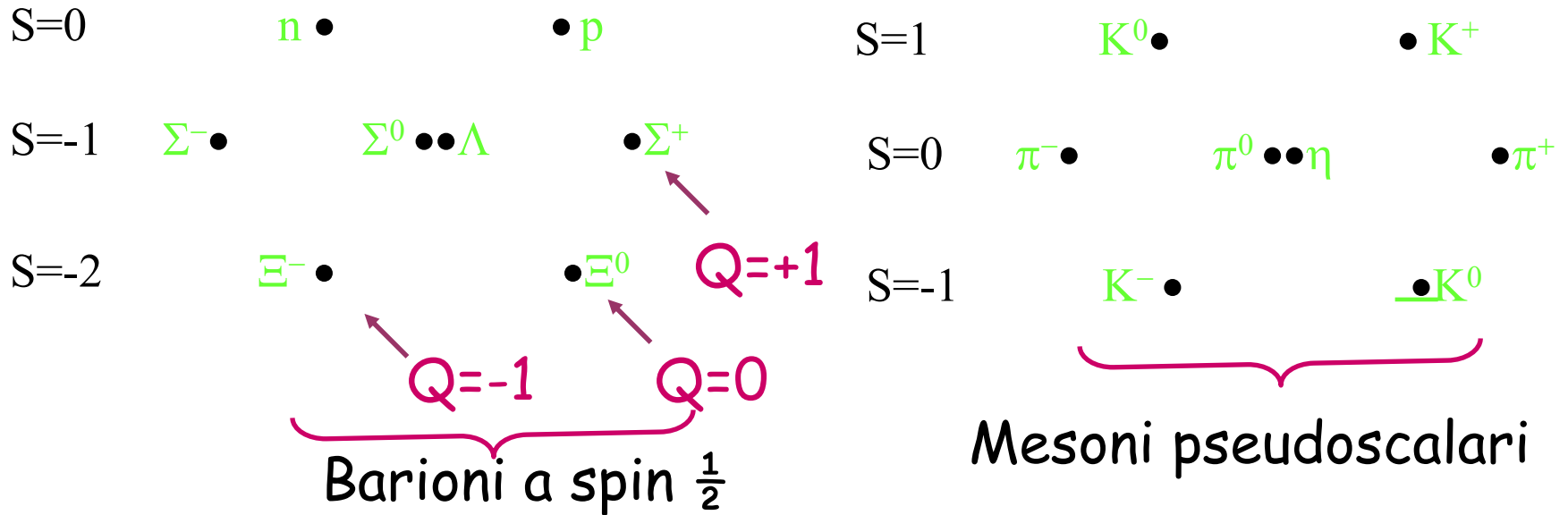


Modello a quark (<1969)

Inizialmente un modo per classificare gli adroni: mesoni e barioni.

1961 classificazione per carica, massa e stranezza

Gell-Mann (“The eightfold way”): i mesoni e barioni possono essere classificati (massa, carica, stranezza) in ottetti e decupletti. Ad es. gli 8 mesoni e barioni più leggeri (spin $\frac{1}{2}$) sono ottetti:



I barioni più pesanti hanno spin $\frac{3}{2}$ e sono classificabili in decupletti con circa la stessa massa

S=0	$\Delta^- \bullet$	$\Delta^0 \bullet$	$\Delta^+ \bullet$	$\Delta^{++} \bullet$	m=1232
S=-1	$\Sigma^{*-} \bullet$	$\Sigma^{*0} \bullet$	$\Sigma^{*+} \bullet$		m=1384
S=-2		$\Xi^{*-} \bullet$	$\Xi^{*0} \bullet$		m=1533
S=-3 spin 3/2		$\Omega^- \bullet$			m=1672

