

## **Scritto A**

*Il candidato svolga una dissertazione ed un esercizio a scelta tra quelli proposti.*

### Dissertazioni

1. Si illustri il concetto di stato puro, stato misto e matrice di densità in meccanica quantistica.
2. Si presenti una misura di violazione di simmetria in fisica e si discuta il suo interesse per la comprensione dei fenomeni fondamentali. Si accenni ai principali effetti sistematici che possono influenzare la misura.
3. L'interazione radiazione-materia: trattazione semiclassica e seconda quantizzazione.
4. Rivelatori interferometrici di onde gravitazionali. Le onde gravitazionali sono onde quadrupolari. Un'onda entrante verticalmente sulla superficie della terra nel primo mezzo periodo comprime un asse cartesiano ed espande quello perpendicolare, viceversa nel secondo semiperiodo. I nuovi rivelatori gravitazionali interferometrici si propongono di misurare le perturbazioni delle onde gravitazionali usando un interferometro di Michelson Morley. Discutere il funzionamento, le limitazioni e le problematiche di questa strategia di rivelazione.

## Esercizi

1. L'analisi dimensionale consente talvolta di determinare la forma funzionale di una legge fisica senza dover ricorrere al calcolo esplicito. Si determini per questa via
  - L'accelerazione del moto circolare uniforme in funzione della velocità e del raggio. Come si modifica nel caso relativistico?
  - L'energia interna di un corpo nero in funzione della temperatura e del volume. Quali sono le analogie e le differenze con l'energia interna di un solido cristallino a bassa temperatura ?
  - Il numero di microstati di un gas di bosoni liberi in funzione dell'energia e del volume. Come si può derivare da questo l'equazione delle adiabatiche nel piano  $P, V$  ?
  - La vita media del muone in funzione della costante di Fermi e della sua massa. Si può applicare questa formula anche al leptone  $\tau$ ?
2. Si consideri la produzione di coppie particella-antiparticella da parte di un fascio di positroni di alta energia incidenti sugli elettroni di un bersaglio fisso.
  - Calcolare l'energia minima del fascio di positroni per produrre coppie di pioni ( $M_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ ).
  - Determinare l'angolo massimo di diffusione dei pioni rispetto alla direzione del fascio nel sistema del laboratorio per un fascio di positroni con energia di 150 GeV.
  - Dimostrare che, per energie del fascio molto maggiori della soglia di produzione, l'angolo massimo di apertura nel laboratorio della coppia prodotta diventa indipendente dall'energia e calcolare il valore di questo angolo per una coppia di pioni. ( Se  $\theta_1$  e' l'angolo di diffusione della particella e  $\theta_2$  della antiparticella l'angolo di apertura  $\theta$  e' definito  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ).
3. Un oscillatore anarmonico unidimensionale è costituito da una particella di massa  $m$  sottoposta ad un potenziale del tipo  $V(x) = C|x|^n$ , con  $n$  intero positivo. Calcolate i livelli energetici nell'approssimazione di Bohr-Sommerfeld.

4. Per conservare il momento di rotazione del gas iniziale le stelle tendono a formarsi in coppie corotanti di simil massa. Stelle di massa dell'ordine di 10-20 masse solari bruciano rapidamente l'idrogeno e muoiono in esplosioni di supernove, lasciando dietro stelle a neutroni di 1.42 masse solari. Nell'esplosione di supernova 90% o più della massa della stella è eiettata nello spazio lontano a velocità molto più alta della velocità orbitale. Usando le leggi di Newton e l'attrazione gravitazionale classica, considera due stelle corotanti, ciascuna di 15 masse solari orbitanti a 10 a.u.

- Quale è la loro velocità orbitale (per orbita circolare)?
- Quale è la velocità di fuga necessaria per separare le due stelle?
- Quale è la velocità orbitale immediatamente dopo un'esplosione di supernova (considerando un'esplosione completamente simmetrica) di una delle due stelle?
- Quali sarebbero dopo l'esplosione la velocità orbitale (per mantenere un'orbita circolare) e la velocità di fuga?
- Che succede al sistema?
- Che succede quando anche l'altra stella diventa supernova?
- Si osservano molte stelle a neutroni che orbitano una compagna, ed anche stelle a neutroni doppie. Alcune di queste orbitano così ravvicinate che coalesceranno in tempi brevi. È questa osservazione una prova che le esplosioni di SN non sono completamente sferiche?
- Quanto boost è necessario nell'esplosione di una supernova per mantenere l'orbita circolare originale?
- Se la massa eiettata da una supernova viaggia a  $0.5c$  quanta massa deve essere eiettata asimmetricamente per restare in orbita?

