec{r}$$

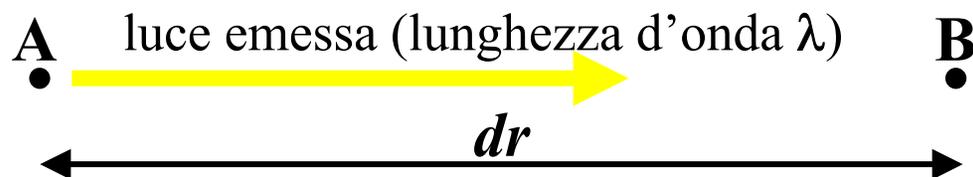
 $H = \frac{\dot{a}}{a}$

Valore misurato OGGI ($t = t_0$):

$$H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$$

Interpretazione dello spostamento verso il rosso

Due punti A, B molto vicini (distanza dr)



Velocità relativa di allontanamento: $dv = Hdr = \frac{\dot{a}}{a} dr$

Distanza dr molto piccola \Rightarrow descrizione dello spostamento verso il rosso per effetto Doppler: $\lambda \text{ ricevuta} = \lambda + d\lambda$ ($dv/c \ll 1$)

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dv}{c} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{dr}{c} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \ln(\lambda) = \ln(a) + \text{costante} \\ \lambda \text{ proporzionale ad } a \end{array}$$

$$\frac{\lambda \text{ ricevuta}}{\lambda \text{ emessa}} \equiv 1 + z = \frac{a_r}{a_e}$$

a_r : fattore di scala all'istante in cui la luce è ricevuta

a_e : fattore di scala all'istante in cui la luce è emessa

Equazione del Fluido

L'Universo è un fluido omogeneo e isotropo in espansione,
in equilibrio termico \Rightarrow densità ρ funzione soltanto del tempo t

Primo principio della Termodinamica applicato ad un volume sferico di Universo
di raggio = 1 in coordinate co-moventi \Rightarrow volume fisico $V = 4\pi a^3 / 3$

$$\delta Q = dU + pdV$$

Calore ceduto al sistema $\delta Q = 0$ (sistema isolato)

Energia interna $U = Mc^2 = 4\pi a^3 \rho c^2 / 3$

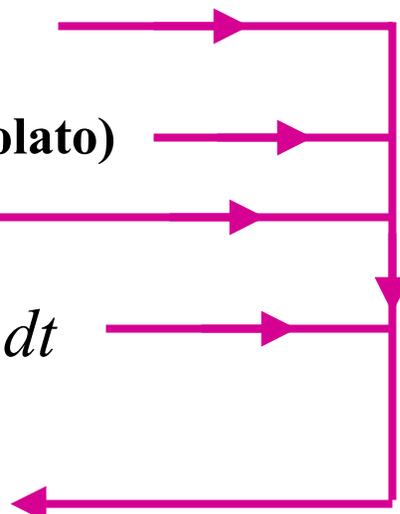
p : pressione; $dV = \frac{4\pi}{3} d(a^3) = 4\pi a^2 \dot{a} dt$

$$0 = c^2 (a^3 \dot{\rho} + 3a^2 \dot{a} \rho) + 3a^2 \dot{a} p$$



$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

Equazione del Fluido



Espansione accelerata o frenata?

Differenziazione rispetto al tempo dell'equazione di Einstein-Friedmann:

$$2 \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{8\pi}{3} G \dot{\rho} + 2k \frac{1}{a^2} \frac{\dot{a}}{a}$$

Sostituzione $\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)$ (Eq. del fluido) + eliminazione di $\frac{\dot{a}}{a}$

$$2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = -8\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + 2 \frac{k}{a^2}$$

Eq. di Einstein-Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{8\pi}{3} G \rho + \frac{k}{a^2} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{k}{a^2}$$


$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + 3 \frac{p}{c^2} \right)$$

Equazione dell'Accelerazione

Decelerazione continua dell'espansione dell'Universo per $\rho > 0$, $p > 0$

Risultato indipendente dalla costante k

Equazione di stato: relazione tra densità ρ e pressione p

Due casi:

▪ **Materia (velocità $v \ll c$):** $p = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0$ (Equazione del Fluido)

Definizione: $t = t_0$, $a_0 = 1$ OGGI

Soluzione dell'Equazione del Fluido: $\rho a^3 = \text{costante} = \rho_0 a_0^3 = \rho_0$

$\longrightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{a^3}$ **La densità è inversamente proporzionale al volume**

▪ **Radiazione (fotoni, particelle relativistiche):** $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ (si dimostra facilmente)

$\longrightarrow \quad \dot{\rho} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{a^4}$

Sostituzione nell'Equazione di Einstein – Friedmann semplificata ($k = 0$):

▪ **Materia:** $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{\rho_0}{a^3} \quad \longrightarrow \quad a(t) = (t/t_0)^{2/3}$

▪ **Radiazione:** $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{\rho_0}{a^4} \quad \longrightarrow \quad a(t) = (t/t_0)^{1/2}$

Miscela materia - radiazione

$$\rho = \rho_M + \rho_R = \frac{\rho_M^0}{a^3} + \frac{\rho_R^0}{a^4} \quad (\rho_M^0, \rho_R^0 \text{ valori odierni})$$

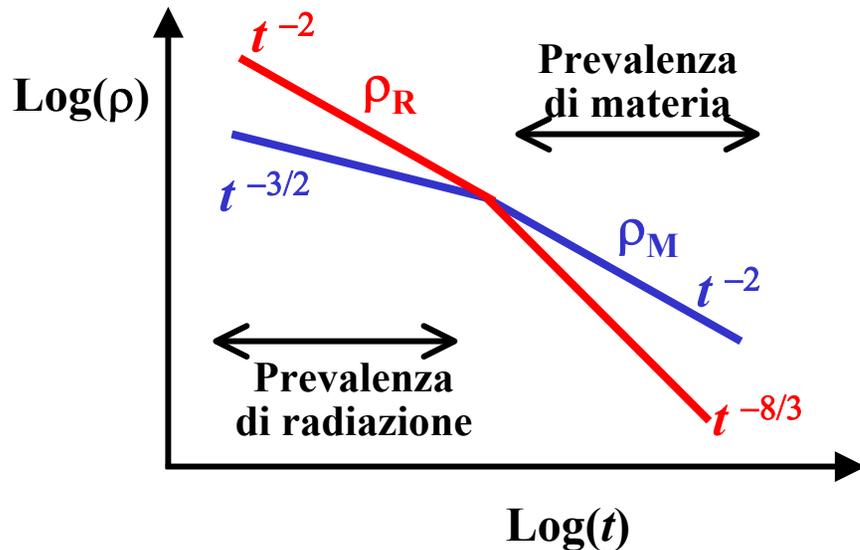
Problema matematico risolvibile ma complicato

▪ **Prevalenza di materia:** $\rho_M \gg \rho_R$

$$a(t) = (t/t_0)^{2/3} \quad \rho_M(t) = \rho_M^0 (t_0/t)^2 \quad \rho_R(t) = \rho_R^0 (t_0/t)^{8/3}$$

▪ **Prevalenza di radiazione:** $\rho_R \gg \rho_M$

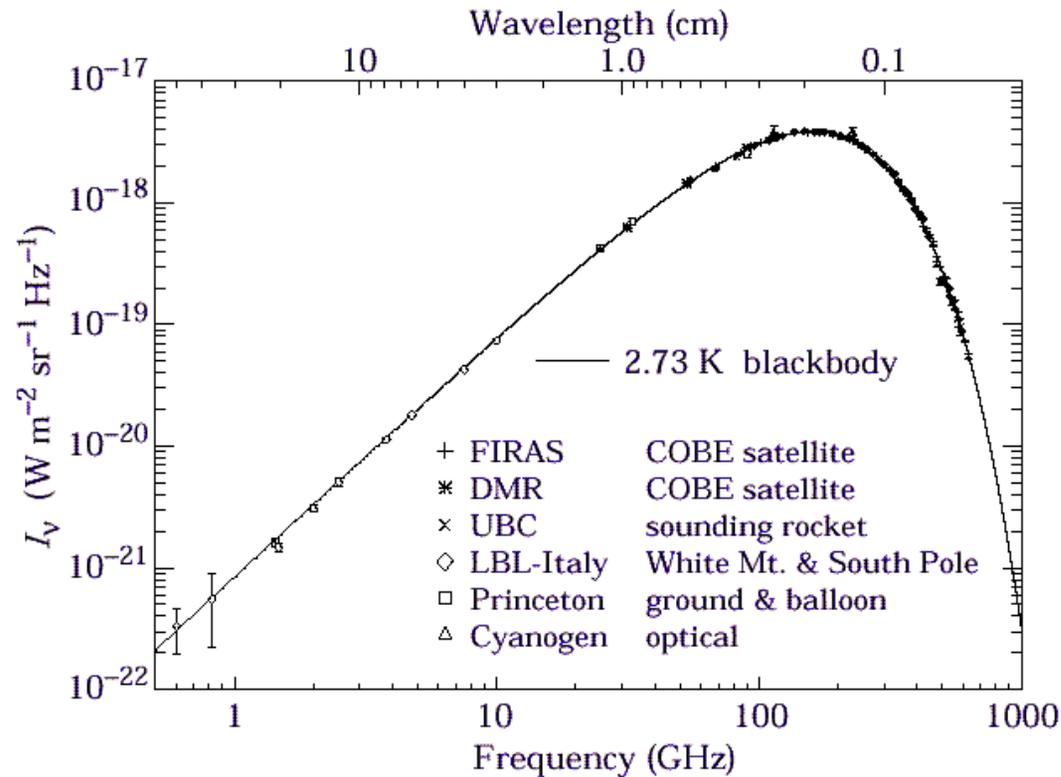
$$a(t) = (t/t_0)^{1/2} \quad \rho_M(t) = \rho_M^0 (t_0/t)^{3/2} \quad \rho_R(t) = \rho_R^0 (t_0/t)^2$$



Per t sufficientemente grande la materia prevale sulla radiazione

1965: Scoperta di un rumore di fondo elettromagnetico a spettro continuo, isotropo entro 1 parte in 10^5

(Penzias,
Wilson)



Distribuzione spettrale, densità di energia uguale allo spettro del Corpo Nero con $T = (2.728 \pm 0.004) \text{ }^\circ\text{K}$

Evoluzione della distribuzione del Corpo Nero durante l'espansione dell'Universo

$$\rho_R(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

h : costante di Planck

k_B : costante di Boltzmann

Densità totale di energia:

$$\rho_R = \int_0^\infty \rho_R(\nu) d\nu = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 = 7.565 \times 10^{-16} T^4 \text{ J m}^{-3} \approx 4.73 \times 10^{-3} T^4 \text{ eV/cm}^3$$

Oggi: $t = t_0$; $a(t_0) = a_0 = 1$; $T = T_0 = 2.73 \text{ °K}$:

$$\rho_R^0 = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T_0^4$$

Evoluzione della densità di radiazione in funzione del fattore di scala $a(t)$:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^4} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{T_0}{a}$$

**LA TEMPERATURA DELL'UNIVERSO
È INVERSAMENTE PROPORZIONALE
AL FATTORE DI SCALA $a(t)$**

Evoluzione dei parametri dell'Universo

$$a(t) = (t/t_0)^{2/3} \quad \left[\begin{array}{l} \text{prevalenza} \\ \text{di materia} \end{array} \right]$$

$$a(t) = (t/t_0)^{1/2} \quad \left[\begin{array}{l} \text{prevalenza} \\ \text{di radiazione} \end{array} \right]$$

$$\rho_M = \rho_M^0 / a^3$$

$$\rho_R = \rho_R^0 / a^4$$

$$T = T_0 / a$$

L'Universo nel passato lontano ($t \ll t_0$):

$$a \ll 1; \quad \rho \gg \rho_0; \quad T \gg T_0$$

$t \rightarrow 0: a \rightarrow 0; \rho \rightarrow \infty; T \rightarrow \infty$ **IPOTESI DEL BIG BANG**

Età dell'Universo (calcolo approssimato di t_0)

Ipotesi: $k = 0$ nell'equazione di Einstein - Friedmann

$\rho_M \gg \rho_R$ per la maggior parte del tempo

$$\longrightarrow a(t) = (t/t_0)^{2/3}$$

$$\longrightarrow H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

Oggi: $H(t_0) = H_0 = \frac{2}{3t_0}$

$$\longrightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ anni}$$

$t_0 = (12 - 18) \times 10^9$ anni
per effetto della costante
cosmologica (v. in seguito)

L'Universo primordiale (pochi istanti dopo il Big Bang)

Temperatura T molto elevata \Rightarrow energia media dei fotoni $\langle E_\gamma \rangle \approx 3k_B T$

Esempio: $T \gg 5 \times 10^9 \text{ }^\circ\text{K} \Rightarrow \langle E_\gamma \rangle \gg 1.2 \text{ MeV} > m_e c^2$



L'Universo è riempito di coppie e^+e^- in equilibrio termico con la radiazione.

Numero di particelle per unità di volume:

$$N(e^+) = N(e^-) = \frac{7}{8} N(\gamma)$$

↑
effetto della statistica di Fermi - Dirac

Per temperature T molto elevate, l'Universo è riempito di una miscela di particelle in equilibrio con la radiazione. Tutte le particelle con $mc^2 \ll 3k_B T$ sono presenti.

Il numero di particelle per unità di volume è fissato dalle leggi della meccanica statistica ed è soltanto funzione di T

Evoluzione dell'Universo primordiale

$t \approx 10^{-10} \text{ s}$; $T \approx 10^{15} \text{ }^\circ\text{K}$; $\langle E \rangle \approx 260 \text{ GeV}$

Densità $\rho \approx 5 \times 10^{26} \text{ g/cm}^3$ (cfr. con la densità del protone: $\rho \approx 4 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$)

Miscela di tutte le particelle elementari note in equilibrio termico.

Decadimento delle particelle instabili:

Esempio: $Z \rightarrow q \bar{q}$; $Z \rightarrow e^+ e^-$; $Z \rightarrow \nu \bar{\nu}$

Rigenerazione continua da collisioni:

$q \bar{q} \rightarrow Z$; $e^+ e^- \rightarrow Z$; $\nu \bar{\nu} \rightarrow Z$

$t \approx 4 \times 10^{-9} \text{ s}$; $T \approx 4 \times 10^{14} \text{ }^\circ\text{K}$; $\langle E \rangle \approx 120 \text{ GeV}$

$\langle E \rangle$ insufficiente per rigenerare W, Z \Rightarrow scomparsa di W, Z

$t \approx 10^{-6} \text{ s}$; $T \approx 10^{13} \text{ }^\circ\text{K}$; $\langle E \rangle \approx 2.6 \text{ GeV}$

I quarks pesanti (b, c) e il leptone τ si sono già estinti

L'Universo è costituito di una miscela di quarks leggeri (u, d, s), elettroni, muoni, fotoni, gluoni, neutrini

Densità $\rho \approx 4 \times 10^{17} \text{ g/cm}^3$

$t \approx 3 \times 10^{-5} \text{ s}$; $T \approx 2 \times 10^{12} \text{ }^\circ\text{K}$; $\langle E \rangle \approx 0.5 \text{ GeV}$

Sopravvissuti: u, d, e, μ , γ , g, ν

Composizione dell'Universo:

γ	ν	$\bar{\nu}$	e^-	e^+	μ^-	μ^+	g	u	\bar{u}	d	\bar{d}
1	$\frac{21}{16}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	8	$\frac{21}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{21}{8}$

Densità $\rho \approx 4 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3 \approx$ densità del protone

TRANSIZIONE DI FASE: confinamento di quarks, antiquarks, gluoni

FORMAZIONE DI ADRONI: p, \bar{p} , n, \bar{n} , π^\pm , π^0

Annichilazione immediata $p \bar{p} \rightarrow$ mesoni π ; $n \bar{n} \rightarrow$ mesoni π

Un po' più tardi: disintegrazione $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$; $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$

Sopravvissuti: e , γ , ν , μ (i muoni ancora per poco)

+ una piccola frazione di protoni e neutroni: la materia barionica dell'Universo di oggi

Conseguenza di una piccola asimmetria materia – antimateria

$$\frac{N(q) - N(\bar{q})}{N(q) + N(\bar{q})} \approx 10^{-9} \quad \text{già presente } \sim 10^{-10} \text{ s dopo il Big Bang}$$

Condizione iniziale del Big Bang?

Fenomeno fisico non ancora scoperto con violazione simultanea di Numero Barionico e simmetria CP? (A.. Sakharov 1967)

$t \approx 10^{-2} \text{ s} ; T \approx 10^{11} \text{ }^\circ\text{K} ; \langle E \rangle \approx 26 \text{ MeV}$

Densità $\rho \approx 2.5 \times 10^9 \text{ g/cm}^3$

L'Universo: miscela di $e^\pm, \nu, \bar{\nu}, \gamma$ + pochi p, n

$$\nu \bar{\nu} \leftrightarrow e^+ e^-$$

$$\gamma \gamma \leftrightarrow e^+ e^-$$

$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p$$

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n$$

$$m_p < m_n \\ N(p) > N(n)$$

Rapporto n/p funzione calcolabile della temperatura T

$t \approx 0.1 \text{ s} ; T \approx 3 \times 10^{10} \text{ }^\circ\text{K} ; \langle E \rangle \approx 8 \text{ MeV}$

Sezione d'urto neutrini: $\sigma(\nu) \propto E^2 \propto T^2$

Densità di neutroni e protoni $\propto T^3$

Percorso libero medio dei neutrini $\propto T^{-5} >$ dimensioni lineari dell'Universo $\propto T^{-1}$

GELO ("FREEZE-OUT") DEI NEUTRINI

I neutrini non interagiscono più con il resto dell'Universo

\Rightarrow fine dell'equilibrio termico dei neutrini \Rightarrow gas di neutrini che si raffredda
seguendo l'espansione dell'Universo

OGGI ($t_0 \approx 10^{10}$ anni): $T_\nu \approx 1.9 \text{ }^\circ\text{K}$

$$N(\nu_e) = N(\bar{\nu}_e) = N(\nu_\mu) = N(\bar{\nu}_\mu) = N(\nu_\tau) = N(\bar{\nu}_\tau) \approx 60 \text{ cm}^{-3}$$

dappertutto nell'Universo non ancora rivelati (non rivelabili?)

