

Entanglement nella teoria dell'informazione quantistica \mathcal{PT} -simmetrica

Giulio Carli

10 giugno 2009

Sommario

L'entanglement è una delle caratteristiche più affascinanti della meccanica quantistica. Esso non ha un corrispettivo nel mondo classico.

Di seguito introdurremo la nozione di entanglement per i sistemi quantistici che sono descritti da Hamiltoniane non Hermitiane ma \mathcal{PT} -simmetriche¹. Faremo il confronto tra la definizione standard e quella nuova. Ed in più, vedremo come creare entanglement tra due \mathcal{PT} qubits.

Infine, seguendo le idee espresse in [1] e in [4], cercheremo di capire le potenzialità che può avere la meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica soprattutto nel campo della QIT, sia come terreno di test delle sue validità che come implementazione.

Indice

1	Entanglement nella meccanica quantistica	2
2	Meccanica quantistica \mathcal{PT}-simmetrica	4
3	\mathcal{PT}Qubit	5
4	Entanglement nella meccanica quantistica \mathcal{PT}-simmetrica	7
5	Come generare entanglement con una Hamiltoniana non Hermitiana	11
6	Capacità di entangling delle Hamiltoniane non Hermitiane	12
7	Brachistocrona quantistica 2D \mathcal{PT}-simmetrica: <i>Faster than Hermitian Time Evolution</i>	13
8	Conclusioni	19

¹L'interesse circa questa famiglia di Hamiltoniane è sorto grazie agli studi di Bender *et al.*

1 Entanglement nella meccanica quantistica

Richiamiamo alcune definizioni e concetti fondamentali dell'entanglement nella QIT. Quanto segue sarà già noto ma risulterà utile per avere un confronto diretto con ciò che introdurremo di nuovo nella sezione successiva.

Consideriamo un sistema composto da due o più parti (sottosistemi). Lo spazio di Hilbert di un tale sistema è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert individuali ($\mathcal{H} = \bigotimes_i \mathcal{H}_i$). Se lo stato di un sistema composto (ad esempio per uno binario) non si può scrivere come $|\Psi\rangle_{12} = |\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$, allora si dice che lo stato è *entangled*.

Supponiamo che $\{|\psi_n\rangle\} \in \mathcal{H}_1^N$ e $\{|\phi_m\rangle\} \in \mathcal{H}_2^M$ siano due basi ortonormali, allora $\{|\psi_n\rangle_1 \otimes |\phi_m\rangle_2\} \in \mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$. Un generico stato puro bipartito si può esprimere come

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{n,m=1}^{N,M} C_{n,m} |\psi_n\rangle_1 \otimes |\phi_m\rangle_2. \quad (1)$$

Lo stato soprastante non è scrivibile in forma di prodotto per ampiezze generiche, quindi è uno stato entangled. Perciò, un qualsiasi stato puro bipartito è effettivamente entangled. Esiste un bel teorema (*decomposizione di Schmidt*) che ci dice che ogni stato puro bipartito (entangled) può essere scritto come

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{i=1}^{\min\{N,M\}} \sqrt{p_i} |a_i\rangle_1 \otimes |b_i\rangle_2, \quad (2)$$

dove $p_i \geq 0$ sono i coefficienti di Schmidt e $|a_i\rangle$, $|b_i\rangle$ sono i vettori di Schmidt, con $\sum_i p_i = 1$. Notiamo che se abbiamo più di un coefficiente diverso da zero allora lo stato è entangled. I coefficienti di Schmidt sono invarianti sotto trasformazioni unitarie locali.

Adesso, se vogliamo definire lo stato di sistemi individuali, allora questi saranno dati dalle tracce parziali, ovvero,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{tr}_2(|\Psi\rangle_{12}\langle\Psi|) = \sum_i p_i |a_i\rangle\langle a_i|, \\ \rho_2 &= \text{tr}_1(|\Psi\rangle_{12}\langle\Psi|) = \sum_i p_i |b_i\rangle\langle b_i|. \end{aligned} \quad (3)$$

Notiamo che ρ_1 e ρ_2 non sono più puri ($\rho_i^2 \neq \rho_i$, con $i = 1, 2$). Questo fatto è un'ulteriore indicazione che lo stato originale del sistema composto è entangled. Se non lo è, allora dopo l'azione della traccia parziale le matrici densità ridotte saranno ancora pure. L'esistenza della decomposizione di Schmidt per stati bipartiti garantisce che le matrici densità ridotte abbiano spettri uguali, sebbene gli autovettori possano differire.

Se A e B sono due operatori lineari Hermitiani che agiscono su \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , rispettivamente, allora i valori di aspettazione di queste variabili locali sono

dati da

$$\begin{aligned} {}_{12}\langle\Psi|A\otimes I|\Psi\rangle_{12} &= \text{tr}_1(\rho_1 A), \\ {}_{12}\langle\Psi|I\otimes B|\Psi\rangle_{12} &= \text{tr}_2(\rho_2 B). \end{aligned} \quad (4)$$

Ciò suggerisce che i valori di aspettazione delle variabili locali siano completamente determinate dalle matrici densità locali (ridotte).

Per uno stato puro bipartito è possibile quantificare quanto sia il suo entanglement. L'entropia di una delle matrici densità ridotte è una buonissima misura dell'entanglement per il generico stato bipartito $|\Psi\rangle$ [8]. Essa è data da

$$E(\Psi) = -\text{tr}_1(\rho_1 \log \rho_1) = -\text{tr}_2(\rho_2 \log \rho_2) = -\sum_i p_i \log p_i. \quad (5)$$

Tale misura dell'entanglement soddisfa le seguenti proprietà:

1. $E(\Psi) = 0$ se $|\Psi\rangle$ è separabile;
2. $E(\Psi)$ è invariante sotto trasformazioni unitarie locali, cioè, $E(\Psi) = E(U_1 \otimes V_2 \Psi)$;
3. $E(\Psi)$ non può aumentare sotto operazioni locali e comunicazioni classiche (LOCC);
4. L'entanglement di n copie di $|\Psi\rangle$ è additivo, ovvero, $E(\Psi^{\otimes n}) = nE(\Psi)$.

I fatti precedenti si possono illustrare mediante stati entangled a due qubits e due qudits (qudits è un sistema con uno spazio di Hilbert di dimensione d). Forse lo stato entangled più famoso è lo stato EPR dato da

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle). \quad (6)$$

Poichè $\rho_1 = \rho_2 = I/2$, l'EPR ha esattamente una unità di entanglement, o, usando un altro linguaggio, un ebit (entangled bit). Questo è anche uno stato di massimo entangled per due qubits. Infatti, uno stato che è localmente equivalente a $|\Psi^-\rangle$ avrà una unità di entanglement. Analogamente, in uno spazio di Hilbert a dimensione più alta ($d \times d$) uno stato di massimo entanglement per due qudits si può scrivere come

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle \otimes |i\rangle, \quad (7)$$

che possiede $E(\Phi) = \log d$ ebits. Anche un qualsiasi altro stato tipo $(U_1 \otimes V_2)|\Psi\rangle$ avrà $\log d$ ebits di entanglement, dove U_1 e V_2 sono operatori unitari locali che agiscono su \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , rispettivamente.