## **Scritto B**

*Il candidato svolga una dissertazione ed un esercizio a scelta tra quelli proposti.*

### Dissertazioni

1. Le costanti fondamentali della fisica hanno svolto un ruolo importante nello sviluppo del pensiero scientifico. Si discuta qualche esempio.
2. Si presenti una misura di larghezza di decadimento evidenziandone l'interesse e discutendo le principali incertezze sistematiche.
3. Considerazioni di simmetria svolgono un ruolo fondamentale nella meccanica quantistica. Discutete gli aspetti a voi più familiari.
4. Stratificazione delle stelle nella Galassia. Nella galassia si è formata una distribuzione di stelle ordinarie, stelle a neutroni e buchi neri di massa variante fra una frazione di massa solare e centinaia di masse solari. Al momento della nascita ciascuna stella ha acquisito la velocità media del gas che ha assorbito per nascere, indipendentemente dalla massa della stella. La densità di stelle è sufficiente per produrre frequenti interazioni gravitazionali e termalizzazione del moto. Usando semplici considerazioni energetiche, discutere la distribuzione radiale all'equilibrio delle stelle.

## Esercizi

1. Si consideri un sistema in equilibrio termico formato da una catena unidimensionale di spin descritta dall'Hamiltoniana

$$H = -J \sum_n S_n S_{n+1} + \Delta \sum_n S_n^2, \quad J > 0$$

dove  $n$  corre su tutti gli interi relativi e la variabile di sito  $S_n$  può assumere i valori  $-1, 0, 1$ . Il parametro  $\Delta$  può essere considerato come il potenziale chimico delle lacune ( $S_n = 0$ ) di un modello di Ising. Si determini il luogo dei punti fissi stabili e instabili del gruppo di rinormalizzazione, ottenuto integrando ad es. ogni volta sulle variabili di posto dispari. (Conviene scrivere la relazione di ricorrenza per le variabili  $x, y, z$  che hanno come valore iniziale  $x = e^{\beta(J-\Delta)}$ ,  $y = e^{\beta(-J-\Delta)}$ ,  $z = e^{-\beta\Delta/2}$ )

2. Si consideri il decadimento di un  $D^{*+}$  ( $M_{D^{*+}} = 2010 \text{ MeV}/c^2$ ) con energia di  $30 \text{ GeV}$  secondo il processo  $D^{*+} \rightarrow D^0 \pi$  ( $M_{D^0} = 1865 \text{ MeV}/c^2$ ,  $M_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ ). Calcolare il valore tipico dell'impulso del pione nel sistema del laboratorio e l'angolo massimo di emissione del pione rispetto alla direzione di volo del  $D^{*+}$ . Si valuti la risoluzione in differenza di massa  $\Delta M = M_{D^{*+}} - M_{D^0}$  per un apparato che misuri l'impulso di tracce cariche con incertezza  $(\delta p/p) = 10^{-3} p(\text{GeV}/c)$  e per decadimenti del  $D^0$  in due particelle cariche di impulso equivalente.
3. Abbiamo una particella quantistica di massa  $m$  vincolata a muoversi lungo una retta e sottoposta ad un potenziale del tipo  $V(x) = -\beta\delta(x - x_0) - \beta\delta(x + x_0)$ . Determinate le funzioni d'onda per i due stati legati. Come dipende l'energia di legame da  $x_0$ ? Discutere i casi limite  $x_0 \rightarrow 0$  e  $x_0 \rightarrow \infty$ .
4. Le onde gravitazionali sono onde quadrupolari. Un'onda entrante verticalmente sulla superficie della terra nel primo mezzo periodo comprime un asse cartesiano ed espande quello perpendicolare, viceversa nel secondo semiperiodo. I nuovi rivelatori gravitazionali interferometrici si propongono di misurare le perturbazioni delle onde gravitazionali usando un interferometro di Michelson-Morley.
  - Considerando un semplice M.M. di  $3 \text{ Km}$  di lunghezza, illuminato da un laser da  $10 \text{ W}$  a  $1064 \text{ nm}$ , calcolare la risoluzione spaziale a  $100 \text{ Hz}$