$\langle E_\nu \rangle \approx 4 \times 10^{-4} \text{ eV}$ nell'ipotesi $m_\nu = 0$; $E_\nu = m_\nu c^2$ nell'ipotesi $m_\nu c^2 \gg 4 \times 10^{-4} \text{ eV}$

Nucleosintesi (formazione dei nuclei)

Formazione di deutoni: $p + n \rightarrow d + \gamma$

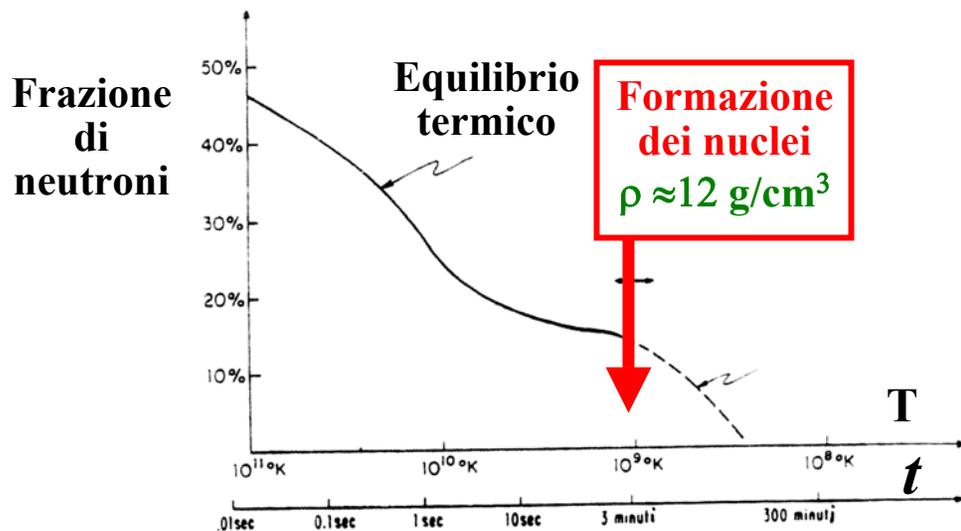
Dissociazione immediata: $\gamma + d \rightarrow p + n$ (per $T > 10^9 \text{ °K}$)

$T < 10^9 \text{ °K}$: $E_\gamma < \text{Energia di legame del deutone (2.2 MeV)}$

\Rightarrow **il deutone diventa stabile**

\Rightarrow **FUSIONE NUCLEARE:** $d + d \rightarrow p + H^3$

FORMAZIONE DI NUCLEI DI ELIO-4: $d + H^3 \rightarrow n + He^4$



Utilizzazione di tutti i neutroni per produrre He^4

Massa $He^4 \approx 2 \times$ massa di tutti i neutroni

\Rightarrow **frazione in massa di He^4 nell'Universo $\approx 2 \times$ frazione di neutroni al tempo della formazione di nuclei $\approx 25\%$**

VALORE MISURATO OGGI: $(24 \pm 2)\%$

$t > 300 \text{ s}$; $T < 10^9 \text{ °K}$; $\langle E \rangle < 0.4 \text{ MeV} < m_e c^2$

Reazione $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$ energeticamente impossibile

\Rightarrow scomparsa di elettroni e positroni per annichilazione: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

Gli elettroni di oggi: i sopravvissuti alle annichilazioni $e^+ + e^-$

Effetto di una piccola asimmetria già esistente 10^{-10} s dopo il Big Bang:

$$\frac{N(e^-) - N(e^+)}{N(e^-) + N(e^+)} \approx 10^{-9}$$

L'Universo è elettricamente neutro:

$$N(e^-) = N(p)$$

Numero di elettroni sopravvissuti = Numero di protoni sopravvissuti

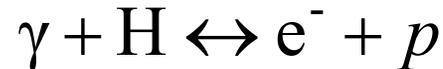
$t = 200 \text{ s} \rightarrow 3 \times 10^5 \text{ anni}$

$t < 3 \times 10^4 \text{ anni}$ ($T > 15000 \text{ °K}$): prevalenza di radiazione. T decresce come $t^{-1/2}$

$t > 3 \times 10^4 \text{ anni}$: prevalenza di materia. T decresce come $t^{-2/3}$

Composizione dell'Universo: γ , e^- , p , He^4 , tracce di nuclei più pesanti

Formazione e dissociazione di atomi ($\langle E_\gamma \rangle >$ energia di legame):



$t \approx 3 \times 10^5 \text{ anni}$; $T \approx 3000 \text{ °K}$; $\langle E \rangle \approx 0.5 \text{ eV}$

Formazione di atomi: la materia diventa trasparente alla radiazione che esce dall'equilibrio termico e continua a raffreddarsi seguendo l'espansione dell'Universo

La radiazione oggi: il rumore di fondo elettromagnetico con $T = 2.73 \text{ °K}$ scoperto nel 1965

$t \approx 10^8 \text{ anni}$

Densità $\rho \approx$ densità media di una Galassia tipica

$\approx 10^6 \times$ densità media dell'Universo

FORMAZIONI DI GALASSIE PER FLUTTUAZIONI DI DENSITÀ (EFFETTO GRAVITAZIONALE)

Significato fisico della costante k

Equazione di Einstein – Friedmann:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k}{a^2}$$

Per t sufficientemente grande $\rho_M > \rho_R$ (prevalenza di materia): $\rho_M = \frac{\rho_M^0}{a^3}$

▪ $k = 0$: Universo critico

$$a(t) = (t/t_0)^{2/3} \qquad H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

Espansione continua, $H(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$

Densità critica:

$$\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

▪ $k < 0$: Universo aperto ($\rho < \rho_c$) ; $H(t) > 0$ SEMPRE

Per $t \rightarrow \infty$ il termine $-k/a^2$ domina:

$$\dot{a} = \sqrt{|k|} \quad \longrightarrow \quad a(t) \propto t$$

▪ $k > 0$: Universo chiuso ($\rho > \rho_c$)

Esiste un valore di a per cui $H = 0$: **ARRESTO DELL'ESPANSIONE**

$\rho > 0$: **CONTRAZIONE GRAVITAZIONALE (“BIG CRUNCH”)**

La costante k in Relatività Generale

La densità di materia determina la curvatura dello spazio:
la costante k è la curvatura

- $k = 0$ ($\rho = \rho_c$): “spazio piatto” (curvatura = 0)

GEOMETRIA EUCLIDEA

- $k < 0$ ($\rho < \rho_c$): “spazio aperto” (curvatura < 0)

GEOMETRIA IPERBOLICA

- $k > 0$ ($\rho > \rho_c$): “spazio chiuso” (curvatura > 0)

GEOMETRIA SFERICA

NOTA: nel caso $k \neq 0$ i cosmologi preferiscono ridefinire il fattore di scala:

$$a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}}$$

Eq. di Einstein – Friedmann per $k \neq 0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho \pm \frac{1}{a^2}$$

Densità critica dell'Universo

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

ρ_c , H funzioni del tempo

Oggi: $\rho_c = 1.88 h_0^2 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} \approx 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$

Massa del protone: $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

$\rho_c = 11.3 h_0^2 \text{ protoni / m}^3 \approx 6 \text{ protoni / m}^3$

Densità molto piccola!

Con altre unità di misura:

M_O (massa solare) = $2 \times 10^{30} \text{ kg}$

1 Mpc = $3.086 \times 10^{22} \text{ m}$

$\rho_c \approx 2.78 h_0^2 \times 10^{11} M_O (\text{Mpc})^{-3}$

$10^{11} M_O \approx \text{una galassia}$

$\rho_c \approx 2.78 h_0^2 \text{ galassie (Mpc)}^{-3}$

La Materia nell'Universo oggi

Definizione: $\Omega = \rho / \rho_c$ ($\rho_c = 1.88 h_0^2 \times 10^{26} \text{ kg m}^{-3}$)

Materia luminosa (stelle, galassie): $\Omega_{\text{lum}} = 0.005 - 0.01$

Radiazione elettromagnetica (Corpo Nero, $T = 2.73 \text{ °K}$)

Densità di energia: $\varepsilon = 4.19 \times 10^{-14} \text{ J m}^{-3}$

$\rho_R = \varepsilon / c^2 = 4.66 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$

$\Omega_R = 2.5 \times 10^{-5} / h_0^2$ **TRASCURABILE**

Neutrini

($\sim 360 \text{ cm}^{-3} = 3.6 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$)

▪ $m_\nu = 0$, $T = 1.9 \text{ °K}$: $\Omega_\nu = 0.68 \Omega_R$ **TRASCURABILE**

▪ $m_\nu > 0$: $\Omega_\nu = \frac{\sum m_i}{92 h_0^2}$ (m_i in eV)

$\sum m_i = 92 h_0^2 \approx 52 \text{ eV} \longrightarrow \Omega_\nu = 1$

Esperimenti di oscillazione: $\Delta m^2 < 2 \text{ eV}^2$ (LSND)

Assumendo $m_1 \ll m_2 \ll m_3$, $\sum m_i < 1.4 \text{ eV} \longrightarrow \Omega_\nu \approx 0.04$

(e ancora più piccolo per un fattore ~ 10 se il risultato LSND è falso)

Materia Barionica (Nuclei)

(Comprende la materia luminosa)

Calcoli dettagliati sulla formazione di nuclei leggeri durante la nucleosintesi: He^4 , D , He^3 , Li^7

Predizioni teoriche delle frazioni in massa dei nuclei leggeri in funzione della densità di materia barionica ρ_B

Errore di misura



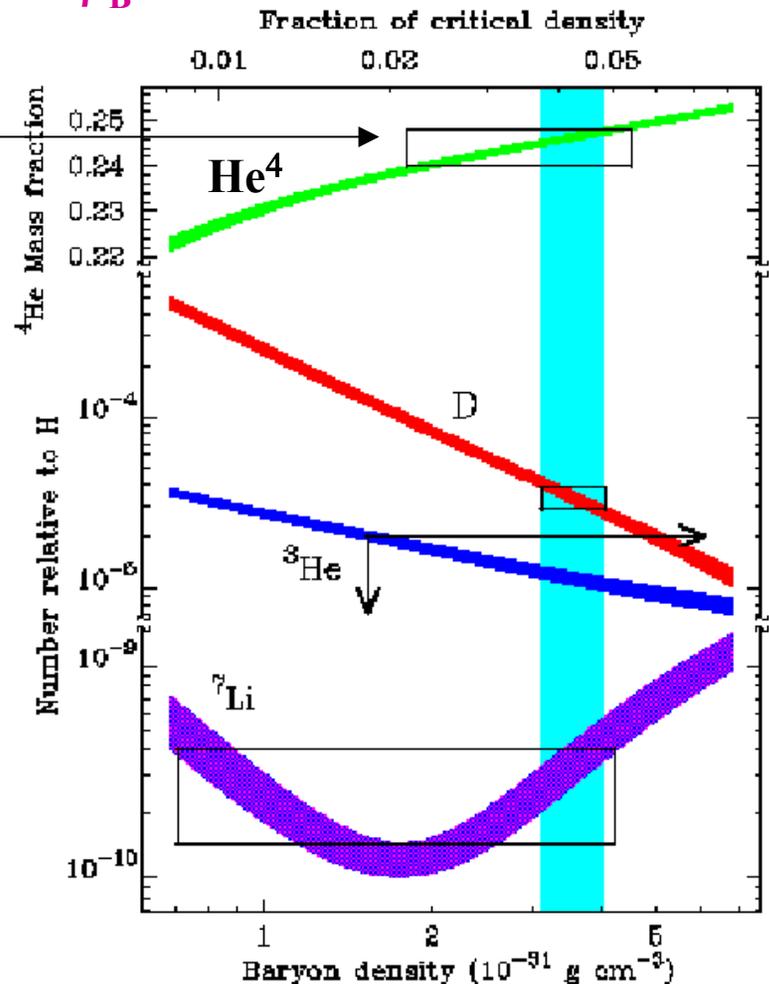
Intervallo di densità barionica compatibile con la predizione

 Regione in cui le misure sono in accordo con le previsioni

$$\Omega_B = 0.03 - 0.05$$

$$\Omega_B > \Omega_{\text{lum}} \quad (\Omega_{\text{lum}} = 0.005 - 0.01)$$

 Non tutta la materia barionica è luminosa

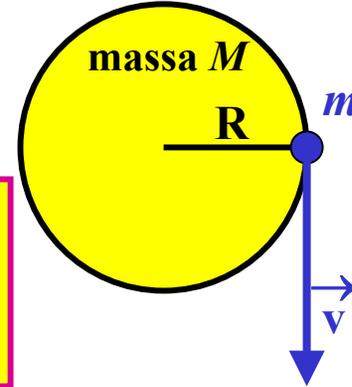


Evidenza dell'esistenza di materia invisibile nell'Universo

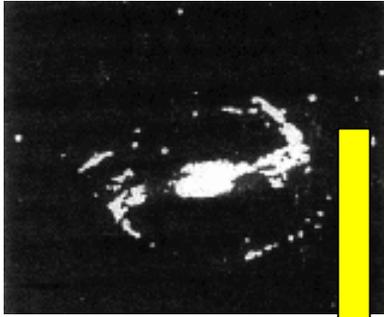
Misura della velocità di rotazione dell'idrogeno atomico alla periferia delle galassie

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$



Segnale radio ($\lambda = 21$ cm) da transizione iperfina
Misura dello spostamento Doppler

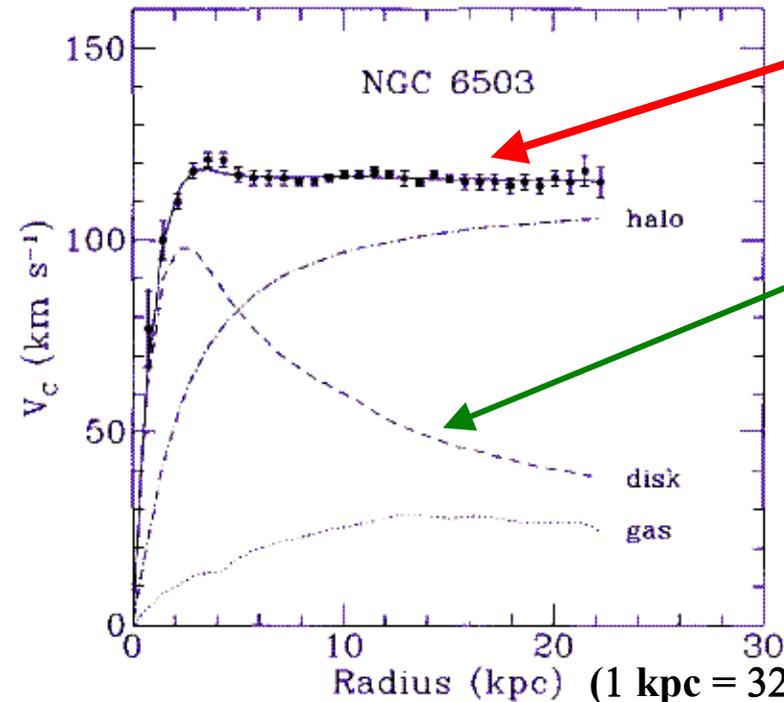


$v \approx \text{costante} \Rightarrow M$ proporzionale a R
LA MASSA DELLA GALASSIA SI ESTENDE OLTRE LA REGIONE VISIBILE \Rightarrow MATERIA INVISIBILE

Predizione se $M = M_{\text{visibile}}$

EVIDENZA DI MATERIA INVISIBILE ("DARK MATTER")

Valore stimato $\Omega_{\text{DM}} \approx 0.1$



Studio delle velocità relative delle Galassie contenute in Gruppi di Galassie \Rightarrow determinazione della forza gravitazionale esercitata sulle Galassie dal resto della materia contenuta nel Gruppo

\Rightarrow EVIDENZA DI MATERIA INVISIBILE CHE RIEMPIE IL VOLUME OCCUPATO DAL GRUPPO DI GALASSIE

$$\Omega_{\text{DM}} \approx 0.3$$

$\Omega_{\text{DM}} > \Omega_{\text{B}}$: la maggior parte della materia nell'Universo non è barionica (non è costituita da protoni e neutroni)

Ricerche di Materia Invisibile Barionica

$$\Omega_B = 0.03 - 0.05$$

Esempi di materia invisibile barionica

- BUCHI NERI formati dal collasso gravitazionale di stelle di grande massa alla fine del ciclo di combustione

Esistenza di Buchi Neri alla periferia di Galassie molto improbabile

- NANE BRUNE (dette anche MACHO: Massive Astronomical Compact Halo Object): stelle con massa troppo piccola per innescare le reazioni di fusione

$$10^{-8} < \frac{M_{NB}}{M_O} \leq 0.05$$



Limite di evaporazione Limite di accensione

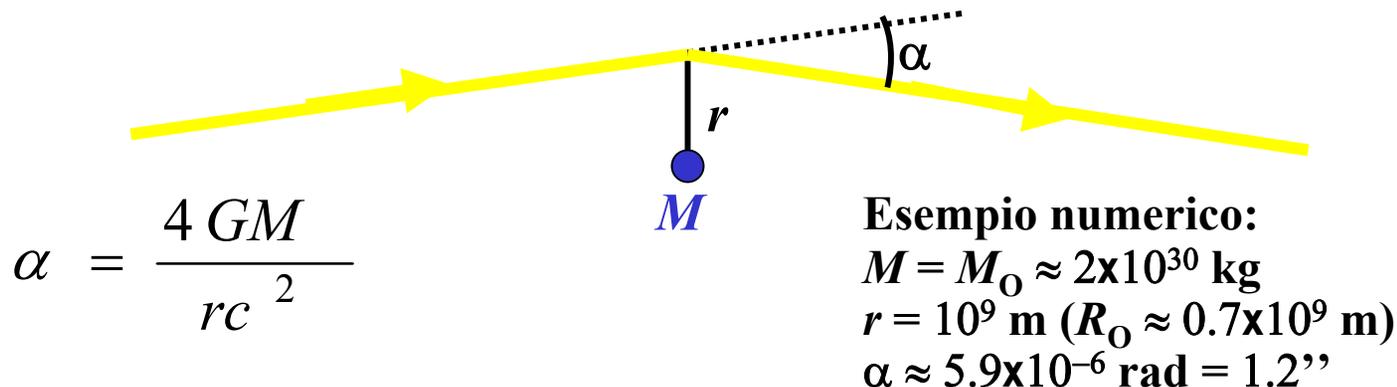
$\left(\begin{array}{l} M_{NB}: \text{ massa Nana Bruna} \\ M_O: \text{ massa solare} \end{array} \right)$