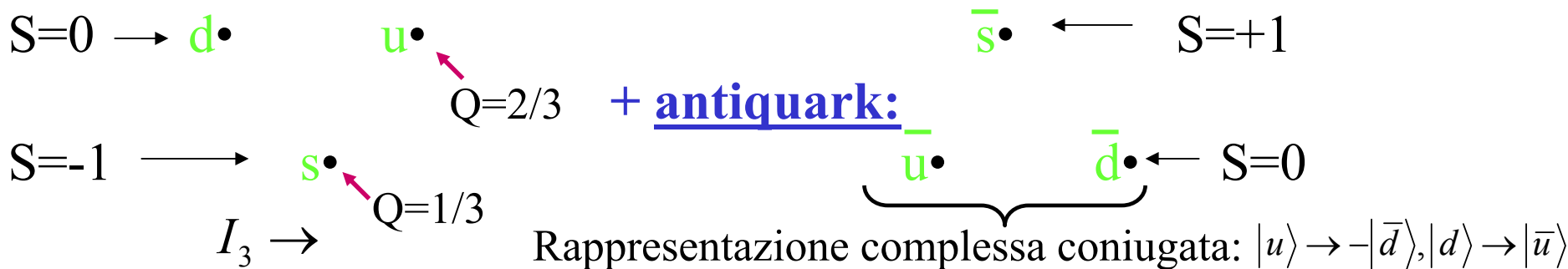
Con una differenza di massa Δm corrispondente a $\Delta S=1$ di circa 150 MeV.

Esistono anche ottetti di altri mesoni: con notazione spettroscopica $^{2S+1}L_J$:

$$^1S_0 \quad ^3S_1 \quad ^3P_0 \quad ^3P_1 \quad ^3P_2 \quad ^3D_3 \quad \dots$$

Anche gli antibarioni sono organizzati in ottetti e decupletti. Per i mesoni invece le antiparticelle si trovano nella posizione diametralmente opposta nel multipletto

Gell-Mann/Zweig (1964): la struttura in ottetti, decupletti (e singoletti) è una conseguenza del fatto che gli adroni sono composti di sottostrutture: i quark che hanno spin $1/2$ e numero barionico $1/3$. I quark sono il doppietto (u,d) e il singoletto s.



Ai quark viene assegnato anche un numero barionico $B=1/3$ ($-1/3$ agli antiquark).

La carica elettrica $Q=1/2(B+S)+I_3 = 1/2 Y + I_3$

Quark e antiquark sono distinti dalla ipercarica Y

I barioni sono stati composti da 3 quark: (qqq); $\bar{}$

I mesoni sono stati composti da quark-antiquark :(qq)

Nota che il fatto che esistano stati legati (qqq) e non qq e' indice che il mediatore non puo' essere l'equivalente del singolo fotone con $C=-1$

Ci sono 9 possibili modi di combinare (u,d,s) con (\bar{u},\bar{d},\bar{s}) creando 9 mesoni pseudo scalari, inoltre gli stati ($u\bar{u}$), ($d\bar{d}$), ($s\bar{s}$) hanno tutti $Q=0$, $S=0$ e non sono distinguibili. Quindi gli stati fisici corrispondenti: π^0, η, η' sono un miscuglio di ($u\bar{u}$), ($d\bar{d}$), ($s\bar{s}$).

Eventuali stati **non** del tipo (qqq) o ($q\bar{q}$) (stati esotici) (es. (qqqq) o (qq) avrebbero carica frazionaria) potrebbero anche esistere: recentemente c'è evidenza sperimentale per uno stato (uudds). Tali stati dovrebbero però anche essere compatibili con un'altra caratteristica dei quark: il colore e col fatto che le particelle fisiche sono senza colore.

Se L è il momento angolare orbitale la parità P dello stato ($q\bar{q}$) è definita e, nel caso i quark siano eguali, sono anche autostati di C , abbiamo autovalori di P e di C pari a:

$$P = (-1)^{L+1}; C = (-1)^{L+S}$$

Ex. $J/\Psi (c\bar{c})$, con $L=0$, $S=1$ ha $P=-1$ e $C=-1$

I quark leggeri u , d e s sono supposti avere una “massa” molto minore dell’energia tipica dell’interazione ($m_q \ll \lambda_{\text{QCD}}$) come conseguenza **i moti sono altamente relativistici e le energie di interazione magnetica** (stati di spin), in analogia con la QED, **sono rilevanti.**

Quark-antiquark, o quark,quark,quark possono combinarsi in modi diversi. di momento angolare L , livello di energia (tipo atomo di idrogeno), ma le differenze di energia (massa) risultano molto più grandi che nell’atomo di idrogeno).