2 Meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica

In questa parte vogliamo introdurre il formalismo necessario per sviluppare la nozione di entanglement nella teoria quantistica non Hermitiana \mathcal{PT} -simmetrica.

Recentemente, in letteratura sono comparsi molti articoli concernenti questa “nuova” meccanica quantistica [1]. Essa si fonda sull’ipotesi che la condizione di Hermitianità ($H = H^\dagger$) sia solo sufficiente e non necessaria a garantire che lo spettro dell’energia sia reale e l’evoluzione temporale unitaria. Essa può essere sostituita con una più debole ($H = H^{\mathcal{PT}} \equiv (\mathcal{PT})H(\mathcal{PT})$) ma che tuttavia preserva le tre condizioni irrinunciabili affinché una teoria quantistica sia valida (cioè fisicamente accettabile), ovvero:

1. avere uno spettro d’energia limitato inferiormente;
2. possedere uno spazio di Hilbert con prodotto interno avente norma positiva;
3. esibire un’evoluzione temporale unitaria.

Bender in [1] ha mostrato che le Hamiltoniane non Hermitiane hanno autovalori reali se possiedono la simmetria \mathcal{PT} , cioè $[H, \mathcal{PT}] = 0$, e tale simmetria è non rotta (tutte le autofunzioni di H devono esserlo simultaneamente anche per l’operatore \mathcal{PT}). Le Hamiltoniane con tale proprietà possono definire una teoria quantistica “unitaria”. Qui l’unitarietà non si intende quella convenzionale, ma quella rispetto all’invarianza \mathcal{CPT} . Infatti per le Hamiltoniane che possiedono una simmetria \mathcal{PT} non rotta esiste una simmetria addizionale \mathcal{C} tale che $[H, \mathcal{C}] = 0$ e $[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0$. L’ultima proprietà permette di definire un prodotto interno congruo al fine di avere una teoria quantistica fisicamente accettabile. Il lettore non deve pensare \mathcal{C} come l’operatore di coniugazione di carica noto dalla fisica delle particelle, ma qui esso rappresenta il segno della norma \mathcal{PT} di un certo autostato. L’operatore \mathcal{C} non esiste come entità distinta nella meccanica quantistica ordinaria: “ *\mathcal{C} emerge soltanto quando si estende la Hamiltoniana della meccanica quantistica convenzionale nel dominio complesso. È per questa ragione che la simmetria nascosta \mathcal{C} non è mai stata osservata prima. Di conseguenza, l’invarianza \mathcal{CPT} può essere vista come la naturale estensione (complessa) della condizione di Hermitianità.*” (Bender)

Possiamo riassumere e formalizzare la teoria quantistica \mathcal{PT} -simmetrica mediante i seguenti postulati:

1. un sistema quantistico è descritto da una terna $(\mathcal{H}, H, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{CPT}})$, dove \mathcal{H} è lo spazio di Hilbert fisico con prodotto interno \mathcal{CPT} avente norma positiva e H è la Hamiltoniana non Hermitiana \mathcal{PT} -simmetrica;

2. lo stato di un sistema è un vettore (raggio) $|\psi\rangle$ in \mathcal{H} . Per due qualsiasi vettori, il prodotto \mathcal{CPT} è definito come $\langle\phi|\psi\rangle_{\mathcal{CPT}} = \int \phi^{\mathcal{CPT}}(x)\psi(x)dx$, dove $\phi^{\mathcal{CPT}} = \int \mathcal{C}(x,y)\phi^*(-y)dy$;
3. l'evoluzione temporale di uno stato è unitaria rispetto al prodotto interno \mathcal{CPT} ;
4. un'osservabile è un operatore lineare O , purchè sia Hermitiano rispetto al prodotto interno \mathcal{CPT} , ovvero, $\langle\cdot|O\cdot\rangle_{\mathcal{CPT}} = \langle\cdot|O\cdot\rangle_{\mathcal{CPT}}$;
5. se misuriamo un'osservabile O , allora gli autovalori sono i possibili risultati;
6. se la misura dà un autovalore O_n , lo stato fa una transizione all'auto-stato $|\psi_n\rangle$ e la probabilità di ottenere l'autovalore O_n in uno stato $|\psi\rangle$ è data da

$$p_n = \frac{|\langle\psi|\psi_n\rangle_{\mathcal{CPT}}|^2}{\|\psi\|_{\mathcal{CPT}}\|\psi_n\|_{\mathcal{CPT}}}; \quad (8)$$

7. se abbiamo due sistemi quantistici $(\mathcal{H}_1, H_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{CPT}})$ e $(\mathcal{H}_2, H_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{CPT}})$, allora lo stato del sistema combinato vivrà nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Poichè è molto difficile riassumere in breve le proprietà di questa teoria, si consiglia la lettura di [1] (*Making sense of non-Hermitian Hamiltonians*) in modo da avere una panoramica completa su di essa.

3 \mathcal{PT} Qubit

Nella meccanica quantistica convenzionale diciamo che un qualsiasi sistema a due stati è un qubit²: basta una sovrapposizione arbitraria di due stati ortogonali.

Qualcosa di analogo si può fare anche nella meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica. Infatti, se registriamo informazione in un sistema a due stati, allora lo possiamo chiamare bit quantistico \mathcal{PT} -simmetrico, il \mathcal{PT} qubit. In generale, qubit e \mathcal{PT} qubit sono diversi³.

Nella teoria quantistica non Hermitiana \mathcal{PT} -simmetrica, il più generale sistema a due stati è descritto da una Hamiltoniana 2×2 che rispetta la simmetria \mathcal{CPT} . Seguendo l'esempio in [1], la suddetta matrice è data dalla forma

²Ad esempio, uno stato di particella a spin semi-intero tipo $|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ oppure una sovrapposizione dello stato fondamentale e di quello eccitato di un atomo a due livelli possono rappresentare un bit quantistico.

³Il \mathcal{PT} qubit degenera nel qubit standard quando la Hamiltoniana non Hermitiana \mathcal{PT} -simmetrica che descrive il sistema degenera in una Hermitiana.

$$H = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

dove i tre parametri r , s e θ sono reali. La Hamiltoniana (9) non è Hermitiana, ma è facile vedere che è \mathcal{PT} -simmetrica. Qui la parità è definita da

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

e l'operatore \mathcal{T} è l'agente della coniugazione complessa ($i \rightarrow -i$).