Esempio di Nana Bruna: il pianeta Giove ($M / M_O \approx 10^{-3}$)

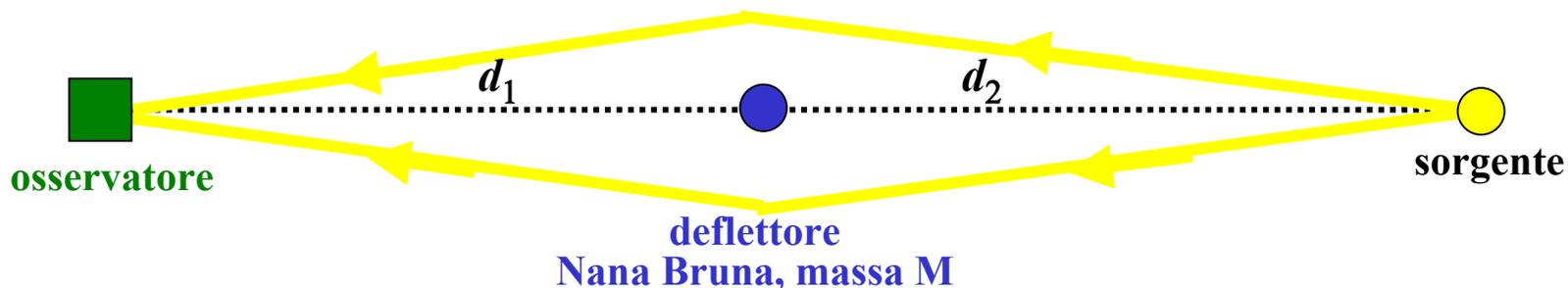
Ricerca di Nane Brune nella periferia della Via Lattea

Effetto di Lente Gravitazionale

Deflessione di un raggio di luce in un campo gravitazionale (effetto previsto dalla Relatività Generale e verificato sperimentalmente nel 1919)



Allineamento perfetto sorgente – deflettore – osservatore:

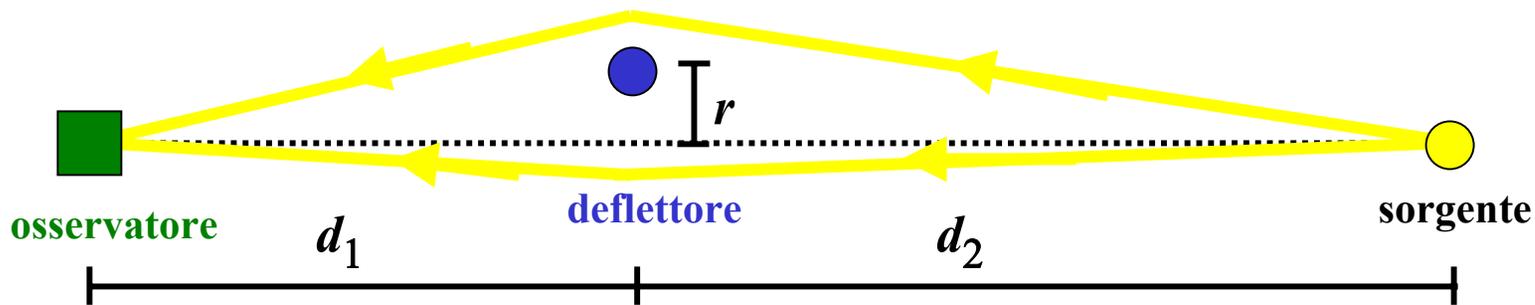


Apparizione di un anello di luce (“anello di Einstein”)

Raggio dell’anello nel piano del deflettore (“raggio di Einstein”):

$$r_E^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$

Caso generale di allineamento imperfetto



Due immagini della sorgente generalmente non risolte (potere risolutivo angolare dei telescopi $\sim 1''$) \Rightarrow somma della luce ricevuta \Rightarrow amplificazione (effetto di lente gravitazionale)

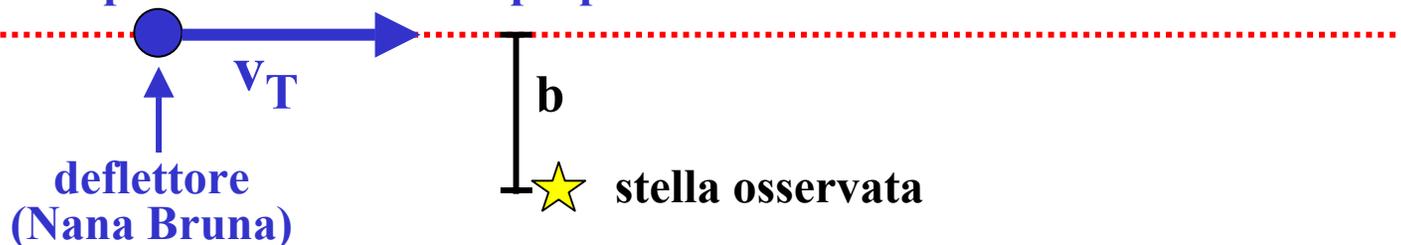
Amplificazione:
$$A = \frac{2 + u^2}{u\sqrt{4 + u^2}} \quad \left(u = \frac{r}{r_E} \right)$$

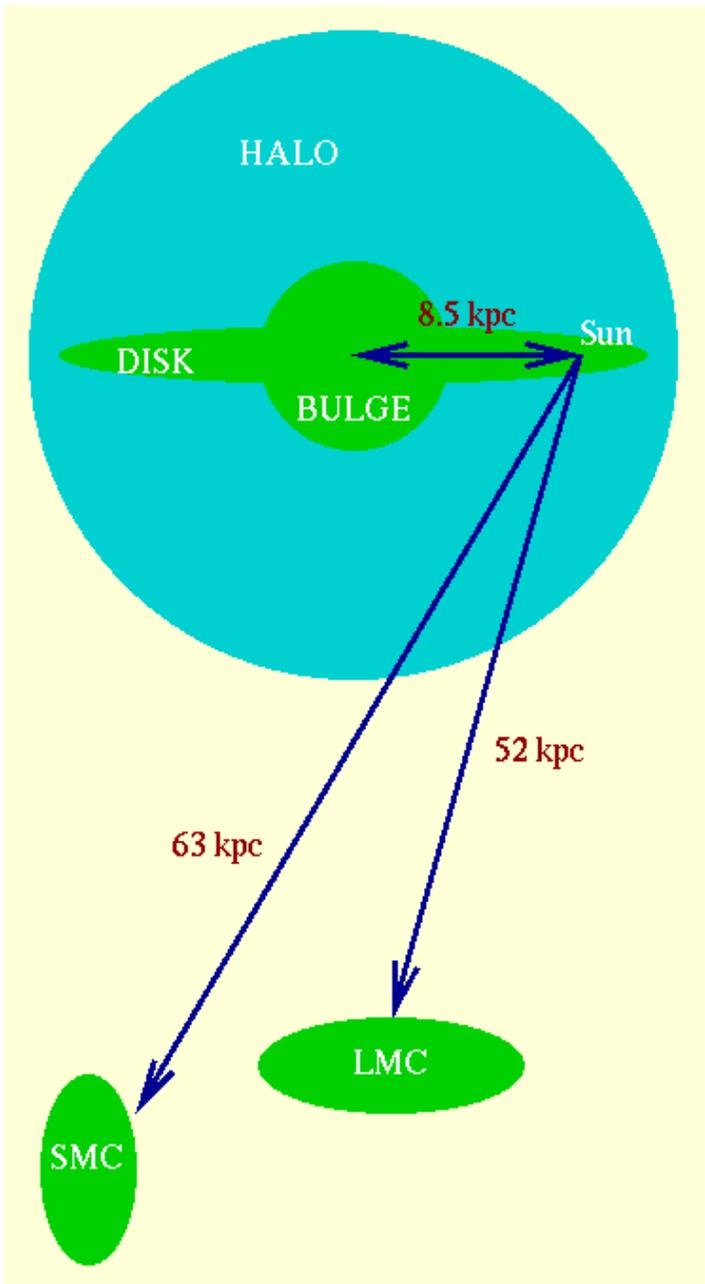
Principio degli esperimenti (B. Paczynski)

Osservazione continua di qualche milione di stelle nelle Nebulose di Magellano (galassie alla periferia della Via Lattea, visibili soltanto dall'emisfero Sud)

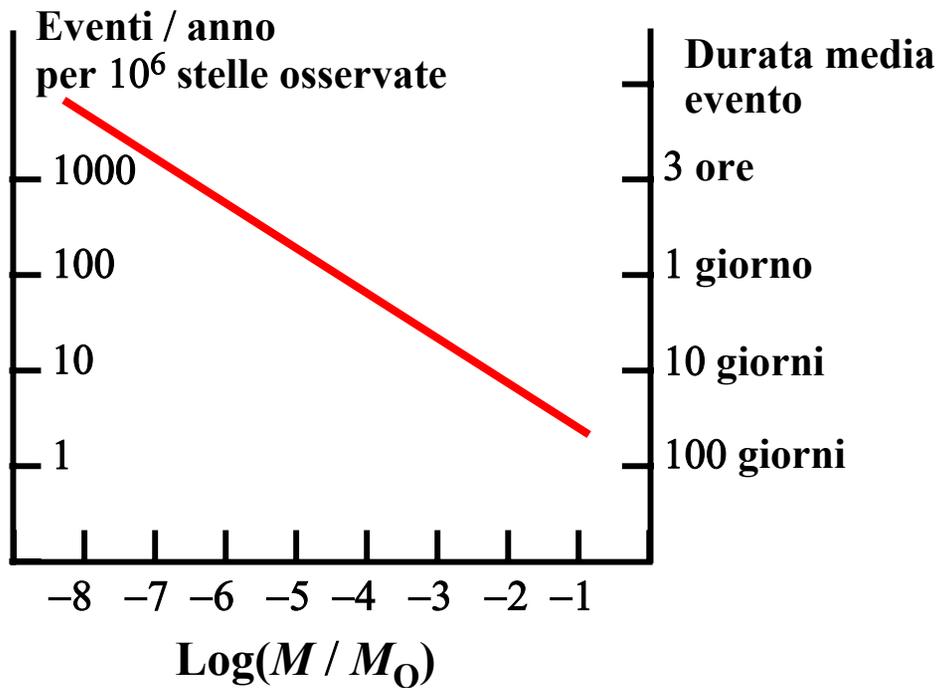
Passaggio di una Nana Bruna vicino alla linea di mira \Rightarrow amplificazione temporanea dell'immagine

Proiezione nel piano del deflettore perpendicolare alla linea di mira:





Densità di materia invisibile e distribuzione in velocità alla periferia della Via Lattea NOTE dalla misura della velocità di rotazione dell'idrogeno atomico in altre galassie ⇒ PREDIZIONE DELLA FREQUENZA DI EVENTI AMPLIFICATI DA EFFETTO DI LENTE GRAVITAZIONALE



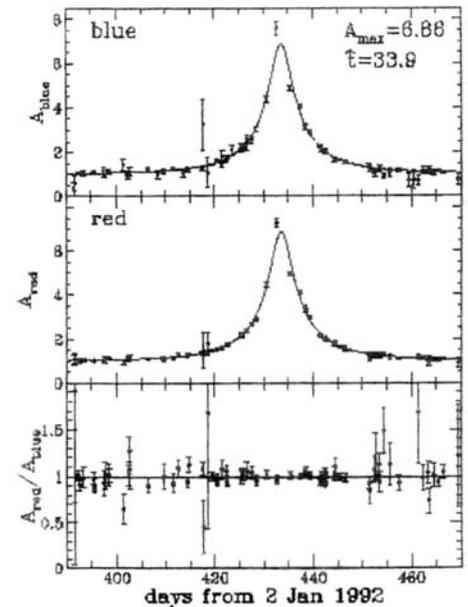
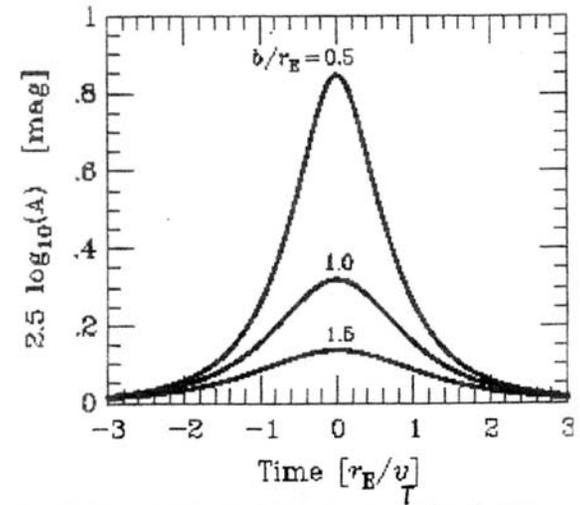
Amplificazione prevista in funzione di b/r_E e di r_E/v_T

Durata media dell'evento $\propto r_E \propto \sqrt{M}$

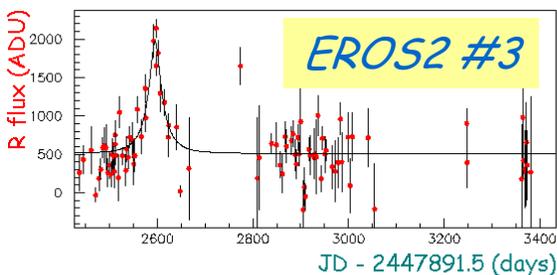
Caratteristiche previste per un evento:

- Unicità (per escludere stelle variabili)
- Simmetria temporale
- Acromaticità

Esempio di un evento osservato nella Grande Nebulosa di Magellano

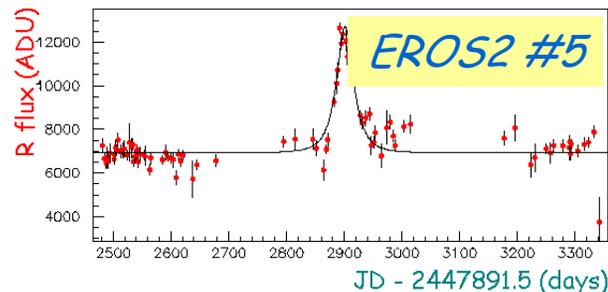
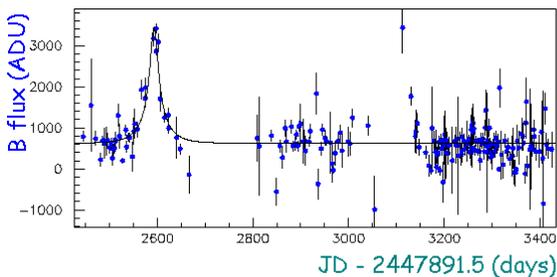


Altri eventi osservati dall'esperimento EROS (gruppo Francese che utilizza l'Osservatorio Europeo ESO nel Cile)



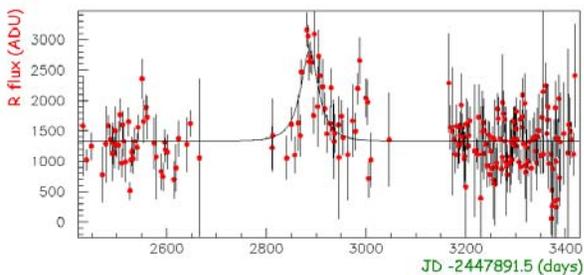
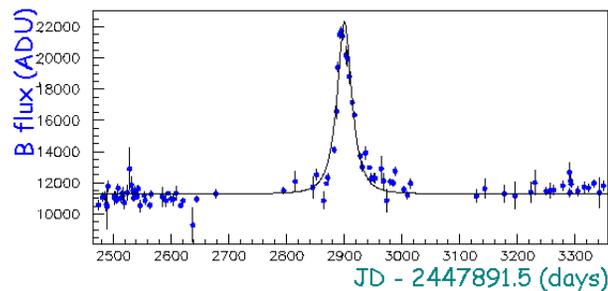
$$u_o = 0.23 \pm 0.01$$

$$t_e = 44 \pm 3 \text{ days}$$



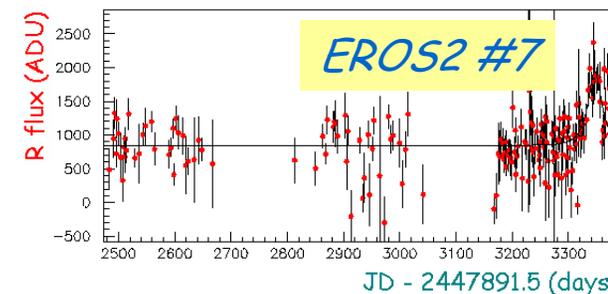
$$u_o = 0.58 \pm 0.01$$

$$t_e = 24 \pm 1 \text{ days}$$



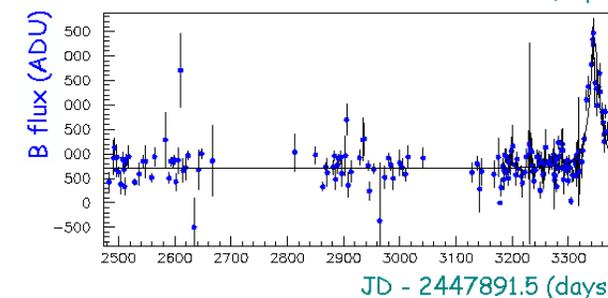
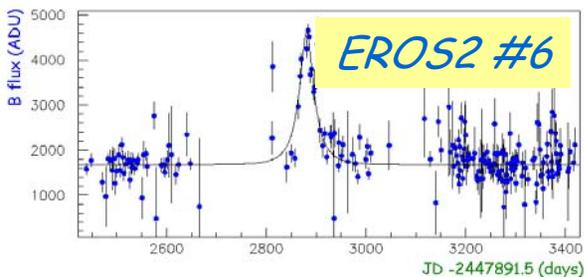
$$u_o = 0.38 \pm 0.01$$

$$t_e = 36 \pm 2 \text{ days}$$



$$u_o = 0.23 \pm 0.01$$

$$t_e = 33 \pm 2 \text{ days}$$



Eventi osservati dagli esperimenti EROS

e MACHO (collaborazione U.S.A. – Australia): 12 eventi, $0.1 < M / M_{\odot} < 0.9$