- dato che ci si attende una intensità di onde di circa  $10^{-18}$  m/m, di quanta potenza laser hai bisogno?
- Se rimpiazzati entrambi i bracci con due Fabry Perot di finezza 100 quale è la sensibilità e quale è la domanda di potenza?
- I bracci dell'interferometro non sono perfettamente uguali, differiscono di 10 mm, quale stabilità in frequenza del laser devi richiedere per ottenere la sensibilità richiesta?
- Se la riflettività dello specchio di ingresso dei due Fabry Perot differisce dell'1%, quale è la stabilità in frequenza richiesta dal laser?

## Scritto C

*Il candidato svolga una dissertazione ed un esercizio a scelta tra quelli proposti.*

### Dissertazioni

1. La rottura spontanea di simmetria è un concetto chiave sia nella fisica delle transizioni di fase che nella teoria quantistica dei campi. Si discuta un esempio.
2. Si presentino uno o più metodi per la misura di una costante di accoppiamento discutendo la precisione raggiungibile con particolare attenzione al controllo degli errori sistematici.
3. Discutete la teoria delle perturbazioni, in assenza e in presenza di degenerazione, con applicazione a qualche caso a voi familiare.
4. Evoluzione delle binarie coalescenti. Per conservare il momento di rotazione del gas iniziale le stelle tendono a formarsi in coppie corotanti di simil massa. Stelle di massa dell'ordine di 10-20 masse solari bruciano rapidamente l'idrogeno e muoiono in esplosioni di supernove in cui 90% o più della massa della stella è eiettata nello spazio lontano a velocità molto più alta della velocità orbitale. Usando le leggi di Newton e l'attrazione gravitazionale classica, discutere l'evoluzione delle stelle binarie.

## Esercizi

1. Calcolare gli elementi di matrice non nulli dell'energia potenziale di un oscillatore armonico di massa  $m$  e pulsazione  $\omega$  nella base degli autostati dell'Hamiltoniana.
2. Si consideri il processo  $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$  dove  $Z$  e' una particella di massa  $M_Z$  e  $\gamma$  e' il fotone.
  - Si scriva l'energia del fotone nel sistema del centro di massa in funzione dell'energia del fascio.
  - Si dimostri che, se la  $Z$  decade in due corpi di massa  $m \ll M_Z$ , l'energia del fascio puo' essere misurata dagli angoli di emissione dei prodotti di decadimento.
  - Se  $Z$  e' il bosone vettore responsabile delle interazioni deboli neutre si disegnino i diagrammi di Feynman a livello di albero per il processo in questione.
3. Il fosforo ha tre elettroni periferici equivalenti (configurazione  $3p^3$ ). Determinare i valori di  $J$ ,  $L$  ed  $S$  per gli stati possibili per questa configurazione e dire quale di questi è lo stato fondamentale e quale il primo stato eccitato.
4. Nella galassia puoi osservare una distribuzione di stelle ordinarie, stelle a neutroni, e buchi neri di massa variante fra una frazione di massa solare e centinaia di masse solari. Al momento della nascita, ciascuna stella ha acquisito una velocità corrispondente alla velocità media del gas che ha assorbito per nascere, e perciò la velocità iniziale è indipendente dalla massa della stella. Al centro della galassia la densità di stelle è sufficiente per produrre frequenti interazioni gravitazionali e termalizzazione del moto. Si faccia l'ipotesi che  $1/3$  della massa del gas iniziale si trasformi in stelle come il sole,  $1/3$  in stelle da 10 masse solari ed un terzo in stelle da 100 masse solari.
  - All'equilibrio, quale è il rapporto medio fra le velocità di un solido come il nostro e di un buco nero di 10 masse solari?
  - E per un buco nero di 100 masse solari?



- Se inizialmente tutte le stelle avevano una velocità corrispondente alla velocità orbitale, e se devi conservare l'energia cinetica complessiva, cosa succede a stelle con massa equivalente al nostro sole quando termalizzano?
- Ed ai buchi neri?