Gli autovalori della Hamiltoniana (9) sono:

$$E_{\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \theta}. \quad (11)$$

Ci sono due regioni parametriche da considerare: una per cui la radice quadrata è reale e l'altra per cui è immaginaria. Quando $s^2 < r^2 \sin^2 \theta$, gli autovalori formano una coppia coniugata complessa. Questa è la regione in cui la simmetria \mathcal{PT} è rotta. Dall'altra parte, quando $s^2 \geq r^2 \sin^2 \theta$, gli autovalori $\varepsilon_{\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \theta}$ sono reali: zona in cui la simmetria \mathcal{PT} non è rotta; qui gli autostati simultanei degli operatori H e \mathcal{PT} sono rappresentati da

$$|\psi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \\ e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\psi_{-}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \\ -e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

dove

$$\sin \alpha = \frac{r}{s} \sin \theta. \quad (13)$$

Adesso costruiamo l'operatore \mathcal{C} usando le autofunzioni \mathcal{PT} -normalizzate della Hamiltoniana (9):

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} i \sin \alpha & 1 \\ 1 & -i \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Notiamo che \mathcal{C} è diverso da H e \mathcal{P} e possiede la proprietà chiave che

$$\mathcal{C}|\psi_{\pm}\rangle = \pm|\psi_{\pm}\rangle. \quad (15)$$

Rispetto al prodotto interno \mathcal{CPT} abbiamo che $\langle u|v\rangle_{\mathcal{CPT}} = (\mathcal{CPT}u) \cdot v$. Quest'ultimo è definito positivo perchè $\langle \psi_{\pm}|\psi_{\pm}\rangle_{\mathcal{CPT}} = 1$ e $\langle \psi_{\pm}|\psi_{\mp}\rangle_{\mathcal{CPT}} = 0$.

Poichè gli autostati $|\psi_{\pm}\rangle$ generano lo spazio di Hilbert bidimensionale, possiamo codificare un bit di informazione in questi stati ortogonali. Un generico stato si può rappresentare come una sovrapposizione dei suddetti stati ortogonali

$$|\Psi\rangle = \alpha|\psi_{+}\rangle + \beta|\psi_{-}\rangle = \alpha|0_{\mathcal{CPT}}\rangle + \beta|1_{\mathcal{CPT}}\rangle. \quad (16)$$

Così, una qualunque sovrapposizione di due stati ortogonali (ortogonali rispetto al prodotto interno \mathcal{CPT}), derivanti da una Hamiltoniana che possiede una simmetria \mathcal{PT} non rotta, può dirsi un \mathcal{PT} Qubit.

4 Entanglement nella meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica

L'entanglement è una delle più importanti caratteristiche del mondo quantistico. Abbiamo già ricordato precedentemente che quando ci sono più di un qubit, allora lo stato di un sistema composto può trovarsi in uno stato entangled. Ciò che intendiamo fare in questa sezione è vedere che anche nella meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica possiamo avere una situazione simile se abbiamo più di un \mathcal{PT} qubit.

Supponiamo di avere due sistemi quantistici descritti da due Hamiltoniane non Hermitiane \mathcal{PT} -simmetriche H_1 e H_2 tali che

$$H_1 = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad e \quad H_2 = \begin{pmatrix} r'e^{i\theta'} & s' \\ s' & r'e^{-i\theta'} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Siano $\{|\psi_{\pm}\rangle\} \in \mathcal{H}_1$ e $\{|\psi'_{\pm}\rangle\} \in \mathcal{H}_2$ le autofunzioni delle Hamiltoniane H_1 e H_2 , rispettivamente. Adesso, lo stato del sistema combinato vivrà nello spazio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ che è generato da $\{|\psi_+\rangle \otimes |\psi'_+\rangle, |\psi_+\rangle \otimes |\psi'_-\rangle, |\psi_-\rangle \otimes |\psi'_+\rangle, |\psi_-\rangle \otimes |\psi'_-\rangle\}$. Se lo stato composto non si può scrivere come $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$, allora esso è entangled. Un generico stato di due \mathcal{PT} qubit si può espandere usando la base comune in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ come

$$|\Psi\rangle = a|\psi_+\rangle \otimes |\psi'_+\rangle + b|\psi_+\rangle \otimes |\psi'_-\rangle + c|\psi_-\rangle \otimes |\psi'_+\rangle + d|\psi_-\rangle \otimes |\psi'_-\rangle. \quad (18)$$

Questo è uno stato entangled per $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ generici. Ciò nonostante, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, allora $|\Psi\rangle$ non sarà più entangled. A questo punto, possiamo quantificare l'entanglement contenuto in $|\Psi\rangle$. Esso è dato dall'entropia dello stato ridotto di uno qualsiasi dei sottosistemi, ovvero

$$E(\Psi) = -\lambda_+ \log \lambda_+ - \lambda_- \log \lambda_-, \quad (19)$$

dove $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4[(|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) - |ac^* + bd^*|^2]} \right\}$. Per $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, troviamo $E(\Psi) = 0$ come ci dovevamo aspettare.

Adesso possiamo usare il prodotto interno \mathcal{CPT} sugli spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 per definire il prodotto interno su $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Per due generici vettori $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ definiamo il prodotto interno come

$$\langle \Psi | \Phi \rangle_{\mathcal{CPT}} = [(\mathcal{CPT}) \otimes (\mathcal{CPT}) |\Psi\rangle] \cdot |\Phi\rangle. \quad (20)$$

Usando questa definizione siamo in grado di calcolare le quantità rilevanti per il sistema composto che stiamo considerando.

Ovviamente, esiste la possibilità di generalizzare la nozione di entanglement per più di due \mathcal{PT} qubits. Se abbiamo a disposizione n - \mathcal{PT} qubits con Hamiltoniane individuali H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e relative autofunzioni $\{|\psi_{\pm i}\rangle\}$, allora la composizione degli spazi di Hilbert prenderà la forma

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$. Se lo stato combinato non è scrivibile come un prodotto tensoriale del tipo $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\chi\rangle_n$, allora sarà uno stato entangled. Un generico stato a n - \mathcal{PT} qubits si può scrivere come

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k |X_k\rangle, \quad (21)$$

dove $|X_k\rangle$ è una stringa a n bit di tutte le possibili combinazioni di $|\psi_{\pm}\rangle$. Tale stato, in generale, sarà entangled. Tuttavia, nella presente trattazione non faremo ricorso a sistemi a molti \mathcal{PT} qubits.

In generale, se abbiamo due sottosistemi con Hamiltoniane non Hermitiane a dimensione alta ($\mathcal{H}^d \otimes \mathcal{H}^d$), allora anche in questa situazione possiamo introdurre la definizione di entanglement. Un generico stato di due sistemi quantistici \mathcal{PT} -simmetrici può essere scritto⁴ come

$$|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle. \quad (22)$$

A questo punto si dovrebbe aver già intuito che gli stati ridotti di due particelle \mathcal{PT} -simmetriche 1 e 2 saranno diversi se calcoliamo le tracce parziali nella meccanica quantistica convenzionale ed in quella non Hermitiana: i prodotti interni sono diversi⁵. Da ciò segue che le tracce parziali saranno anch'esse diverse. Per fare un esempio notiamo che la matrice densità ridotta per la particella 1 calcolata nella meccanica quantistica non Hermitiana sarà rappresentata dalla seguente espressione

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \text{tr}_2 \left(|\phi_i\rangle \langle \phi_j| \right) \\ &= \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \left[(\mathcal{CPT} |\phi_j\rangle) \cdot |\phi_i\rangle \right] = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \end{aligned} \quad (23)$$

⁴Facciamo notare che anche per i sistemi non Hermitiani è possibile scrivere la decomposizione di Schmidt.