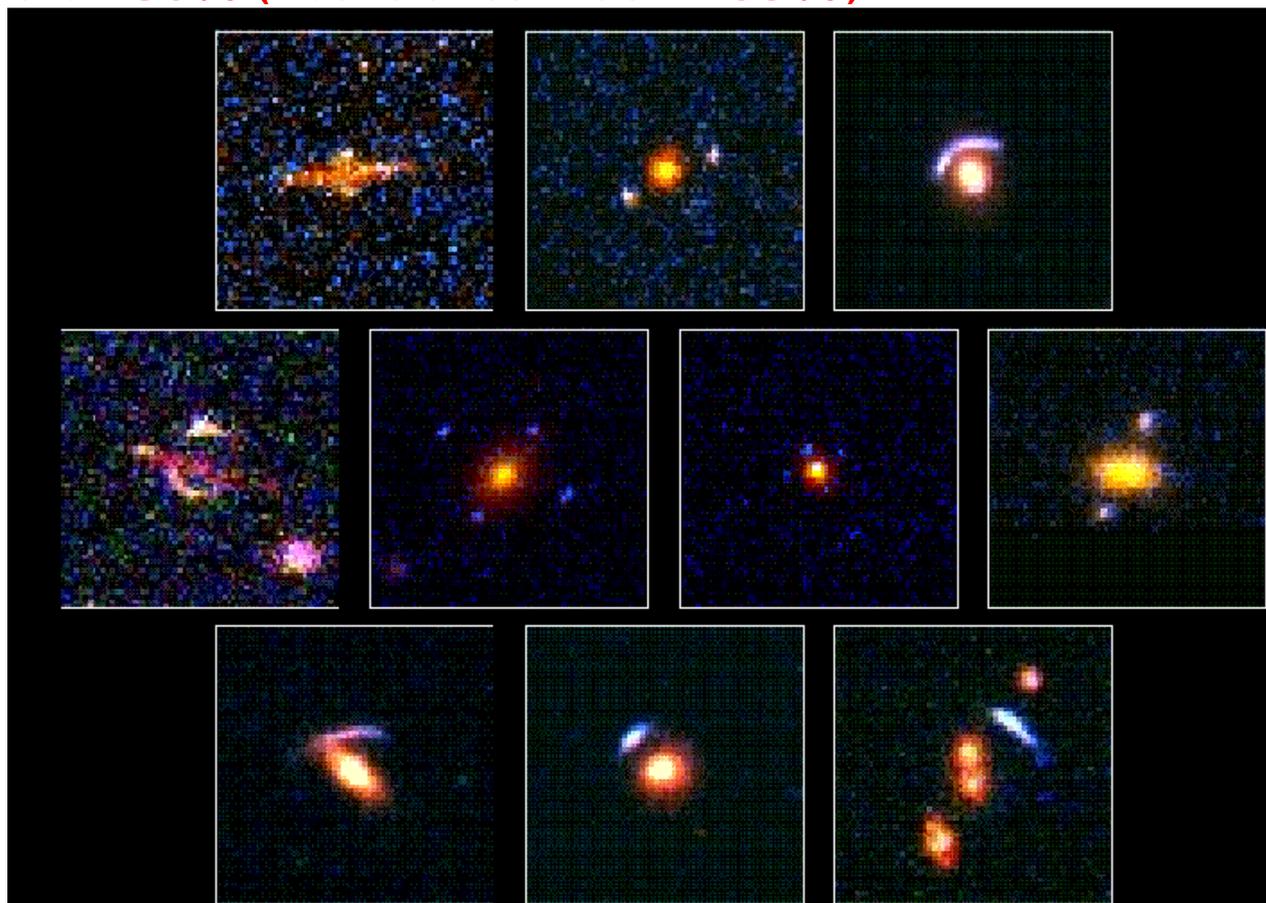
Non è chiaro perchè oggetti così pesanti sono invisibili – forse il deflettore è un'altra stella della galassia osservata (Grande o Piccola Nebulosa di Magellano)

Frazione di materia oscura costituita da Nane Brune con $10^{-6} < M / M_{\odot} < 10^{-2}$ alla periferia della Via Lattea: $< 30\%$ (livello di confidenza 95%)

**Lenti gravitazionali
a grande scala**

**Immagini multiple;
anelli di Einstein
incompleti di galassie
lontane per effetto
gravitazionale di
galassie vicine**

**Sito web interessante:
www.nasa.gov**



Gallery of Gravitational Lenses
Hubble Space Telescope • WFPC2

Composizione dell'Universo: riassunto

$$\Omega_{\text{lum}} = 0.005 - 0.01$$

$$\Omega_{\text{B}} = 0.03 - 0.05$$

$\Omega_{\text{R}}, \Omega_{\text{v}}$: trascurabili (se $m_{\text{v}} < 1 \text{ eV}$)

Materia invisibile (DM):

nelle galassie: $\Omega_{\text{DM}} \approx 0.1$

a più grande scala (Gruppi di Galassie): $\Omega_{\text{DM}} \approx 0.3$

Ricerca di oggetti barionici invisibili alla periferia della nostra galassia (la Via Lattea): $\Omega_{\text{DM}} < 0.03$

Materia Invisibile Non Barionica

SUPERSIMMETRIA (SUSY)

Speculazione teorica degli anni 70 (Wess, Zumino) che assume simmetria tra fermioni e bosoni

PER IL MOMENTO, NESSUNA VERIFICA SPERIMENTALE

	PARTICELLE NOTE	PARTICELLE SUSY
Campi di materia	fermioni (spin $\frac{1}{2}$): leptoni, quarks	bosoni scalari (spin 0)
Quanti dei campi di forze	Bosoni (spin 1): γ , W, Z, g Higgs (spin 0)	fermioni (spin $\frac{1}{2}$)

Interazioni tra particelle SUSY identiche alle interazioni tra le particelle note (costanti di accoppiamento uguali)

SUSY non è una simmetria esatta: masse (SUSY) \gg masse delle particelle note (altrimenti le particelle SUSY sarebbero prodotte e osservate agli acceleratori esistenti)

L'elettrone SUSY (\tilde{e}) è un bosone: gli atomi con \tilde{e} non obbediscono al principio di Pauli

Motivazioni teoriche per SUSY:

- Eleganza matematica (?)
- Convergenza delle correzioni di 2° ordine alla massa dello Higgs

Proprietà delle particelle SUSY (se esistono):

Instabili, vita media molto corta

⇒ se prodotte nel Big Bang, decadimento e scomparsa nei primi istanti dopo il Big Bang

Ipotesi:

- **La particella SUSY più leggera è elettricamente neutra: “neutralino” (χ), partner SUSY dei bosoni intermedi neutri**
- **Le particelle SUSY si distinguono dalle particelle note per un numero quantico (parità R) che si conserva**
 - ⇒ **il neutralino è stabile**
 - ⇒ **il neutralino interagisce debolmente con la materia**

Interazione di fotoni ordinari

Esempio: $\gamma + (A, Z) \rightarrow e^+ + e^- + (A, Z)$

Sezione d'urto ad alte energie grande perchè $M(e^+ e^-) \approx 2m_e$ molto piccola

⇒ il processo $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ richiede un trasferimento di impulso al nucleo piccolissimo

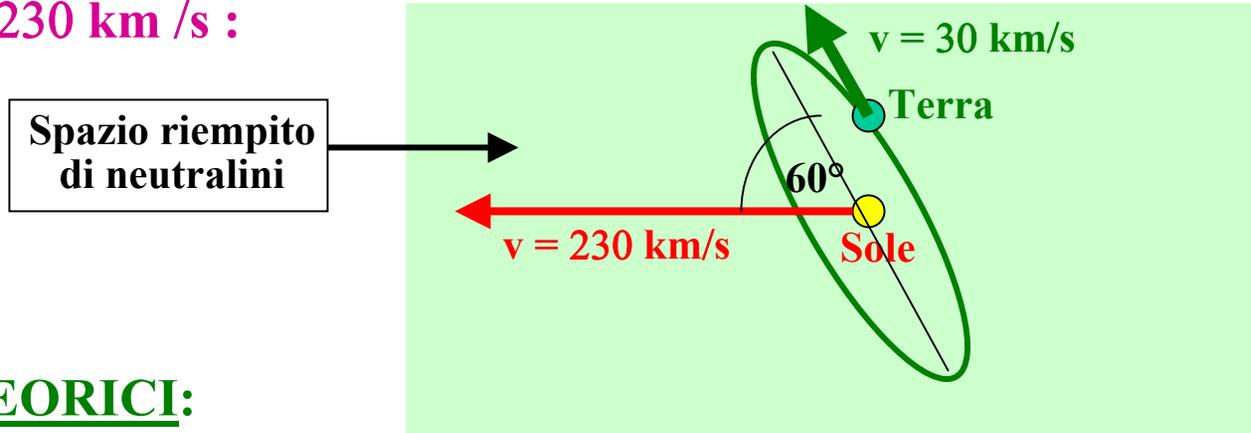
Interazione di fotoni SUSY

$\tilde{\gamma} + (A, Z) \rightarrow \tilde{e}^+ + e^- + (A, Z)$: $M(\tilde{e}^+ e^-)$ molto grande perchè $m(\tilde{e})$ molto grande

⇒ grande trasferimento d'impulso al nucleo ⇒ sezione d'urto molto piccola

Neutralino pesante (se esiste): componente possibile della Materia Invisibile non barionica

Ipotesi: l'alone di materia invisibile delle galassie è costituito di Neutralini;
 le galassie ruotano in uno spazio riempito di Neutralini;
 Il sistema solare ruota intorno al centro della nostra galassia con una
 velocità di ~ 230 km /s :



MODELLI TEORICI:

- Velocità media dei neutralini rispetto al Sole ~ 230 km /s;
- Distribuzione maxwelliana intorno al valor medio con $\sigma^2 = 3\langle v \rangle^2 / 2$ troncata alla velocità di fuga dalla Via Lattea (~ 500 km /s)

Rivelazione del neutralino per diffusione elastica coerente sui nuclei contenuti in un rivelatore a basso rumore di fondo:



Misura dell'energia cinetica E_R del nucleo finale:

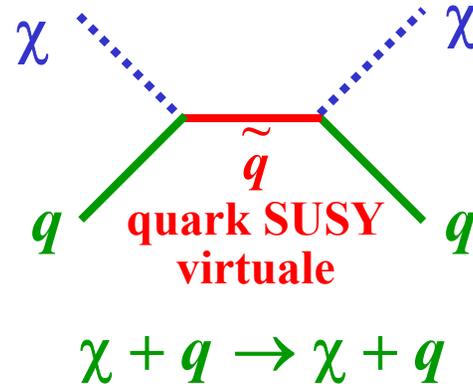
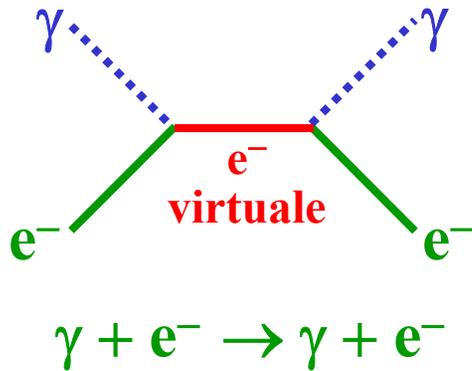
$$E_R = \frac{2m^2 v^2}{M_A} \cos^2 \theta$$

v : velocità neutralino; $m = m_\chi M_A / (m_\chi + M_A)$;
 θ : angolo di emissione del nucleo finale

Sezioni d'urto molto piccole (dell'ordine delle sezioni d'urto per interazione debole)

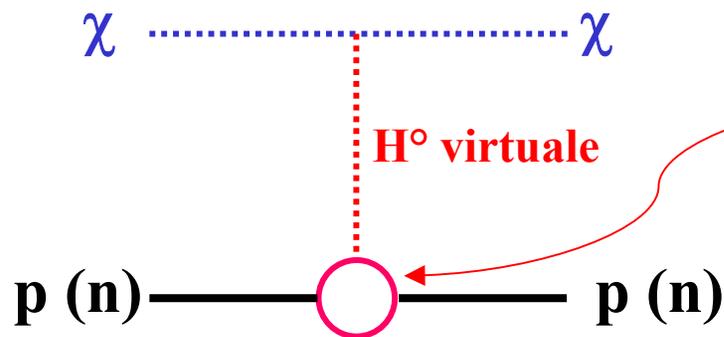
Scattering neutralino - nucleo

Diagrammi analogo ai diagrammi di diffusione Compton:



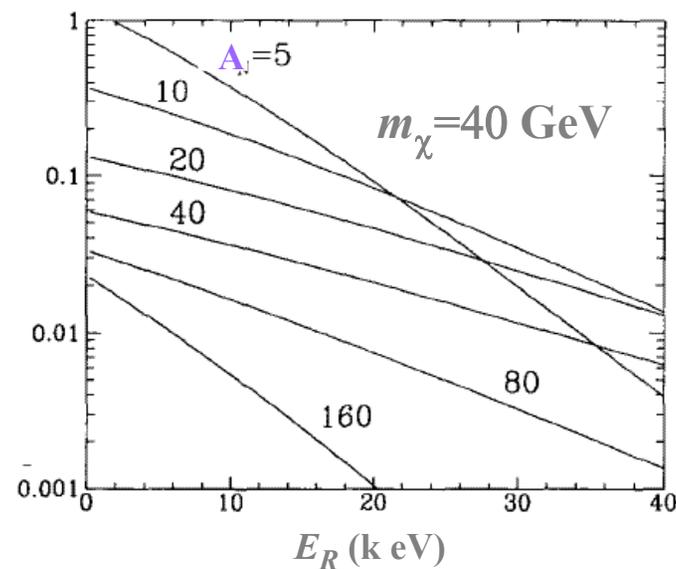
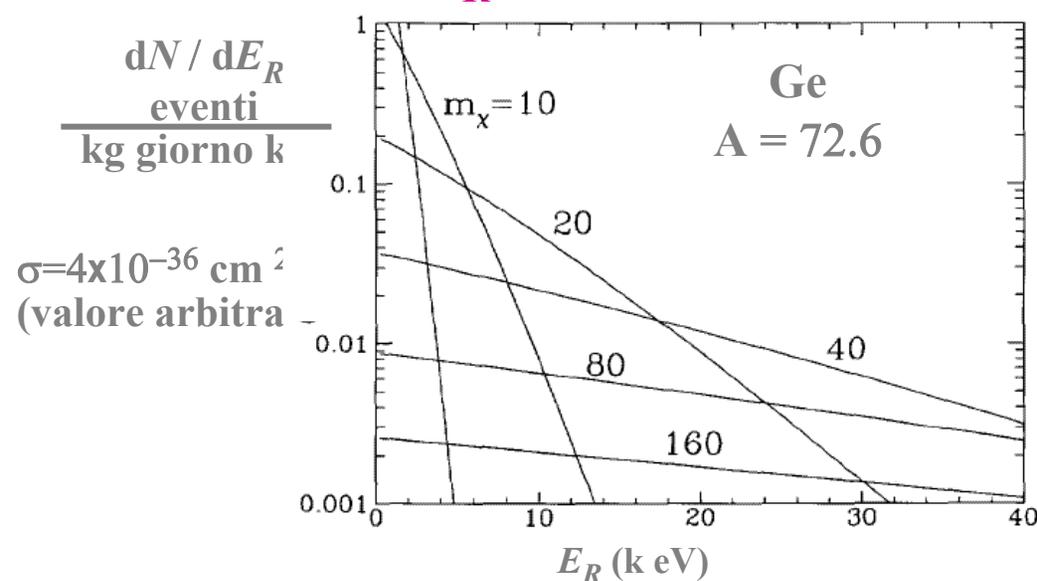
$\chi + \text{nucleo} \rightarrow \chi + \text{nucleo}$: somma delle ampiezze di diffusione su tutti i quarks nel nucleo

Un altro diagramma importante: scambio di un bosone scalare di Higgs con i nucleoni



Accoppiamento effettivo Higgs – nucleone attraverso accoppiamento Higgs – gluone indotto da “loops” di quarks pesanti. Vedi L.B. Okun’, Leptons and Quarks (capitolo “Higgs charge of the nucleon”)

Distribuzioni di E_R previste



(una particella relativistica deposita tipicamente $\sim 4.8 \text{ MeV/cm}$ in un cristallo di NaI)

➔ **Esperimenti basati su conteggi singoli associati con poca energia depositata in rivelatori di grande massa**

Modulazione stagionale del segnale dalla modulazione stagionale della velocità media relativa neutralino – Terra dovuta all'inclinazione del piano dell'orbita terrestre intorno al Sole rispetto al piano della galassia (60°)

Modulazione prevista:

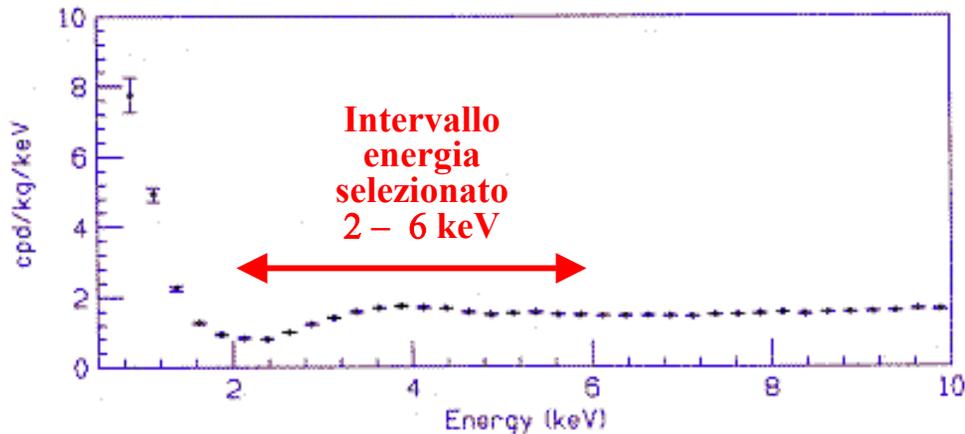
$$S(E_R, t) = S_0(E_R) + S_{\text{mod}}(E_R) \cos \left[\frac{2\pi}{365} (t - 153 \text{ giorni}) \right]$$

↑
massimo del segnale previsto il 2 giugno

(t in giorni)

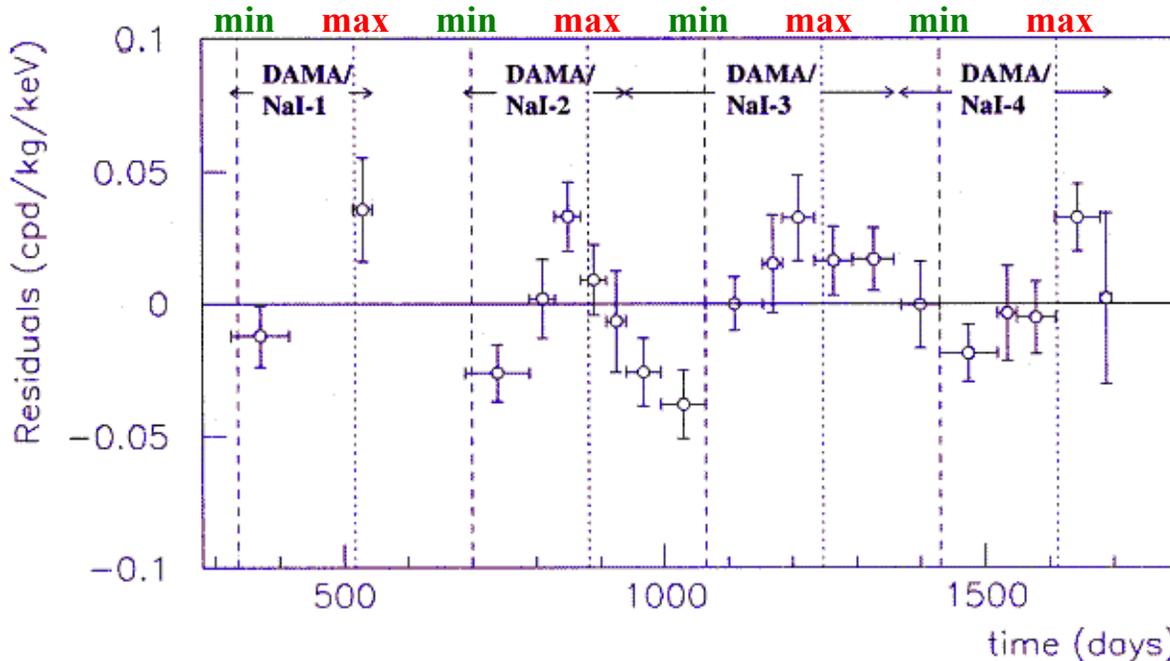
Esperimento DAMA (ai Laboratori del Gran Sasso)

9 cristalli di NaI ultra-puro: massa totale ~ 100 kg



Spettro di energie depositate in eventi “singoli” (segnale in un solo cristallo)

Energia depositata $E \rightarrow$ ampiezza segnale diversa per elettroni, nuclei Na e nuclei I:
segnale elettroni = 1 (calibrazione)
segnale nuclei Na = 0.30 } “quenching factor”
segnale nuclei I = 0.09



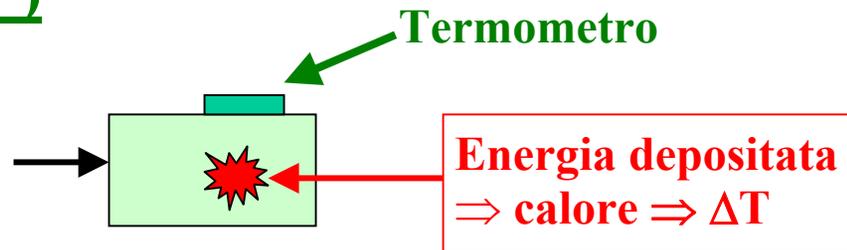
Presenza di modulazione stagionale nei dati (~2% del numero di eventi); evidenza statistica $\sim 4 \sigma$

Risultato compatibile con $m_\chi \approx 30 - 100 \text{ GeV}$, $\sigma_\chi \approx (10^{-6} - 10^{-5}) \times 10^{-36} \text{ cm}^2$

Rivelatori Criogenici (“Bolometri”)

Principio di funzionamento:

Cristallo (Ge, TeO₂, Al₂O₃, CaWO₄, ...) raffreddato a $12 \times 10^{-3} \text{ °K} = 12 \text{ mK}$



Esempio: cristallo di TeO₂

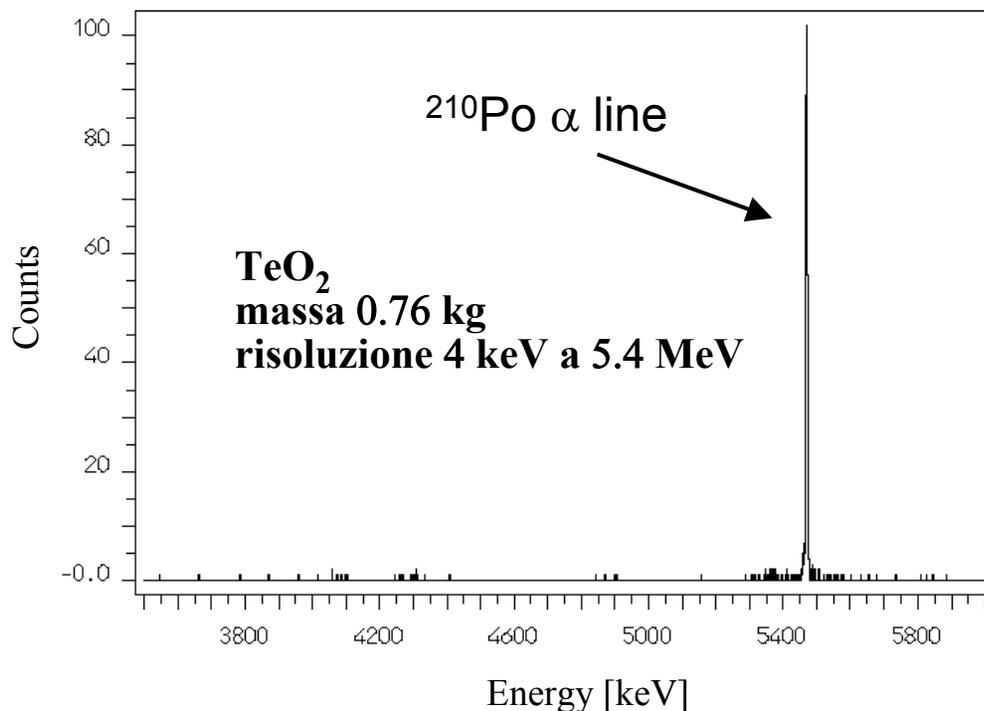
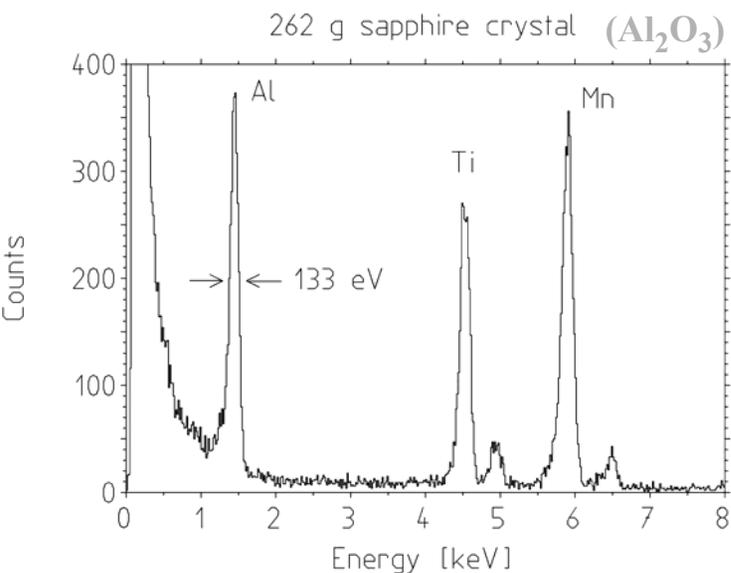
Calore specifico: $C = \delta Q / dT \approx 1 \text{ MeV} / 0.1 \text{ mK}$ ($C \rightarrow 0$ per $T \rightarrow 0$)

Termometro: termistore al Ge, $R = 100 \text{ M}\Omega$, $dR/dT \approx 100 \text{ k}\Omega / \mu\text{K}$

Energia depositata $E = 1 \text{ MeV} \rightarrow \Delta T = 100 \mu\text{K} \rightarrow \Delta R = 10 \text{ M}\Omega$

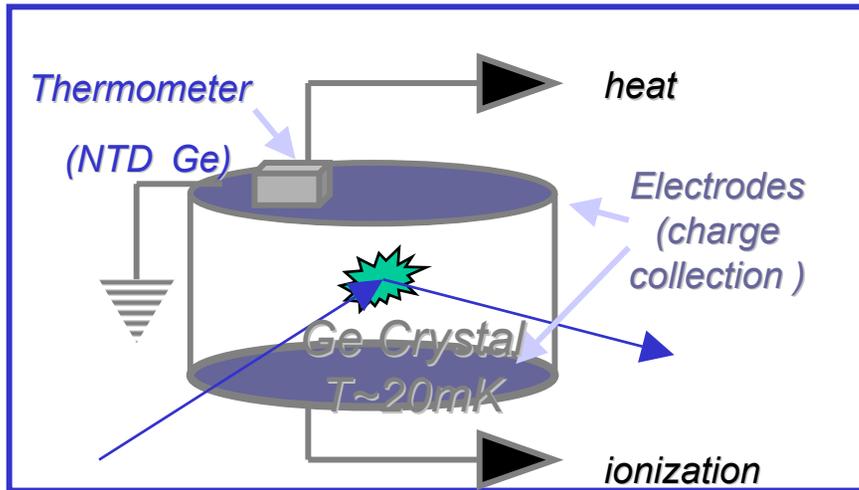
Tempo di risposta: qualche millisecondo

Risoluzione in energia:



ΔT dipende solo da E e non dal tipo di particella (quenching factor = 1)

Bolometri a Germanio: misura simultanea di ΔT e della ionizzazione



ΔT : quenching factor (QF) = 1

Ionizzazione:

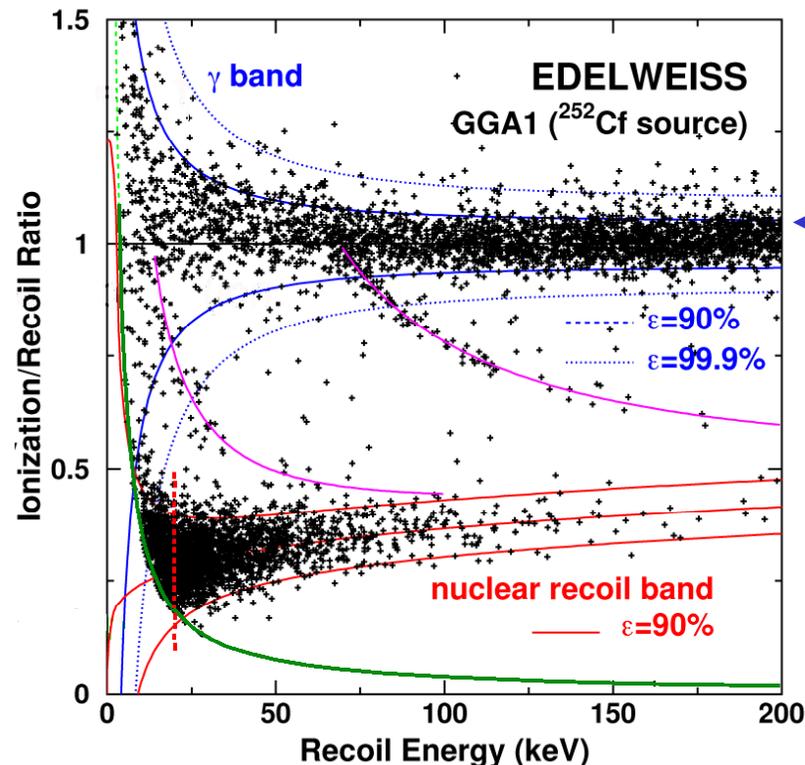
QF = 1 per e, γ

QF \approx 0.3 per nuclei Ge

\Rightarrow Riduzione del fondo e, γ
nella ricerca di neutralini

Esperimento EDELWEISS:

Bolometri a Ge nel Laboratorio Sotterraneo del Fréjus



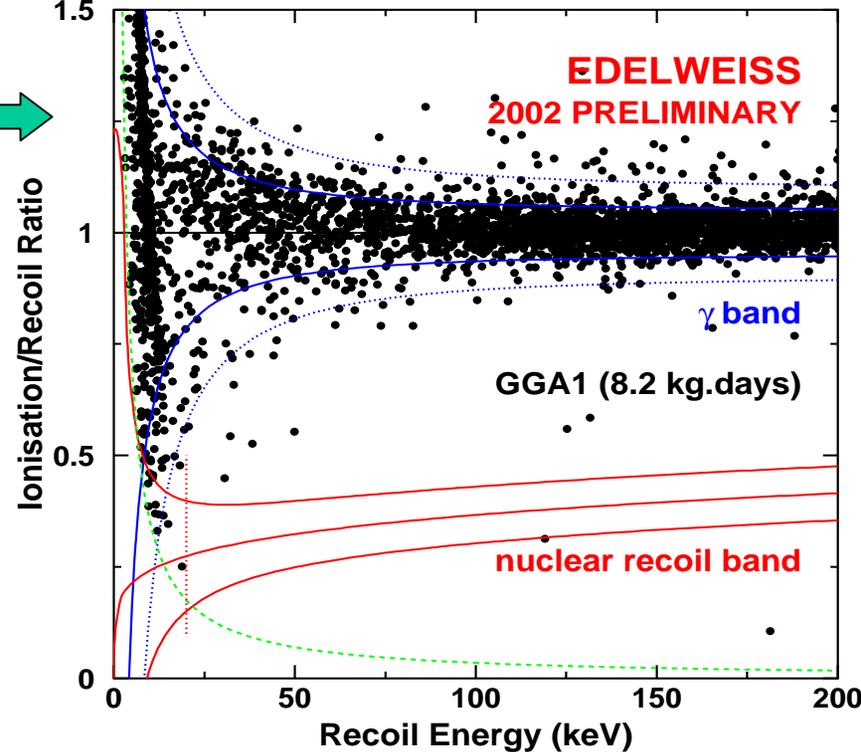
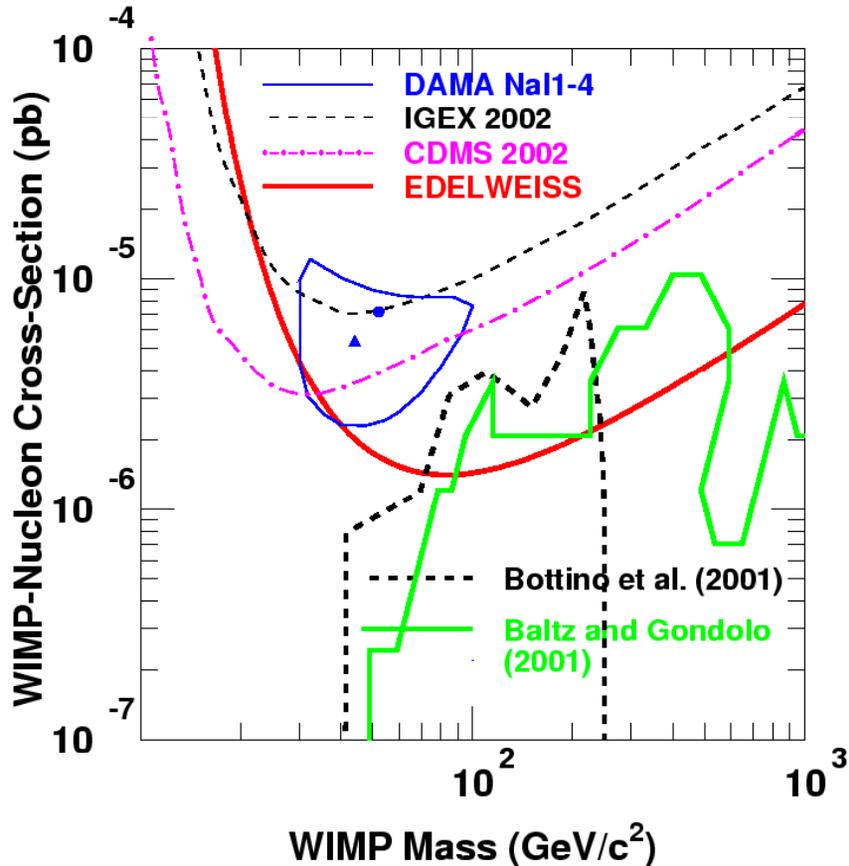
\leftarrow Esposizione a raggi γ

\leftarrow Esposizione a neutroni: $n + \text{Ge} \rightarrow n + \text{Ge}$
(segnale simile al segnale $\chi + \text{Ge} \rightarrow \chi + \text{Ge}$)

EDELWEISS: ricerca di neutralini

Nessun evento con $E_R > 20$ keV osservato
nella regione prevista per $\chi + \text{Ge} \rightarrow \chi + \text{Ge}$

⇒ regione esclusa nel piano m_χ, σ_χ
risultato DAMA non confermato



Progetti futuri (entro qualche anno):

- Esperimenti con rivelatori bolometrici di grande massa (>100 kg)
- Sviluppo di tecniche complementari con separazione γ / particelle pesanti

WIMP (Weakly Interacting Massive Particle):
una denominazione più generale per i costituenti
della materia invisibile, indipendente da SUSY

Argomento “matematico” in favore di un Universo critico

Equazione di Einstein – Friedmann: $H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho_c \Omega - \frac{k}{a^2}$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \Rightarrow \quad H^2 = H^2 \Omega - \frac{k}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} = \frac{k}{\dot{a}^2}}$$

Oggi $\Omega \equiv \Omega_0 \approx 0.3 \Rightarrow k < 0$ UNIVERSO APERTO

Prevalenza di materia per $t > 3 \times 10^4$ anni: $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ ($t_0 \approx 10^{10}$ anni)

Oggi: $\Omega_0 - 1 \approx -0.7$; per un tempo t generico $|\Omega - 1| = |\Omega_0 - 1| \cdot (t/t_0)^{2/3}$

$t \approx 3 \times 10^5$ anni (formazione di atomi): $|\Omega - 1| = 7 \times 10^{-4}$

$t \equiv t_E \approx 3 \times 10^4$ anni ($\rho_M = \rho_R$): $|\Omega - 1| = 1.5 \times 10^{-4}$

Prevalenza di radiazione per $t < t_E \approx 3 \times 10^4$ anni: $a(t) = (t/t_0)^{1/2}$

$t \equiv t_N \approx 100$ secondi (Nucleosintesi): $|\Omega - 1| = |\Omega_E - 1| \cdot (t_N/t_E)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-14}$

**$\Rightarrow \Omega \approx 1$ nell'Universo primordiale: indizio di $\Omega = 1$ sempre.
 $\Omega = 1 \Rightarrow k = 0$**

Costante Cosmologica

Un metodo per rendere l'Universo critico ($k = 0$) se $\Omega < 1$

Equazione di Einstein – Friedmann modificata:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi}{3} G\rho_c \Omega_M - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (\Omega_M = \rho_M / \rho_c)$$

Λ : costante cosmologica

introdotta da Einstein (1917) per descrivere un Universo immobile e di dimensioni finite – abbandonata dopo la scoperta dell'espansione dell'Universo

Significato fisico di Λ : densità di energia del vuoto

Dividendo per H^2 ($\rho_c = 3H^2 / 8\pi G$): $1 = \Omega_M - \frac{k}{a^2 H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2}$

Definizione: $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$



$$\Omega_M + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}$$

Per $\Lambda > 0$ $k=0$ (Universo critico) è possibile anche nel caso $\Omega_M < 1$

Metodo per misurare Ω_Λ

Equazione dell'accelerazione in presenza di $\Lambda \neq 0$ ($\rho_M \gg \rho_R, p = 0$):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_M + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi}{3} G \Omega_M \rho_c + \Omega_\Lambda H^2 = -H^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_M - \Omega_\Lambda \right)$$

 **Misura dell'accelerazione / decelerazione dell'espansione dell'Universo:**

se $\Omega_\Lambda > \frac{1}{2} \Omega_M, \ddot{a} / a > 0$: ESPANSIONE ACCELERATA

**OSSERVAZIONE DI UN'ESPANSIONE ACCELERATA:
EVIDENZA DI UNA COSTANTE COSMOLOGICA $\Lambda > 0$**

Sviluppo in serie del fattore di scala $a(t)$:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

Dividendo per $a(t_0) \equiv a_0$:

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}_0}{a_0} (t - t_0)^2 + \dots$$

Definizione: Parametro di decelerazione

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} = \frac{1}{2} \Omega_M^0 - \Omega_\Lambda^0$$

 $\frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots$

Misura simultanea di due variabili: 1) $(t - t_0)$; 2) $\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1 + z}$

($1 + z = \lambda$ ricevuta / λ emessa = a_r / a_e)

Deviazione dalla linearità  determinazione di q_0

$q_0 < 0$: espansione accelerata

$q_0 > 0$: espansione frenata

Misure cosmologiche con Supernovae

Esperimenti per verificare se l'espansione dell'Universo è accelerata o decelerata

Metodo: osservazione di oggetti luminosi di luminosità NOTA situati a grandi distanze

- **MISURA DELLO SPOSTAMENTO VERSO IL ROSSO**: misura dell'espansione relativa dell'Universo: $1 + z = a_0 / a$
- **MISURA DELLA QUANTITÀ DI LUCE RICEVUTA PER UNITÀ DI TEMPO** (“MAGNITUDINE”): misura della distanza dell'oggetto all'istante dell'emissione: $\text{Luce ricevuta} = \text{Luminosità} / [4\pi c^2(t_0 - t)^2]$
⇒ misura di $(t_0 - t)$ se la luminosità è nota.

Oggetti luminosi di luminosità nota: Supernovae di tipo Ia (SN-Ia) (le più luminose tra tutti i tipi di Supernovae (per un fattore ~6))

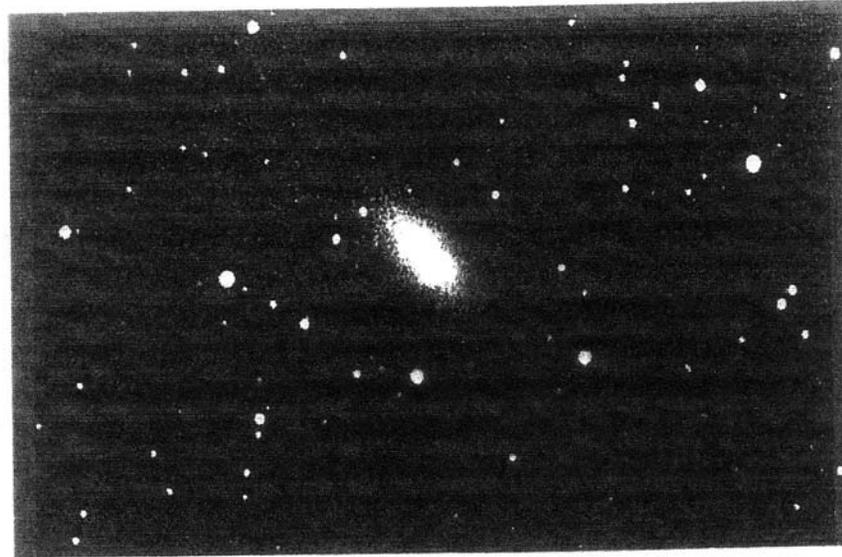
SN-Ia: stelle di grande densità (Nane Bianche) in sistemi binari, che assorbono materia dalla stella vicina ⇒ **collasso gravitazionale** ⇒ **esplosione termonucleare**
⇒ **luminosità massima molto maggiore della luminosità totale della Galassia di residenza**

Relazione tra Luminosità massima e distribuzione temporale della luce stabilita empiricamente per SN-Ia vicine ($z < 0.1$ ⇒ effetto di q_0 trascurabile)

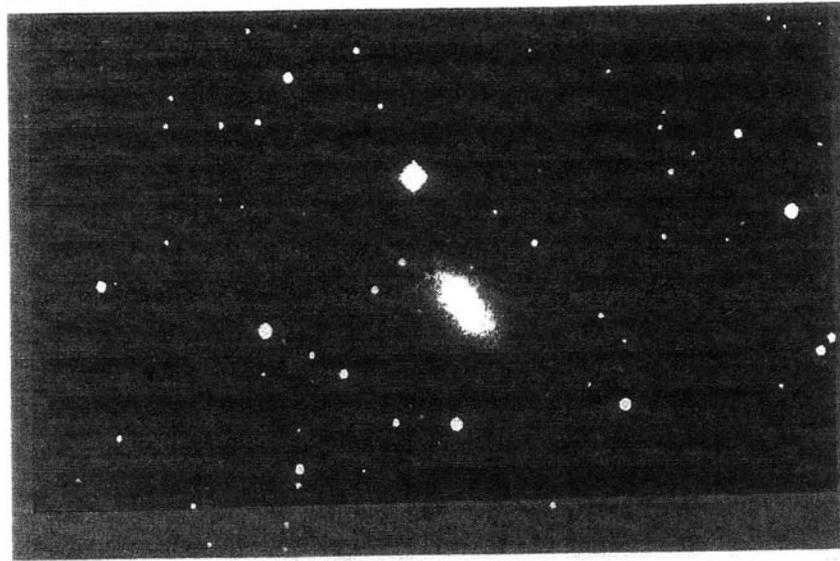
Problema sperimentale: in media, 2 SN-Ia / millennio per galassia ⇒ necessità di osservare simultaneamente $> 10^4$ galassie

SN-Ia NGC 5253

5 giugno 1959



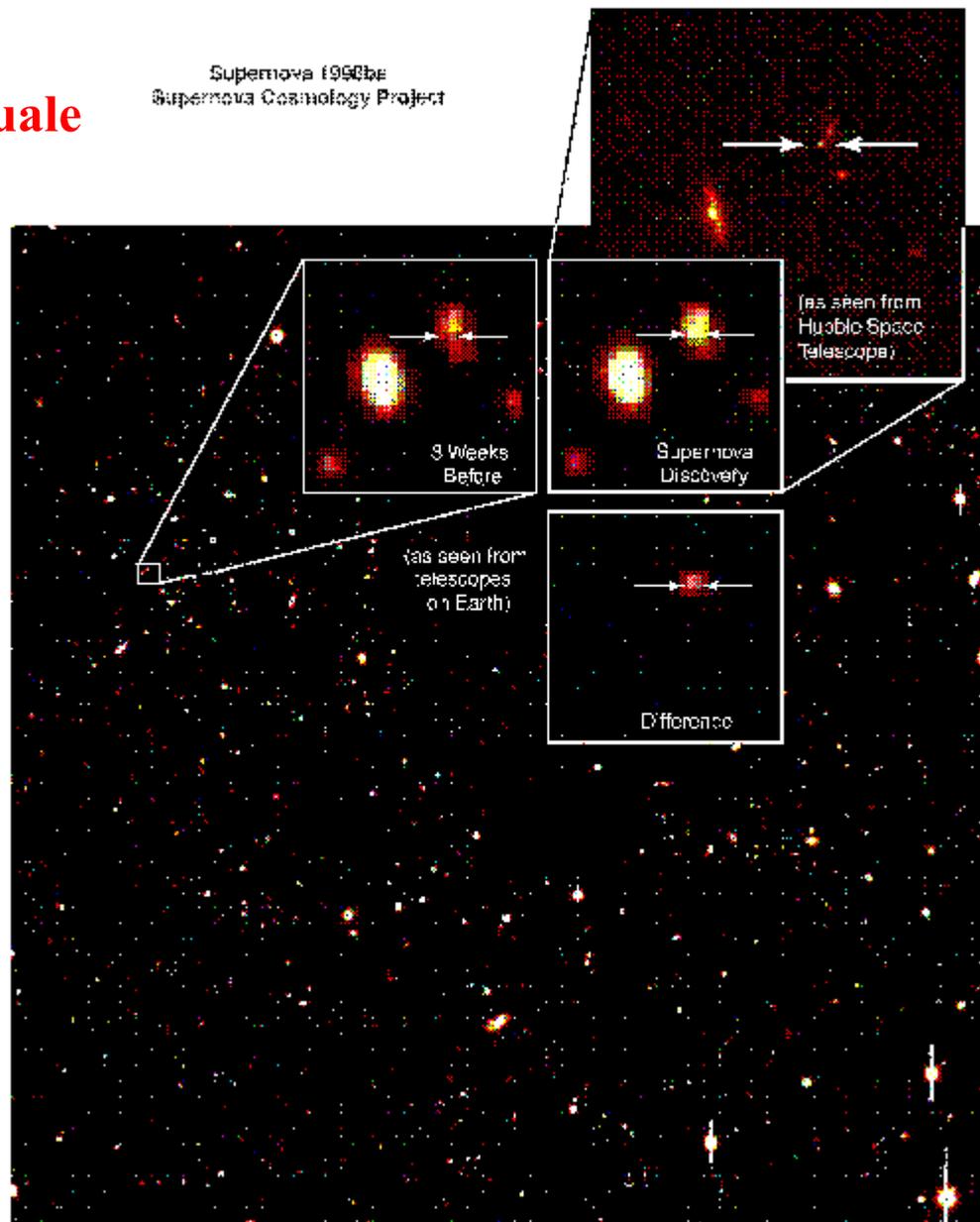
17 maggio 1972



Osservazione di un'ampia regione di cielo apparentemente poco popolato (tempo di misura: qualche ora)

Ripetizione della misura tre settimane
più tardi – confronto – scoperta eventuale
di SN-Ia

Misure fotometriche e spettroscopiche
della SN-Ia scoperta per una frazione
importante della durata \Rightarrow red shift.
Misura della distribuzione temporale
della luce \Rightarrow luminosità massima



Relazione empirica Luminosità – durata per SN-Ia vicine

Log(Luminosità)



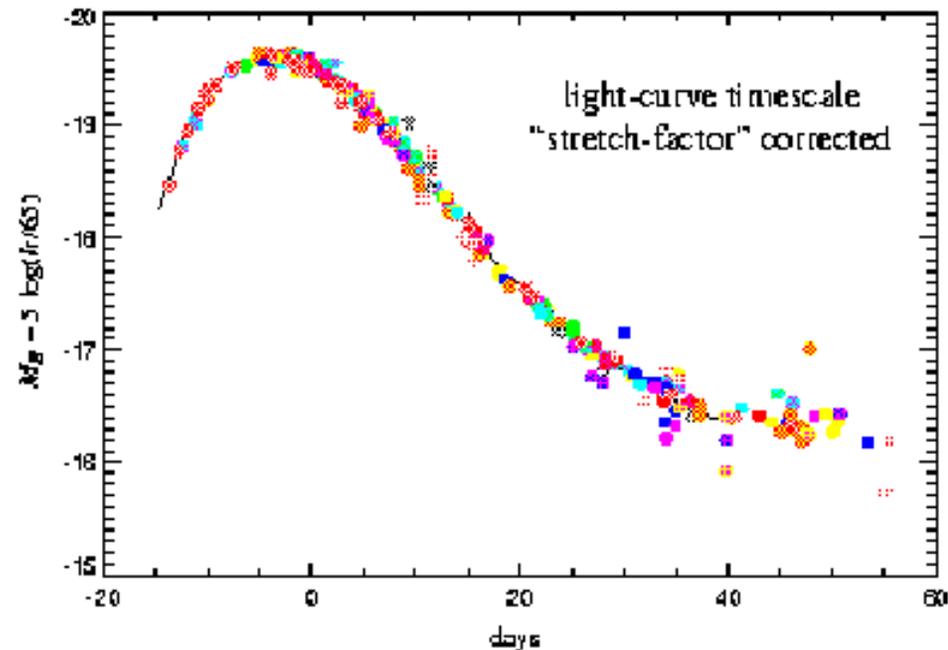
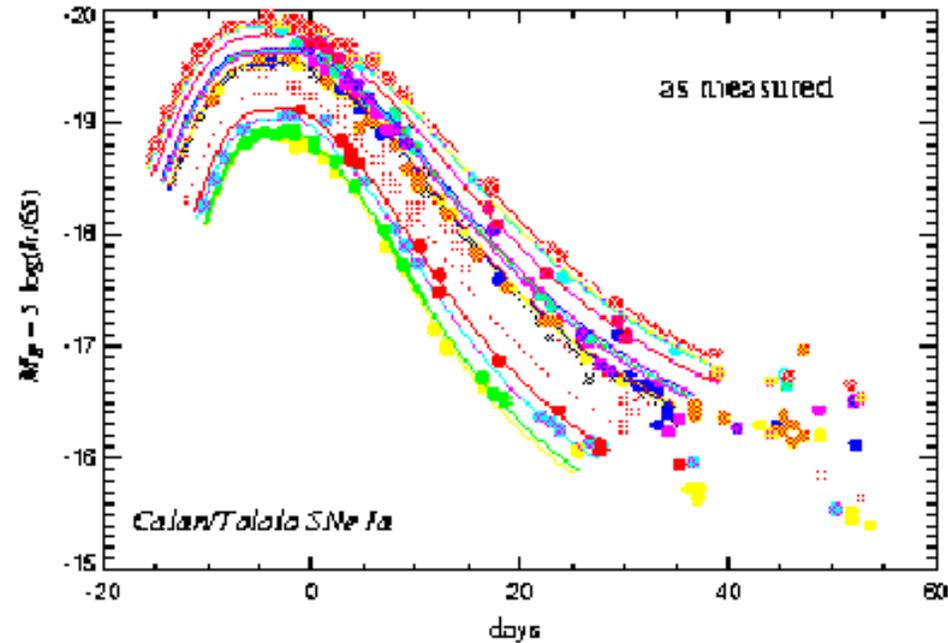
Tempo tipico per raggiungere L_{\max}
~3 settimane