⁵Il fatto che, in generale, i due prodotti interni differiscano ha delle ripercussioni drammatiche, ma al contempo molto interessanti, per quanto concerne l'evoluzione temporale dei sistemi. In [2] è stato notato che una brachistocrona quantistica 2D non Hermitiana ma \mathcal{PT} -simmetrica ha un'evoluzione temporale più *veloce* rispetto all'*equivalente* Hermitiana (Mostafazadeh in [5] e [6] ha dimostrato che esiste una trasformazione di *similitudine* che mappa una Hamiltoniana non Hermitiana H in una equivalente h ma Hermitiana: le due Hamiltoniane hanno autovalori uguali ma autovettori diversi, in generale. La trasformazione è realizzata tramite un operatore $e^{\mathcal{Q}}$, dove $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\hat{x}, \hat{p})$. In particolare $h = e^{-\mathcal{Q}/2} H e^{\mathcal{Q}/2}$. Per completezza ricordiamo che $\mathcal{C} \equiv e^{\mathcal{Q}} \mathcal{P}$. Per ogni ulteriore dubbio si consiglia di vedere [1]). È stato dimostrato in [1] e [2] che tale comportamento è dovuto al fatto che due vettori ortogonali nella teoria convenzionale, in generale, non lo sono in quella \mathcal{PT} -simmetrica. Se il tempo di evoluzione della brachistocrona nella versione Hermitiana è limitato inferiormente, ciò non accade nella versione \mathcal{PT} -simmetrica dove, lavorando sugli elementi della matrice, è possibile far tendere a zero tale limite.

Se rifacciamo in calcolo nella teoria standard, invece otterremo

$$\rho_1 = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \text{tr}_2(|\phi_i\rangle \langle \phi_j|) = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \langle \phi_j | \phi_i \rangle. \quad (24)$$

Questa non è più in forma diagonale perchè $\langle \phi_j | \phi_i \rangle \neq \delta_{ij}$ nel senso usuale. Analogamente, uno può verificare che la matrice densità ridotta per la particella 2 sarà diversa nelle due teorie. Infatti nella versione non Hermitiana avremo

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| \text{tr}_1(|\psi_i\rangle \langle \psi_j|) \\ &= \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| \left[(\mathcal{CPT} |\psi_j\rangle) \cdot |\psi_i\rangle \right] = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|; \end{aligned} \quad (25)$$

mentre nella meccanica quantistica convenzionale abbiamo la forma

$$\rho_2 = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| \text{tr}_1(|\psi_i\rangle \langle \psi_j|) = \sum_{i,j} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| \langle \psi_j | \psi_i \rangle. \quad (26)$$

Come conseguenza abbiamo che l'entanglement di uno stato bipartito dipende dal prodotto interno che viene usato per calcolare le tracce parziali. Detto con altre parole, $E(\Psi) = S(\rho_i)$ con $i = 1, 2$ nella teoria usuale non è uguale a $E(\Psi) = S(\rho_i)$ nella teoria \mathcal{PT} -simmetrica.

Per illustrare il fatto precedente, possiamo definire uno stato di singoletto per due \mathcal{PT} qubits come

$$|\Psi_{\mathcal{CPT}}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\psi_+\rangle |\psi_-\rangle - |\psi_-\rangle |\psi_+\rangle \right]. \quad (27)$$

Nella meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica, il contenuto di entanglement di $|\Psi_{\mathcal{CPT}}^-\rangle$ è dato da $E(\Psi_{\mathcal{CPT}}^-) = 1$. Facciamo notare che questo non è l'usuale stato di singoletto EPR $|\Psi^-\rangle$. Questo perchè l'entanglement di $|\Psi^-\rangle$ sarà diverso nella teoria non Hermitiana.

La differenza scoperta è molto interessante. Infatti, lo stato di singoletto EPR che nella meccanica quantistica convenzionale ha un entanglement unitario, nella teoria \mathcal{PT} -simmetrica avrà un contenuto minore dell'unità. Ovviamente la stessa cosa accadrà a parti invertite (il singoletto invariante sotto \mathcal{CPT} ha entanglement uno nella propria teoria, mentre inferiore nella teoria usuale). Come già accennato precedentemente, l'origine di ciò va ricercata nella differente definizione di prodotto interno nelle due teorie. Per vedere esplicitamente l'effetto di tale differenza, consideriamo lo stato entangled EPR nella meccanica quantistica Hermitiana. Se vogliamo conoscere la quantità di entanglement nella teoria \mathcal{PT} -simmetrica allora basterà calcolare l'entropia di von Neumann della matrice densità ridotta in tale

framework. Se stiamo considerando la particella 1 avremo

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \text{tr}_2(|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) \\ &= \frac{1}{2} \left[|0\rangle\langle 0| \langle 1|1\rangle_{\mathcal{CPT}} - |0\rangle\langle 1| \langle 0|1\rangle_{\mathcal{CPT}} - |1\rangle\langle 0| \langle 1|0\rangle_{\mathcal{CPT}} + |1\rangle\langle 1| \langle 0|0\rangle_{\mathcal{CPT}} \right],\end{aligned}\tag{28}$$

dove i prodotti interni \mathcal{CPT} valgono $\langle 0|0\rangle_{\mathcal{CPT}} = \langle 1|1\rangle_{\mathcal{CPT}} = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\langle 0|1\rangle_{\mathcal{CPT}} = i \tan\alpha$ e $\langle 1|0\rangle_{\mathcal{CPT}} = -i \tan\alpha$. Allora la matrice densità ridotta per la particella 1 prende la forma

$$\rho_1 = \text{tr}_2(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|) = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 \alpha & 2i \sin \alpha \\ -2i \sin \alpha & 1 + \sin^2 \alpha \end{pmatrix}.\tag{29}$$

Notiamo che ρ_1 non è normalizzata. Definiamo la matrice densità normalizzata $\tilde{\rho}_1 = \rho_1 / \text{tr} \rho_1$:

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2i \sin \alpha \\ -2i \sin \alpha & 1 \end{pmatrix}.\tag{30}$$

Gli autovalori di $\tilde{\rho}_1$ sono $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm 2 \sin \alpha)$. La quantità di entanglement dello stato di singoletto usuale nella teoria \mathcal{PT} -simmetrica è dato da

$$\begin{aligned}E(\Psi^-) &= -\lambda_1 \log \lambda_1 - \lambda_2 \log \lambda_2 = -\frac{1}{2}(1 + 2 \sin \alpha) \log \left[\frac{1}{2}(1 + 2 \sin \alpha) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}(1 - 2 \sin \alpha) \log \left[\frac{1}{2}(1 - 2 \sin \alpha) \right] \leq 1.\end{aligned}\tag{31}$$

Il risultato appena ottenuto mostra esplicitamente che se uno stato entangled ha una unità di entanglement nella teoria meccanica quantistica ordinaria, in quella non Hermitiana ha un contenuto minore⁶. Con le stesse modalità, il lettore può provare che lo stato di massimo entanglement $|\Psi_{\mathcal{CPT}}\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_+\rangle|\psi_-\rangle - |\psi_-\rangle|\psi_+\rangle)$ della teoria non Hermitiana avrà un entanglement minore di uno nella meccanica quantistica usuale.

Un'implicazione significativa di tale effetto riguarda lo scambio di informazione tra due soggetti. In particolare, se Alice e Bob condividono uno stato EPR generato in un sistema quantistico governato da una Hamiltoniana non Hermitiana \mathcal{PT} -simmetrica, allora loro non potranno usare il teletrasporto quantistico nel mondo ordinario; infatti, il trasporto perfetto richiede un ebit.

⁶Nel limite $\alpha \rightarrow 0$, cioè $\theta \rightarrow 0$, la Hamiltoniana (9) diventa Hermitiana e $E(\Psi^-) = 1$. Contemporaneamente l'operatore \mathcal{C} diventa uguale alla parità \mathcal{P} . Di conseguenza, l'invarianza \mathcal{CPT} si riduce alla condizione standard di Hermiticità per una matrice simmetrica; ovvero, $H = H^*$.

5 Come generare entanglement con una Hamiltoniana non Hermitiana

Sappiamo che l'entanglement tra due sistemi può essere generato tramite una qualche interazione. Nella meccanica quantistica convenzionale, le interazioni vengono descritte da Hamiltoniane Hermitiane. Uno potrebbe pensare che con le Hamiltoniane non Hermitiane l'entanglement può, in qualche modo, distruggersi. Tuttavia, l'intenzione di questa sezione è proprio quella di far vedere come sia possibile creare entanglement usando la nuova famiglia di Hamiltoniane.

Una generica Hamiltoniana per due particelle nella teoria \mathcal{PT} -simmetrica è data da $H = H_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes H_2 + H_{12}$, dove H_1 , H_2 e H_{12} potrebbero essere non Hermitiane ma hanno una simmetria \mathcal{PT} non rotta. La Hamiltoniana complessiva dovrà soddisfare $[H, \mathcal{PT} \otimes \mathcal{PT}] = 0$. Se $|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \otimes |\phi(0)\rangle$ evolve in $|\Psi(t)\rangle$ sotto l'azione di questa Hamiltoniana non locale, allora lo stato ad un tempo successivo potrebbe essere entangled, cioè

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle \otimes |\phi(0)\rangle \neq |\psi(t)\rangle \otimes |\phi(t)\rangle. \quad (32)$$

Vediamo con un esempio come una semplice Hamiltoniana non locale è in grado di creare entanglement. Consideriamo la seguente Hamiltoniana di interazione

$$H = \begin{pmatrix} r e^{i\theta} & s \\ s & r e^{-i\theta} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r' e^{i\theta'} & s' \\ s' & r' e^{-i\theta'} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

che, ovviamente, soddisfa la condizione $[H, \mathcal{PT} \otimes \mathcal{PT}] = 0$. Facendo uso delle matrici di Pauli, è possibile riscrivere la (33) come

$$H = \left(r \cos \theta \mathbb{I} + \frac{\omega}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right) \otimes \left(r' \cos \theta' \mathbb{I} + \frac{\omega'}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}' \right), \quad (34)$$

dove $\vec{n} = \frac{2}{\omega}(s, 0, ir \sin \theta)$, $\omega = 2s \cos \alpha$; per \vec{n}' e ω' varranno le medesime relazioni solamente primarie. Adesso soffermiamoci sulla natura dei termini che contribuiscono alla Hamiltoniana precedente. Elaborandola nuovamente otteniamo

$$H = rr' \cos \theta \cos \theta' (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) + r \cos \theta \frac{\omega'}{2} (\mathbb{I} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{n}') + r' \cos \theta' \frac{\omega}{2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \otimes \mathbb{I}) + \frac{\omega \omega'}{4} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{n}'). \quad (35)$$

Il primo, il secondo ed il terzo termine dell'espressione precedente sono termini locali⁷. Soltanto l'ultimo termine (non locale) $\frac{\omega \omega'}{4} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{n}')$ è in grado di

⁷Essi non possono creare entanglement.

creare entanglement. Segue che l'operatore di evoluzione dell'entanglement è dato da

$$U(t) = \exp \left\{ -i \frac{\omega\omega'}{4} t (\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{n}') \right\} = \cos \left(\frac{\omega\omega'}{4} t \right) \mathbb{I} - i \sin \left(\frac{\omega\omega'}{4} t \right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{n}'). \quad (36)$$

Se lo stato iniziale di due \mathcal{PT} qubit è $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$, allora al tempo t lo stato sarà dato da

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-i \frac{\omega\omega'}{4} t (\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{n}')} |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= \alpha(t) |0\rangle |0\rangle + \beta(t) |0\rangle |1\rangle + \gamma(t) |1\rangle |0\rangle + \delta(t) |1\rangle |1\rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

dove $\alpha(t) = \cos \left(\frac{\omega\omega'}{4} t \right) + i \sin \left(\frac{\omega\omega'}{4} t \right) \frac{4}{\omega\omega'} r r' \sin \theta \sin \theta'$, $\beta(t) = \frac{4}{\omega\omega'} \sin \left(\frac{\omega\omega'}{4} t \right) s' r \sin \theta$, $\gamma(t) = \frac{4}{\omega\omega'} \sin \left(\frac{\omega\omega'}{4} t \right) s r' \sin \theta'$ e $\delta(t) = -i \frac{4 s s'}{\omega\omega'} \sin \left(\frac{\omega\omega'}{4} t \right)$. Con ciò siamo riusciti a vedere che lo stato $|\Psi(t)\rangle$ è entangled. Per completezza, ricordiamo che $|\Psi(t)\rangle$ non è normalizzato come non lo era lo stato iniziale (rispetto al prodotto interno \mathcal{CPT}).

6 Capacità di entangling delle Hamiltoniane non Hermitiane

In [3] è descritta una procedura per l'ottimizzazione dell'entangling tra particelle. Per Hamiltoniane di interazione Hermitiane è noto che:

1. è meglio partire con uno stato iniziale entangled;
2. l'entanglement iniziale migliore è indipendente dal processo fisico;
3. è possibile migliorare la capacità di entanglement se permettiamo operazioni locali veloci;
4. in alcuni casi l'entanglement migliora se usiamo sistemi ausiliari.

Lo scopo della sezione corrente è quello di definire il rate dell'entanglement e vedere se è possibile stilare una ricetta simile alla precedente per le Hamiltoniane non Hermitiane⁸.

Sia $|\Psi(0)\rangle$ uno stato iniziale che evolve in $|\Psi(t)\rangle$ per mezzo di una Hamiltoniana di interazione H che non è Hermitiana. Adesso, $|\Psi(t)\rangle$ può essere uno stato entangled e la capacità di creare entanglement dipende dal tipo di interazione e dallo stato di partenza. Siccome vogliamo quantificare la produzione di entanglement, definiamo il rate di entanglement $\Gamma(t) = \frac{dE(t)}{dt}$, dove $E(t) = E(\Psi)$ è la misura dell'entanglement per lo stato $|\Psi(t)\rangle$ (ad esempio fatta con l'entropia di von Neumann della matrice densità ridotta).

⁸Al momento non c'è nessuna prova della veridicità o meno del risultato che otterremo. Si spera che sia corretto.