Luminosità corretta per la durata:

$$L = L(s \cdot t, s \cdot L_{\max})$$

t : tempo reale

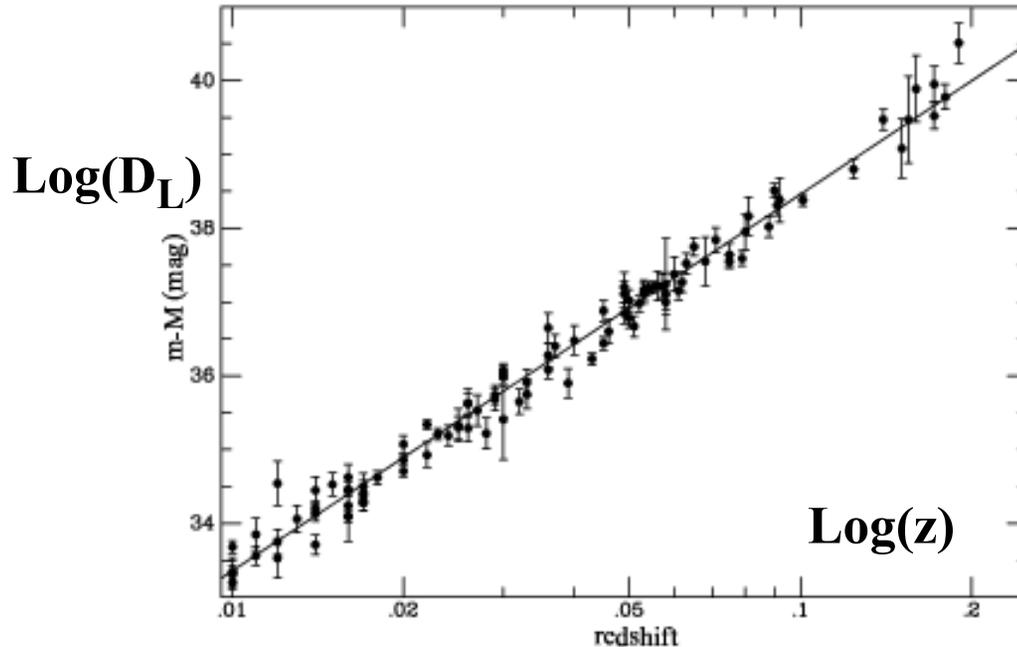
s : fattore determinato empiricamente
per rendere la curva “universale”



SN-Ia vicine ($z < 0.1$)

Verifica del metodo (effetto di q_0 trascurabile)

$$c(t_0 - t) \equiv D_L = \frac{c}{H_0} \left(z + z^2 \frac{1 - q_0}{2} \right) \quad \text{“distanza luminosa”}$$



Qualche valore numerico interessante per $z = 1$:

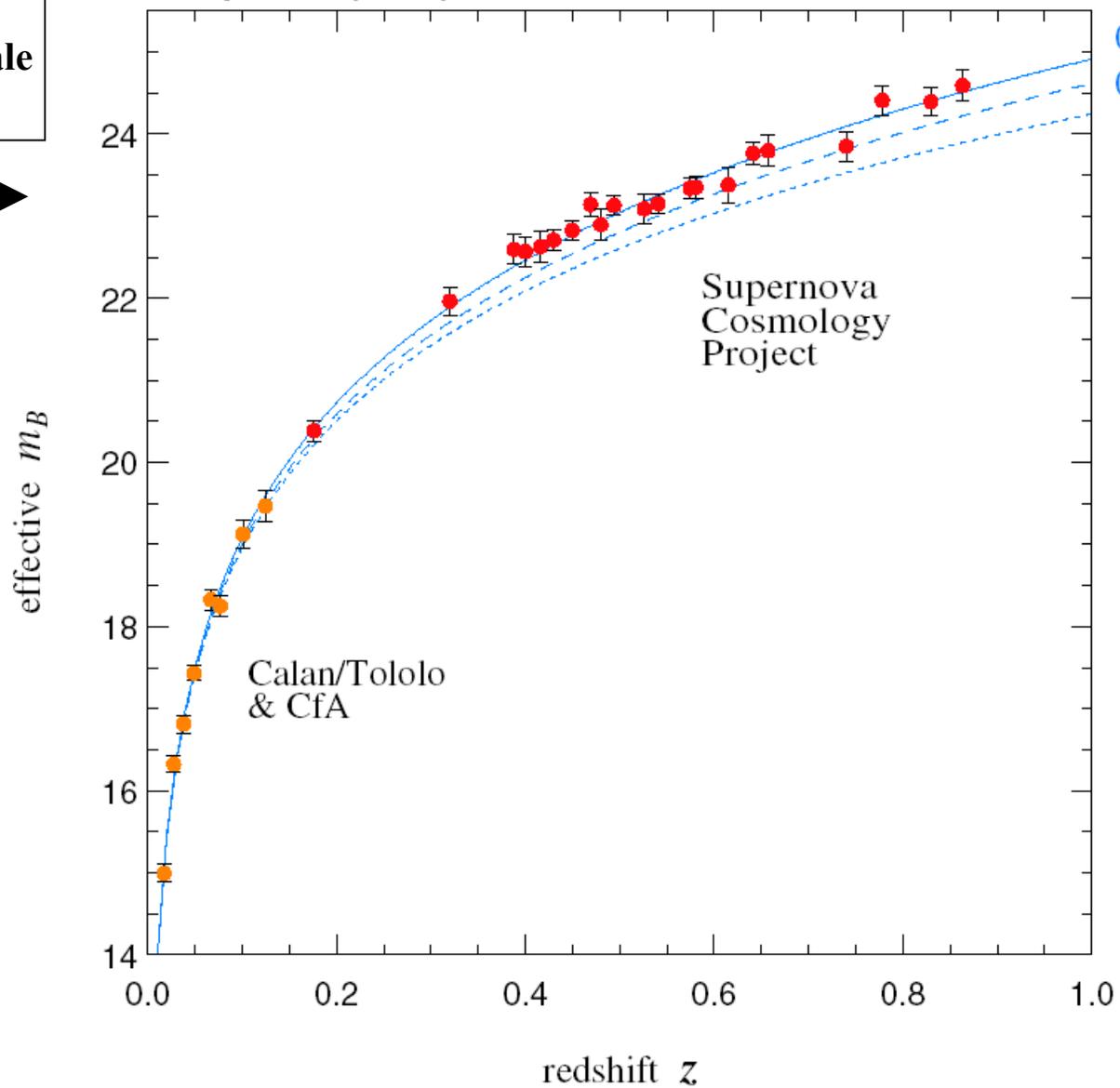
$$\frac{\lambda \text{ ricevuta}}{\lambda \text{ emessa}} = 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2/3} = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t_0}{2^{3/2}} \approx 0.35t_0$$

$$t_0 \approx 10^{10} \text{ anni} \Rightarrow c(t_0 - t) \approx 6.5 \times 10^9 \text{ anni-luce}$$

Supernova Cosmology Project
Knop et al. (2003)

Ω_M, Ω_Λ
0.25, 0.75
0.25, 0
1, 0

scala
proporzionale
a $\text{Log}(D_L)$



Regioni del piano Ω_M, Ω_Λ
compatibili con le misure
di SN-Ia lontane

Best fit:

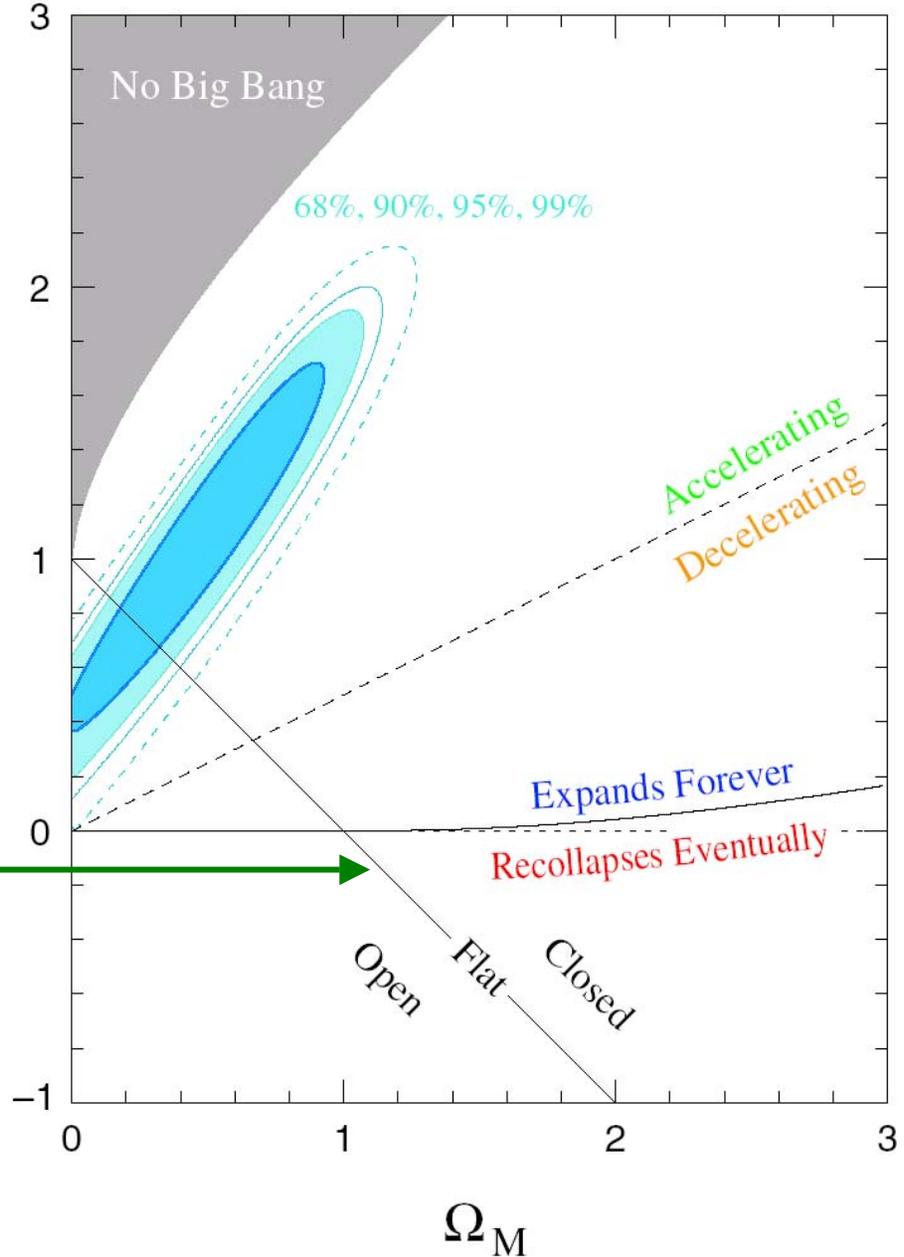
$$0.8\Omega_M - 0.6\Omega_\Lambda = -0.16 \pm 0.05$$

$$\Omega_M \approx 0.3 \Rightarrow \Omega_\Lambda \approx 0.67$$

$$\frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda < 0$$

Espansione accelerata

$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$
 $k = 0$
Universo critico



Il problema dell'orizzonte

Fondo Elettromagnetico (radiazione di Corpo Nero, $T = 2.73 \text{ }^\circ\text{K}$): la radiazione disaccoppiata dalla materia al tempo t_D della formazione degli atomi

$$t_D \approx 3 \times 10^5 \text{ anni} ; \quad T_D \approx 3000 \text{ }^\circ\text{K}$$

Radiazione isotropa entro 1 parte in 10^5

Due fotoni ricevuti simultaneamente da direzioni opposte:



Distanza percorsa $AO = BO = c (t_0 - t_D)$; $t_0 \approx 10^{10}$ anni $\Rightarrow AO = BO = 10^{10}$ anni-luce

Distanza AB oggi $\equiv (AB)_0 = 2 \times 10^{10}$ anni-luce

Distanza AB al tempo t_D : $(AB)_D = (AB)_0 [a(t_D) / a_0] = (AB)_0 (T_0 / T_D) \approx 10^{-3} (AB)_0$

$\Rightarrow (AB)_D \approx 2 \times 10^7$ anni-luce

Dimensione di una regione di Universo connessa causalmente al tempo t_D :

$$c t_D \approx 3 \times 10^5 \text{ anni-luce}$$

**ENIGMA: Isotropia della radiazione \Rightarrow equilibrio termico;
Equilibrio termico tra due regioni di Universo separate da una
distanza $> ct$ IMPOSSIBILE**

Orizzonte cosmologico: dimensione delle regioni di Universo connesse causalmente al tempo t ($=ct$)

**Proposta teorica per risolvere il problema dell'orizzonte (A. Guth 1981):
Espansione fortemente accelerata ("INFLAZIONE") nei primissimi istanti
dopo il Big Bang ($t \sim 10^{-40} - 10^{-30}$ s)**

Ipotesi

Nei primissimi istanti dopo il Big Bang l'Universo è dominato da una costante cosmologica Λ molto grande (densità di energia del vuoto molto grande):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \underbrace{\frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}}_{\text{termini trascurabili}} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

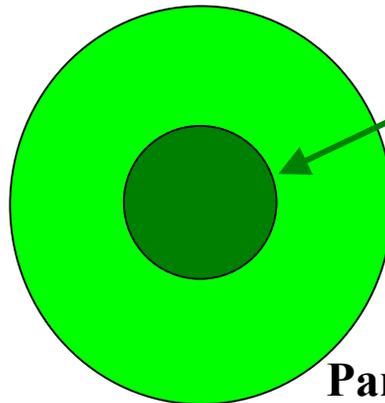


$$a(t) \propto e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$$

**AUMENTO ESPONENZIALE
DEL FATTORE DI SCALA**

**IL NOSTRO ORIZZONTE
OGGI**

INFLAZIONE



**Fine dell'inflazione:
La densità di energia del vuoto
associata con la costante cosmologica
si è trasformata in radiazione
convenzionale (γ , particelle elementari)**

**Piccola regione
d'Universo in
equilibrio termico**

**Parametri di un tipico modello "inflazionistico":
 $t_i \approx 10^{-36}$ s ; $t_f \approx 10^{-34}$ s ; $a(t_f) / a(t_i) \approx 10^{43}$**

Formazione di galassie

presumibilmente associata con variazioni locali di densità, amplificate da effetto gravitazionale

Origine delle variazioni locali (ipotesi): piccole variazioni di densità nell'Universo primordiale presenti prima della formazione di atomi ($t \approx 3 \times 10^5$ anni, $T \approx 3000$ °K) (forse prodotte da fluttuazioni quantistiche durante l'Inflazione)

Ipotesi verificabile dallo studio dell'anisotropia del fondo elettromagnetico (anisotropia $\approx 10^{-5}$)

L'Universo prima della formazione di atomi: plasma di e^- , γ , nuclei leggeri (75% H, 25% He)

Presenza di un massimo locale di densità nel plasma \Rightarrow attrazione gravitazionale di altra materia \Rightarrow aumento di pressione e temperatura locale \Rightarrow formazione di oscillazioni nel plasma (simili a onde acustiche in un fluido)

Lunghezza d'onda massima \approx dimensione dell'orizzonte: $\lambda_{\max} = ct$

$t_D \approx 3 \times 10^5$ anni: formazione di atomi

Uscita dei fotoni dall'equilibrio termico. La distribuzione spaziale dei fotoni misurata OGGI deve riflettere la struttura delle oscillazioni nel plasma al tempo della formazione di atomi

Orizzonte per $t_D \approx 3 \times 10^5$ anni : $L \approx 3 \times 10^5$ anni-luce

Distanza percorsa dai fotoni fino ad oggi: $D \approx 10^{10}$ anni-luce)

Distanza riportata a t_D per tener conto dell'espansione dell'Universo:

$$d = \frac{a(t)}{a_0} D = \frac{T_0}{T} D = \frac{2.73\text{K}}{3000\text{K}} D$$

\Rightarrow dimensione angolare della sorgente: $\alpha = L / d$ (IN GEOMETRIA EUCLIDEA)

Misura del fondo elettromagnetico con risoluzione angolare $\ll 1^\circ$:

Esperimento BOOMERANG

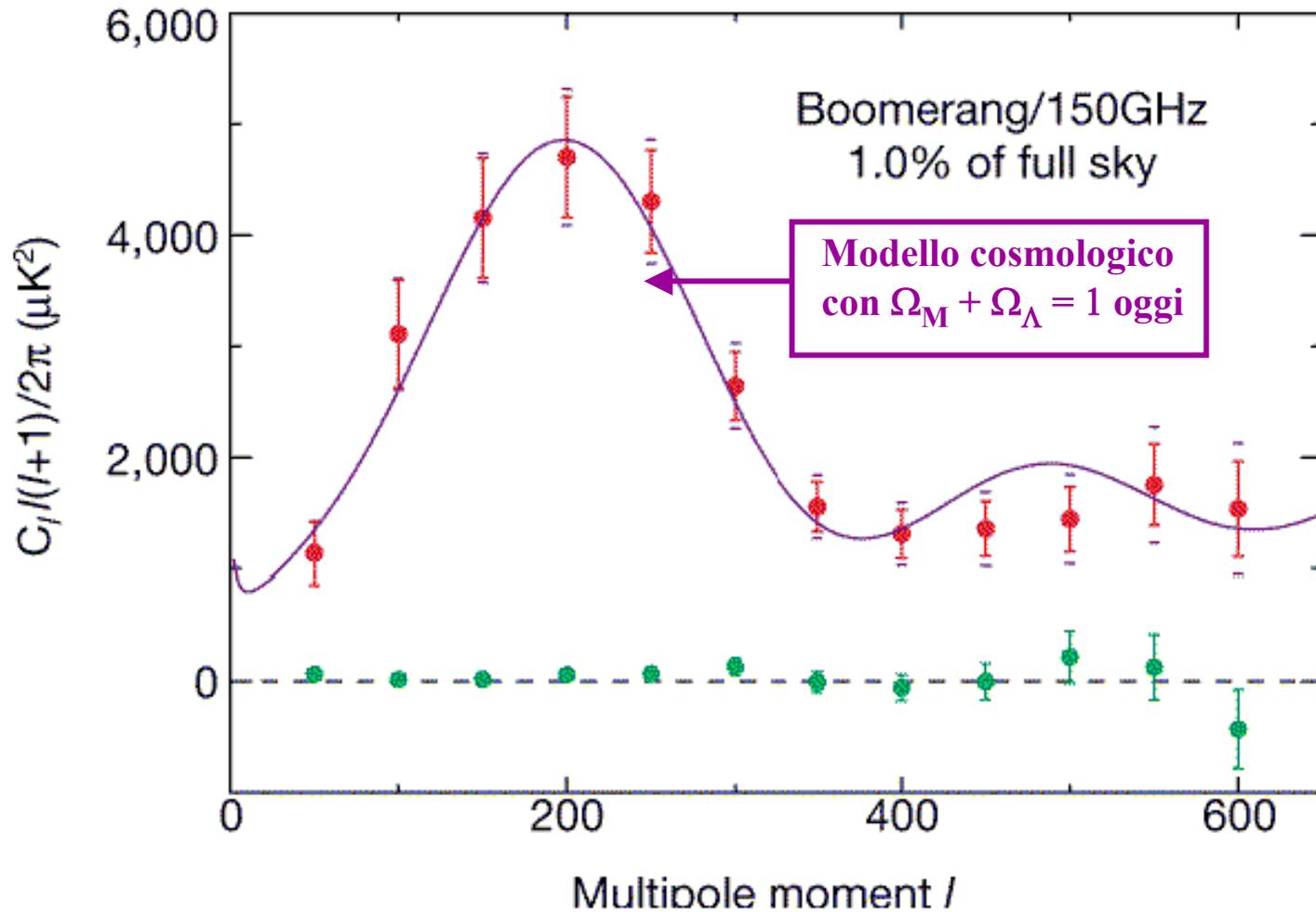
Pallone equipaggiato con telescopi per micro-onde di grande risoluzione angolare (larghezza a metà altezza della curva di risposta $\sim 10'$)