Sia $|\Psi(t)\rangle$ lo stato di due \mathcal{PT} qubits al tempo t ; esso è espresso dalla forma

$$|\Psi(t)\rangle = \sqrt{\lambda_1(t)}|a_1(t)\rangle|b_1(t)\rangle + \sqrt{\lambda_2(t)}|a_2(t)\rangle|b_2(t)\rangle, \quad (38)$$

dove $\langle a_1(t)|a_2(t)\rangle_{\mathcal{CP}\mathcal{T}} = \langle b_1(t)|b_2(t)\rangle_{\mathcal{CP}\mathcal{T}} = 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. La quantità di entanglement al tempo t è data dall'entropia della matrice densità ridotta (dove adesso $\lambda_1 = \lambda$)

$$E(\Psi(t)) = -\lambda(t) \log \lambda(t) - (1 - \lambda(t)) \log(1 - \lambda(t)). \quad (39)$$

Il rate di entanglement è dato da

$$\Gamma(t) = \frac{dE(\Psi)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (40)$$

Usando l'equazione di Schrödinger abbiamo

$$\frac{d\lambda}{dt} = 2\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \Im \langle a_1(t) | \langle b_1(t) | H | a_2(t) \rangle | b_2(t) \rangle_{\mathcal{CP}\mathcal{T}}. \quad (41)$$

Segue che il rate è

$$\Gamma(t) = f(\lambda) |h(H, a_1, a_2)|, \quad (42)$$

dove $f(\lambda) = 2\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \frac{dE}{d\lambda}$ e $h(H, a_1, b_1) = \langle a_1(t) | \langle b_1(t) | H | a_2(t) \rangle | b_2(t) \rangle_{\mathcal{CP}\mathcal{T}}$. Se con h_{max} indichiamo il massimo valore di $|h(H, a_1, b_1)|$, allora scriviamo $h_{max} = \max_{\|a_1\|, \|b_1\|=1} |\langle a_1(t) | \langle b_1(t) | H | a_2(t) \rangle | b_2(t) \rangle_{\mathcal{CP}\mathcal{T}}|$. Come nel caso Hermitiano, se risolviamo per $\frac{d\lambda}{dt}$, otteniamo $\lambda(t) = \sin^2(h_{max}t + \phi_0)$, con $\lambda_0 = \sin^2 \phi_0$. L'evoluzione dell'entanglement è caratterizzata da h_{max} che dipende dalla Hamiltoniana di interazione. Così, per una H data, h_{max} misura la capacità di creare entanglement. Il rate soddisfa

$$\Gamma(t) \leq \log \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) h_{max}, \quad (43)$$

che mostra che il limite è proporzionale alla capacità dell'entangling.

7 Brachistocrona quantistica 2D \mathcal{PT} -simmetrica: *Faster than Hermitian Time Evolution*

In vari punti del testo abbiamo fatto riferimento agli studi del Bender circa le Hamiltoniane non Hermitiane ma \mathcal{PT} -simmetriche. Sono state riassunte brevemente le caratteristiche di una teoria quantistica \mathcal{PT} -simmetrica e fino ad ora ci siamo preoccupati di trovare le proprietà di entangling delle suddette Hamiltoniane. Ma perchè è stato fatto tutto ciò? Chi ha già preso visione di [1] e [2] saprà la risposta, ma qui intendiamo riportare il risultato, se non il più importante sicuramente quello più affascinante, ricavato dal Bender.

Il lettore, a questo punto, potrebbe giustamente porsi due quesiti:

1. le Hamiltoniane non Hermitiane \mathcal{PT} -simmetriche hanno una valenza fisica, cioè descrivono fenomeni che possono essere osservati sperimentalmente?

Sì. Oltre ad avere grande interesse dal punto di vista puramente teorico, in letteratura sono già comparse, anche molto tempo prima degli studi del Bender, le Hamiltoniane che stia considerando.

Tre esempi: nel 1959 Wu notò che lo stato fondamentale di un sistema di Bose di sfere dure è descritto da una Hamiltoniana non Hermitiana (stato fondamentale reale e predisse che tutti i livelli lo fossero); Hollowood osservò che la Hamiltoniana non Hermitiana del reticolo complesso di Toda aveva livelli d'energia reali; Hamiltoniane della forma $H = p^2 + ix^3$ compaiono negli studi sulla singolarità del bordo di Lee-Yang. Successivamente è stato visto che tali Hamiltoniane presentavano una simmetria \mathcal{PT} non rotta.

2. Mostafazadeh ha dimostrato che esiste una trasformazione di *similitudine* che mappa una Hamiltoniana non Hermitiana \mathcal{PT} -simmetrica H in una equivalente Hermitiana h ($h = e^{-\mathcal{Q}/2} H e^{\mathcal{Q}/2}$); ma allora le Hamiltoniane \mathcal{PT} -simmetriche sono fisicamente nuove e distinte dalle Hermitiane, oppure descrivono esattamente gli stessi processi fisici rappresentati da queste ultime?

Qui non è per nulla semplice rispondere. Vediamo la domanda da due punti di vista.

Seguendo il risultato di Mostafazadeh uno potrebbe concludere che, vista l'esistenza della trasformazione, le due Hamiltoniane, H e h , danno i medesimi risultati e quindi la stessa fisica.

Ora sul fatto che diano gli stessi risultati non c'è dubbio (sebbene sia estremamente complicato trovare la trasformazione, esiste almeno un caso in cui è stata vista esplicitamente), però resta aperta la questione legata al fatto che la fisica sia effettivamente uguale. Infatti la trasformazione da H a h è una *similitudine* e non una unitaria. Perciò, mentre gli autovalori sono gli stessi, la relazione tra vettori è diversa: coppie di vettori che sono ortogonali vengono mappati in coppie di vettori che non lo sono. Di conseguenza, esperimenti che misurano relazioni vettoriali possono distinguere tra H e h .

Concentriamoci sul secondo punto di vista e risolviamo il problema della brachistocrona quantistica sia con la meccanica quantistica convenzionale

che mediante quella \mathcal{PT} -simmetrica.

Il termine *brachistocrona* significa “curva del tempo più corto”. Pertanto, il problema della *brachistocrona quantistica* si definisce come segue: supponiamo siano dati gli stati iniziali e finali, $|\psi_I\rangle$ e $|\psi_F\rangle$, nello spazio di Hilbert. Esistono un’infinità di Hamiltoniane H sotto cui $|\psi_I\rangle$ evolve in $|\psi_F\rangle$ in un certo tempo t :

$$|\psi_F\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi_I\rangle. \quad (44)$$

Il problema consiste nel trovare la Hamiltoniana H che minimizza l’evoluzione temporale t a condizione che ω , la differenza tra il più grande ed il più piccolo autovalore di H , si mantenga fissa. L’evoluzione più breve è contrassegnata da τ .

Nella meccanica quantistica Hermitiana esiste un limite inferiore inevitabile τ sul tempo richiesto a trasformare uno stato in un altro. Pertanto, il tempo minimo necessario per cambiare uno stato con spin up in uno con spin down di un elettrone è una quantità fisicamente importante perchè dà un limite superiore alla velocità di un calcolatore quantistico.

Per primo vediamo come trovare il valore di τ per il caso di Hamiltoniana Hermitiana: questo problema è facile perchè la ricerca del tempo di evoluzione ottimale τ richiede soltanto la soluzione di un problema più semplice, quello di trovare l’evoluzione temporale ottimale per le matrici 2×2 che agiscono sul sottospazio bidimensionale generato da $|\psi_I\rangle$ e $|\psi_F\rangle$. Per risolvere la versione Hermitiana della brachistocrona quantistica, scegliamo la base in modo tale che gli stati iniziali e finali siano dati da

$$|\psi_I\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\psi_F\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (45)$$

dove $|a|^2 + |b|^2 = 1$. La Hamiltoniana Hermitiana 2×2 più generale è

$$H = \begin{pmatrix} s & re^{-i\theta} \\ re^{i\theta} & u \end{pmatrix}, \quad (46)$$

dove i parametri r , s , u e θ sono reali. Il vincolo sugli autovalori è

$$\omega^2 = (s - u)^2 + 4r^2. \quad (47)$$

La Hamiltoniana H nella (46) può essere espressa in termini delle matrici di Pauli come $H = \frac{1}{2}(s + u)\mathbb{I} + \frac{1}{2}\omega\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$, dove $\vec{n} = \frac{2}{\omega}(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{s-u}{2})$ è un versore. Ricordando che

$$e^{i\phi\vec{\sigma} \cdot \vec{n}} = \cos \phi \mathbb{I} + i \sin \phi \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (48)$$

che semplifica la relazione $|\psi_F\rangle = e^{-iH\tau/\hbar}|\psi_I\rangle$ a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{-(s+u)t/2\hbar} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) - i\frac{s-u}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \\ -i\frac{2r}{\omega} e^{i\theta} \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Dalla seconda componente della (49) otteniamo $|b| = \frac{2r}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right)$, la quale fornisce il tempo necessario a trasformare lo stato iniziale: $t = \frac{2\hbar}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega|b|}{2r}\right)$. Per ottimizzare questa relazione per tutti gli $r > 0$, osserviamo che la (47) implica che il massimo valore di r è $\frac{1}{2}\omega$, dove $s = u$. Il tempo ottimale è quindi

$$\tau = \frac{2\hbar}{\omega} \arcsin |b|. \quad (50)$$

Notiamo che se $a = 0$ e $b = 1$, abbiamo $\tau = \pi\hbar/\omega$ (*Fleming bound*) per il tempo più breve necessario a trasformare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nello stato ortogonale $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Come interpretiamo il valore di τ nella (50)? Sebbene questa equazione assomigli al principio di indeterminazione (nella versione tempo-energia), essa è proprio la più semplice affermazione *velocità* \times *tempo* = *distanza*. Il vincolo (47) su H è un limite alla deviazione standard ΔH della Hamiltoniana, dove ΔH su uno stato normalizzato $|\psi\rangle$ è data da $(\Delta H)^2 = \langle\psi|H^2|\psi\rangle - \langle\psi|H|\psi\rangle^2$. Il massimo valore di ΔH è $\omega/2$. La velocità di evoluzione di uno stato quantistico è data da ΔH^9 . La distanza tra lo stato iniziale $|\psi_I\rangle$ e lo stato finale $|\psi_F\rangle$ è $\delta = 2 \arccos(|\langle\psi_F|\psi_I\rangle|)$. Perciò, il tempo più breve τ affinché $|\psi_I\rangle$ evolva in $|\psi_F\rangle = e^{-iH\tau/\hbar}|\psi_I\rangle$ è limitato inferiormente in quanto la velocità è limitata superiormente, mentre la distanza rimane fissa. La Hamiltoniana H che realizza il tempo di evoluzione più corto può essere compresa come segue: la deviazione standard ΔH della Hamiltoniana (46) è r . Poichè ΔH è limitata da $\omega/2$, per massimizzare la velocità di evoluzione (e minimizzare il tempo di evoluzione) scegliamo $r = \omega/2$.

Adesso eseguiamo la stessa ottimizzazione per la Hamiltoniana complessa 2×2 non Hermitiana \mathcal{PT} -simmetrica (9). Seguendo la stessa procedura usata precedentemente, abbiamo

$$\omega^2 = 4s^2 - 4r^2 \sin^2 \theta. \quad (51)$$

La condizione di simmetria \mathcal{PT} non rotta garantisce la positività di ω^2 . Questa equazione sottolinea la differenza chiave tra le Hamiltoniane Hermitiane e quelle \mathcal{PT} -simmetriche: l'equazione corrispondente (47) per la Hamiltoniana Hermitiana possiede una *somma* di quadrati, mentre la (51) una *differenza*. Pertanto, le Hamiltoniane Hermitiane esibiscono un andamento ellittico, che porta ad un limite inferiore diverso da zero per il valore ottimale τ . La natura iperbolica della (51) consente a τ di avvicinarsi a zero perchè, come vedremo, gli elementi della matrice della Hamiltoniana \mathcal{PT} -simmetrica possono essere resi grandi senza violare il vincolo sull'energia $E_+ - E_- = \omega$.

L'analogo \mathcal{PT} -simmetrico dell'equazione di evoluzione (49) è

$$e^{-iHt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e^{-itr \cos \theta/\hbar}}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{2\hbar} - \alpha\right) \\ -i \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix}. \quad (52)$$

⁹Dalla relazione di Anandan-Aharonov.

Applichiamo questo risultato alla stessa coppia di vettori esaminata nel caso Hermitiano: $|\psi_I\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|\psi_F\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (notiamo che questi vettori non sono ortogonali rispetto al prodotto interno \mathcal{CPT}). L'equazione (52) mostra che l'evoluzione temporale per arrivare a $|\psi_F\rangle$ da $|\psi_I\rangle$ è $t = (2\alpha - \pi)\hbar/\omega$. Ottimizzando questo risultato sui valori possibili di α , troviamo che come α si avvicina a $\pi/2$ il tempo ottimale τ tende a zero. Questo risultato è abbastanza generale e vale anche per classi ampie di Hamiltoniane non Hermitiane.

Notiamo che nel limite $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha \rightarrow 0$. Tuttavia, in termini di α , il vincolo (51) diventa $\omega^2 = 4s^2 \cos^2 \alpha$. Dal momento che ω è fissato, affinché α si avvicini a $\frac{\pi}{2}$ dobbiamo richiedere che $s \gg 1$. Allora dalla relazione $\sin \alpha = \frac{r}{s} \sin \theta$ segue che $|r| \sim |s|$, così dobbiamo richiedere che anche $r \gg 1$. Evidentemente, allo scopo di rendere $\tau \ll 1$, gli elementi della matrice della Hamiltoniana \mathcal{PT} -simmetrica (9) devono essere grandi.

Il risultato dimostrato qui non viola il principio di indeterminazione. Infatti, le Hamiltoniane Hermitiane e \mathcal{PT} -simmetrica condividono le proprietà che (i) l'evoluzione temporale è data da $\pi\hbar/\omega$ e (ii) $\Delta H \leq \omega/2$. La differenza chiave è che una coppia di stati tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono ortogonali in una teoria Hermitiana, ma hanno separazione $\delta = \pi - 2|\alpha|$ nella teoria \mathcal{PT} -simmetrica. Questo perchè lo spazio metrico di Hilbert della teoria quantistica \mathcal{PT} -simmetrica *dipende dalla Hamiltoniana*. Quindi, scegliendo in modo opportuno il parametro α , creiamo un effetto tipo “buco di tarlo” nello spazio di Hilbert; ovvero, troviamo un cammino nello spazio di Hilbert da un stato iniziale $|\psi_I\rangle$ ad uno finale $|\psi_F\rangle$ che è più corto di quello Hermitiano.