295 ore di volo, altezza 38 km, volo lungo il parallelo 79°S (regine Antartica, sito privilegiato per assenza di fondo elettromagnetico prodotto dalla civiltà)

▪ Misura di $\Delta T(\theta, \phi)$ dalla misura dell'intensità a quattro frequenze: 90, 150, 240, 400 GHz, confrontate con la distribuzione di corpo nero in funzione di T

▪ Decomposizione in armoniche sferiche: $\Delta T(\theta, \phi) = \sum a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$

$c_l = \langle a_{lm}^2 \rangle$ (media su m) : ampiezza della componente multipolare che corrisponde alla scala angolare $\theta = \frac{\pi}{l}$

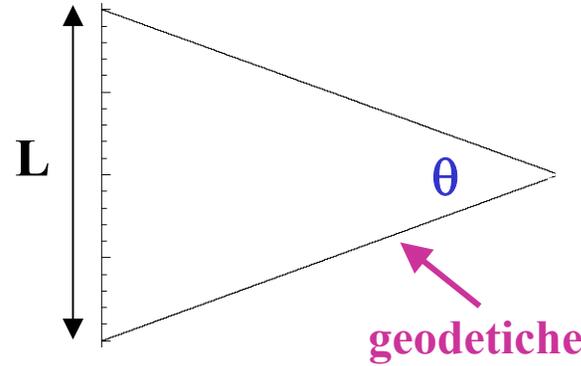


$$\Omega_0 = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1.02 \pm 0.06$$

Conferma indiretta di un Universo CRITICO
Conferma di oscillazioni nel plasma primordiale

$$\Omega_0 - 1 = \frac{k}{a_0^2 H_0^2}$$

La curvatura dello spazio dipende da Ω_0 (effetti significativi su un percorso di 10^{10} anni-luce)

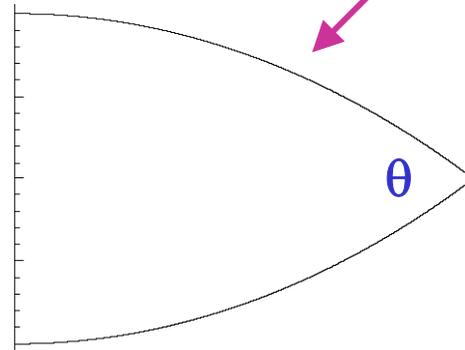


Spazio piatto ($k = 0$)

$$\theta = L / D$$

Geometria euclidea

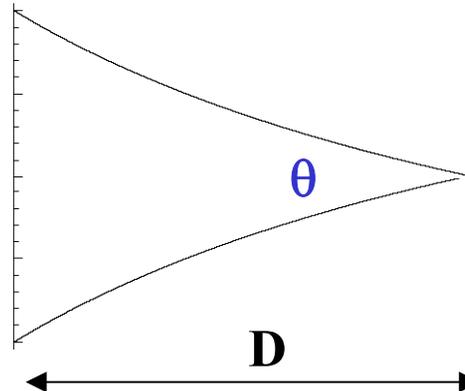
$L \ll D$



Spazio chiuso ($k > 0$)

$$\theta > L / D$$

Geometria sferica



Spazio aperto ($k < 0$)

$$\theta < L / D$$

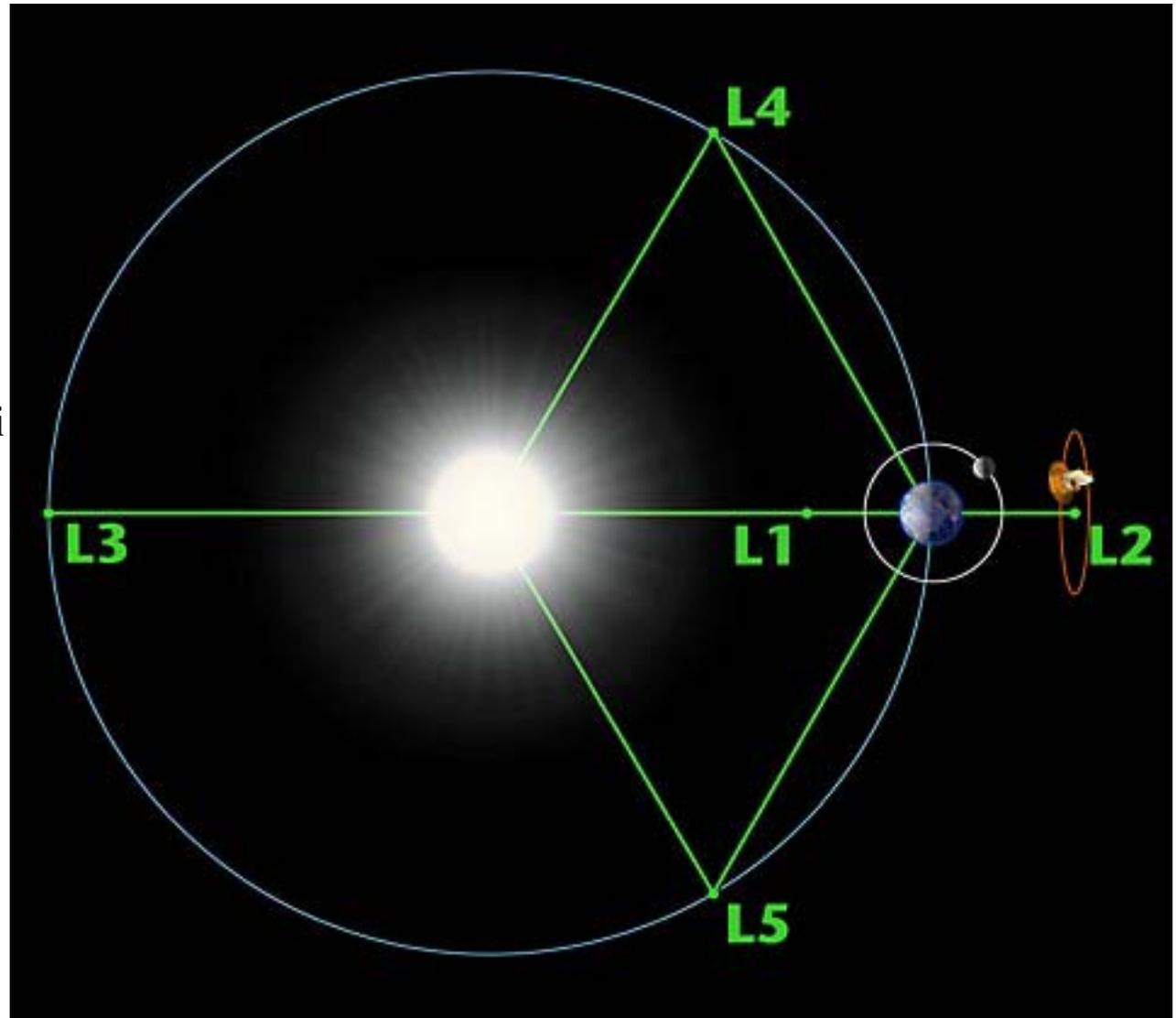
Geometria iperbolica

WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)

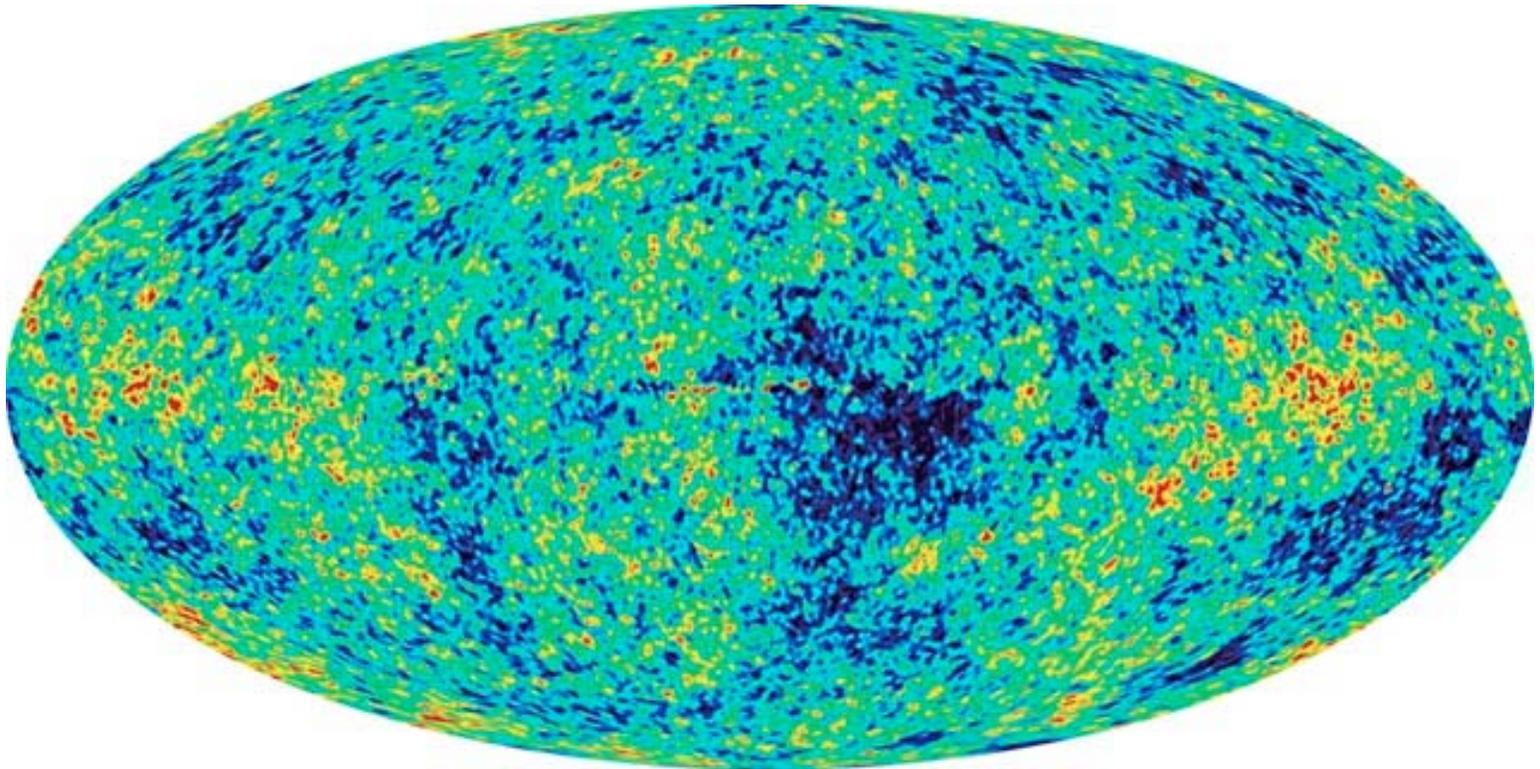
Satellite per la misura dell'anisotropia del fondo elettromagnetico

- **Orbita circolare intorno al 2° punto di Lagrange**
- **Distanza dalla Terra:**
 1.5×10^6 km
- **Risoluzione angolare $13'$**
- **Misura della differenza di temperatura ΔT tra due direzioni su 5 frequenze:**
23, 33, 41, 61, 94 GHz

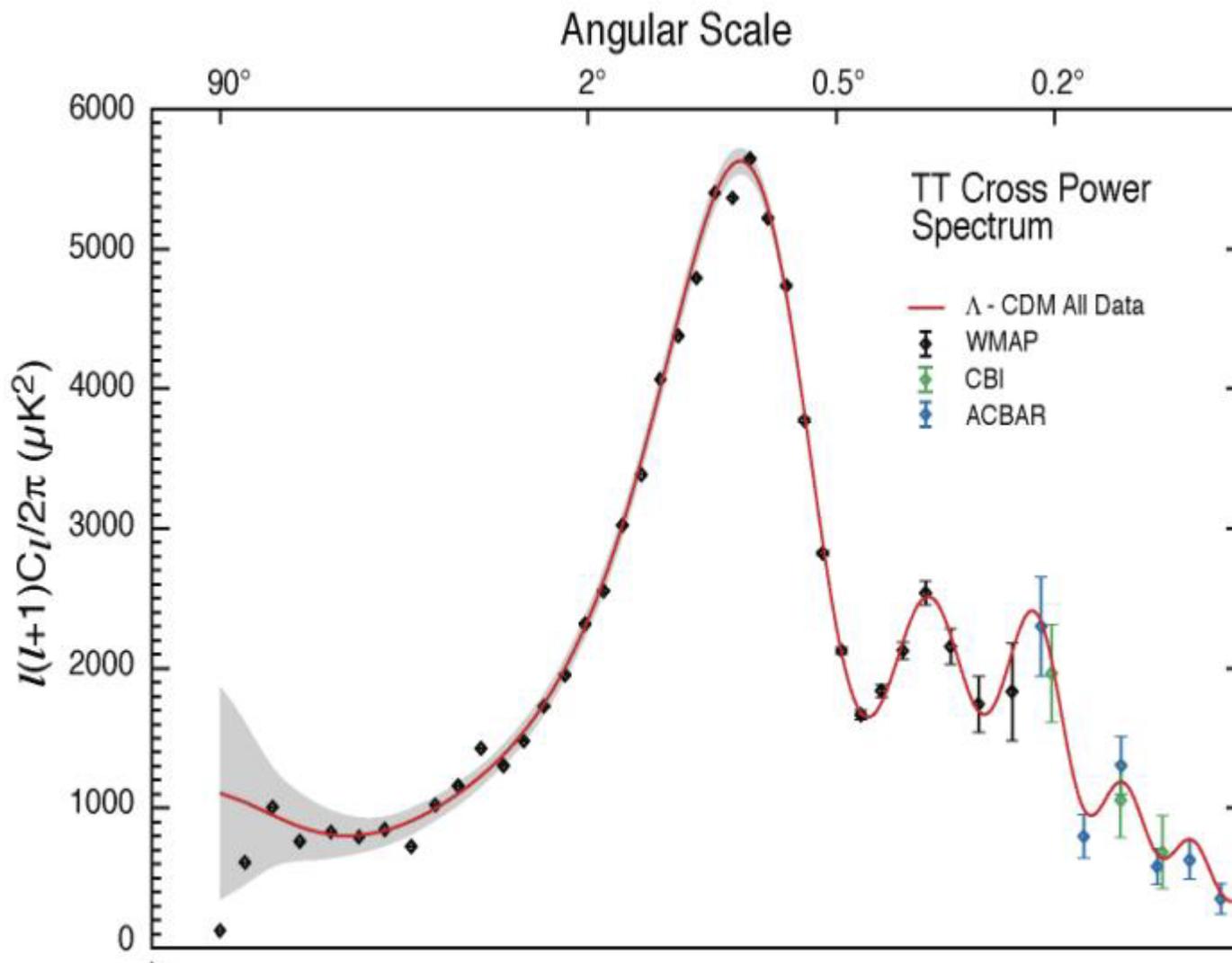
**Primi risultati
nel 2003**



Mappa delle temperature del fondo elettromagnetico misurata da WMAP



Rosso: più caldo
Blu: più freddo



Fit dei dati con un modello cosmologico a molti parametri:

$$\Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_0, \Omega_B, \Omega_\nu, H_0, t_0$$

Parametri “Best Fit”

$$\Omega_{\text{M}} = 0.27 \pm 0.04$$

$$\Omega_{\Lambda} = 0.73 \pm 0.04$$

$$\Omega_0 = \Omega_{\text{M}} + \Omega_{\Lambda} = 1.02 \pm 0.02$$

$$\Omega_{\text{B}} = 0.044 \pm 0.004$$

$$H_0 = 71 \pm 3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

$$h_0 = 71 \pm 3$$

$$t_0 = (13.6 \pm 0.2) \times 10^9 \text{ anni}$$

$$\Omega_{\nu} h_0^2 < 0.0076 \text{ (95\% C.L.)} \Rightarrow \sum_{\nu} m_{\nu} < 0.23 \text{ eV}$$

CONCLUSIONI

- **Cosmologia del Big Bang: un modello dell'evoluzione dell'Universo in grado di descrivere quantitativamente i risultati sperimentali**
- **Universo critico per effetto combinato di materia e costante cosmologica: $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$**
- **$\Omega_\Lambda > \frac{1}{2} \Omega_M \Rightarrow$ espansione accelerata**
- **Problemi aperti**
 1. Problema dell'orizzonte (inflazione?);
 2. Asimmetria materia – antimateria;
 3. Composizione della materia: soltanto ~15% della materia sembra essere barionica – il resto è una forma di materia ancora ignota (particelle pesanti supersimmetriche?);
 4. Origine fisica della costante cosmologica ?