Tutto ciò può essere implementato in pratica? Se la risposta è affermativa, allora le implicazioni sarebbero immense: computazione, crittografia, QIT in generale. Attualmente esistono solo esperimenti *gedanken*. Vediamo quello pensato dal Bender.

Un filtro Stern-Gerlach crea un fascio di elettroni con spin up. Il fascio quindi attraversa una “scatola nera” che contiene un dispositivo governato da una Hamiltoniana \mathcal{PT} -simmetrica che flippa gli spin in un tempo molto piccolo. Il fascio uscente entra in un secondo dispositivo Stern-Gerlach in cui si verifica che gli elettroni adesso siano in stati di spin down. In effetti, la scatola nera sta applicando un campo magnetico nella direzione complessa $(s, 0, ir \sin \theta)$. Se l'intensità del campo è sufficientemente forte, allora gli spin possono essere flippati in tempo praticamente zero perchè il percorso complesso che unisce questi due stati è arbitrariamente piccolo (senza violare il vincolo energetico).

Sottolineiamo il fatto che l'intero processo di rotazione di spin *non si realizza con un'operazione unitaria*. Lo schema descritto consta, in verità, di tre regimi:

1. la preparazione di uno stato di spin up in un setup Hermitiano;

2. il flip dello spin usando una Hamiltoniana \mathcal{PT} -simmetrica;
3. la verifica dello stato di spin down in un setup Hermitiano.

Così, *l'operazione è localmente unitaria*, ma lo scambio tra descrizione Hermitiana e quella \mathcal{PT} -simmetrica non è unitaria.

Naturalmente è giusto chiedersi quale sia il ruolo delle osservabili nel presente esperimento. Ad esempio: l'operatore di spin nella meccanica quantistica convenzionale può o non può essere interpretato come un operatore di spin nella controparte \mathcal{PT} -simmetrica? La questione è aperta.

Inoltre, nulla viene detto in merito al processo di cambio di regime. Günther e Samsonov in [4] tentano di dare una risposta esponendo un metodo che potenzialmente potrebbe essere un punto di partenza per un'implementazione sperimentale diretta.

L'idea consiste nel reinterpretare la brachistocrona (9) come un sottosistema \mathcal{PT} -simmetrico di un sistema quantistico convenzionale più grande. Per fare ciò prendono gli autostati di H che non sono ortogonali rispetto al prodotto interno Hermitiano; poi fanno la coniugazione Hermitiana di H . Gli autostati di H^\dagger sicuramente non saranno ortogonali rispetto al prodotto interno convenzionale. A questo punto normalizzano opportunamente i 4 autostati, e li usano per formare una base più che completa (POVM) nello spazio di Hilbert bidimensionale Hermitiano. L'idea chiave è quella di inserire tale base in uno spazio di Hilbert più grande a formare una base ortogonale usando la dilatazione di Naimark. In questo modo sono in grado di costruire una Hamiltoniana Hermitiana tale che i suoi autostati siano esattamente il quattro stati così ottenuti. Usando tale Hamiltoniana è possibile costruire un moto unitario standard in modo tale che il moto indotto, ottenuto dalla proiezione sul sottospazio bidimensionale, è caratterizzato dal moto \mathcal{PT} -simmetrico (52).

Così, i due autori sono stati in grado di far vedere che il flip veloce può, in linea di principio, essere realizzato nella meccanica quantistica convenzionale mediante una combinazione di un moto unitario ed una proiezione in uno spazio di Hilbert più grande: uno dovrebbe accoppiare lo spin ad una particella ausiliaria (o tramite una proiezione o un'operazione unitaria), applicare un'evoluzione unitaria nello spazio di Hilbert più grande del sistema combinato, ed infine proiettare fuori la particella ausiliaria per recuperare lo spin nello stato trasportato¹⁰. Il risultato netto di queste operazioni può essere caratterizzato dalla (52).

¹⁰Il Fleming bound è apparentemente violato a causa del fatto generale che quando un moto unitario viene proiettato in un sottospazio dello spazio di Hilbert, la dinamica risultante non ha bisogno di rispettare le leggi dell'unitarietà.

8 Conclusioni

Il presente lavoro ha cercato di tradurre nel linguaggio della QIT i risultati ottenuti dal Bender in [1]. In particolare abbiamo visto come sia possibile avere entanglement anche nella meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica e come crearlo a partire da Hamiltoniane non Hermitiane ma che possiedono una simmetria \mathcal{PT} non rotta. Naturalmente, l'entanglement in questa teoria non viene realizzato tramite i qubits ma mediante i \mathcal{PT} qubits, cioè i bit quantistici della meccanica quantistica \mathcal{PT} -simmetrica. La loro differenza trae origine dalla diversa definizione di prodotto interno nei due settori. Infatti abbiamo visto che qubits che sono ortogonali nella meccanica quantistica convenzionale non lo sono più nella teoria \mathcal{PT} -simmetrica, e viceversa. Ma il fatto ancor più interessante, sempre connesso con la definizione di prodotto interno, è l'entanglement. Le proprietà di entanglement degli stati quantistici cambiano anch'esse se andiamo da una teoria all'altra: uno stato massimamente entangled (entropia di von Neumann uguale ad uno) nella teoria usuale avrà un'entropia minore nella teoria \mathcal{PT} -simmetria, e viceversa. Ciò ha ripercussioni non banali per quanto concerne lo scambio di informazioni tra due soggetti.

Questi fatti sembrano confermare in qualche modo l'idea del Bender circa la questione se effettivamente le Hamiltoniane non Hermitiane \mathcal{PT} simmetriche descrivano una fisica diversa da quelle Hermitiane (alla luce dell'equivalenza trovata da Mostafazadeh con la sua trasformazione di similitudine). Infatti, sembra possibile che sotto trasformazioni unitarie locali (o più in generale sotto LOCC) l'equivalenza tra teoria quantistica usuale e pseudo-Hermitiana¹¹ possa non esistere.

Come abbiamo visto c'è ancora molto da fare, soprattutto a livello sperimentale: lo studio sull'entanglement può rappresentare un'opportunità da sfruttare. Sebbene teoricamente tutto sta in piedi pare necessaria un'implementazione che metta chiaramente in luce le differenze dinamiche.

¹¹È il contesto matematico, molto generale, in cui si trova la classe di Hamiltoniane non Hermitiane \mathcal{PT} -simmetriche.

Riferimenti bibliografici

- [1] C. M. Bender, *Rep. Prog. Phys.* **70** (2007) 947.
- [2] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones e B. K. Meister, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 040403.
- [3] W. Dür, G. Vidal, J. I. Cirac, N. Linden e S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 137901.
- [4] U. Günther e B. F. Samsonov, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 230404.
- [5] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43**, 205 (2002).
- [6] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 7081 (2003).
- [7] A. Mostafazadeh, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 130502.
- [8] S. Popescu e D. Rohrlich, *Phys. Rev. A* **56** (1997) R3319.