I tre quark, u, d, s
dovrebbero comportarsi per le interazioni forti nello stesso modo:

SU(3): simmetria sotto trasformazione unitaria tra u, d, s

Simmetria SU(3) di sapore

L'invarianza delle interazioni forti nello spazio dell'isospin (2 componenti (p,n), (u,d)) porta alla conservazione dell'isospin I e I₃ e alla simmetria SU(2).

I quark sono ora 3: u,d,s (sapori) e la generalizzazione di SU(2) è SU(3) i.e.

Insieme delle rotazioni nello spazio dei 3 sapori (u,d,s) unitarie e a determinante =1 che lasciano invariati isospin e stranezza (ipercarica).

Gli stati si trasformano come: $\psi \rightarrow \psi' = U\psi = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{G})\psi = \exp(i\sum_j \alpha_j G_j)\psi$

α_j = insieme di parametri reali

G_j = insieme di operatori hermitiani (generatori).

Il numero dei generatori definisce l'**ordine del gruppo**. Il numero di generatori mutualmente commutanti definisce il **rango del gruppo**.

Torniamo a SU(2): agisce su vettori a 2 componenti (spinori) sia di spin ordinario, che di isospin forte o di isospin debole. Per rotazioni nello spazio di isospin le due componenti dello spinore si trasformano come:

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = U(\theta) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ ex. } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$$

$U(\theta)$ è una matrice 2x2 che si scrive: $U(\theta) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} / 2)$

$\vec{\theta}$ È un vettore che punta lungo l'asse di rotazione e ha modulo θ che è l'angolo di rotazione.

$\vec{\sigma}$ Sono le matrici di Pauli: $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$U(\theta)$ è una matrice unitaria (inverso= trasposto coniugato: $U^{-1}=U^{t*}$) a determinante =1. L'unitarietà implica che: $|\det U|^2 = 1 \rightarrow \det U = e^{i\alpha} \rightarrow U = e^{i\alpha} S, \text{ con } \det S = 1.$

L'insieme delle rotazioni $U(\theta)$ formano un gruppo: **SU(2)**. Le matrici di Pauli sono una rappresentazione bidimensionale (fondamentale) di SU(2). Ci sono rappresentazioni di SU(2) anche a una dimensione (banale) o a 3 dimensioni secondo cui si trasformano le particelle a spin 1 (vettoriali).

Le interazioni forti sono indipendenti dalla carica elettrica: p e n (u e d) sono intercambiabili: cioè sono un doppietto di isospin forte: l'invarianza per rotazioni nello spazio dell'isospin forte si scrive matematicamente come invarianza sotto SU(2)

Osservazione sperimentale: Le interazioni forti conservano anche

la stranezza S ex. $\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 (S = -1) + K^0 (S = +1)$

e il numero barionico B ex. $\pi^- p (B = +1) \rightarrow \pi^0 + n (B = +1)$

Combiniamo B e S in una nuova quantità: l'ipercarica forte Y:

$$Y = B + S = 2(Q - I_3)$$

Incorporiamo la conservazione di isospin e ipercarica in una singola struttura di gruppo

Il vettore minimale in questo spazio deve avere 3 componenti (u,d,s) e il gruppo relativo: insieme delle trasformazioni unitarie, unimodulari in questo spazio è **SU(3)**.

In SU(3) la più semplice rappresentazione dei generatori (oltre l'unità) sono 8 matrici linearmente indipendenti (a traccia nulla): G_j , equivalenti alle matrici di Pauli in SU(2). Le regole di commutazione tra tali matrici sono (algebra di Lie):

$$[G_i, G_j] = 2i \cdot f_{ijl} G_l \quad \begin{array}{c|cccccccc} ij\ l & 123 & 147 & 156 & 246 & 257 & 345 & 367 & 458 & 678 \\ \hline f_{ijl} & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{array}$$

f_{ijl} sono antisimmetrici e sono chiamati costanti di struttura del gruppo.

Possibile rappresentazione dei generatori G (Gell Mann 1964) a traccia nulla e lin indep.:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{bmatrix}, G_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

L'ordine del gruppo è 8
e il rango è 2
N.B. G_1, G_2, G_3 hanno
la stessa algebra di
SU(2)

Nota che le matrici G operano uno scambio tra i quark (simmetria dell'interazione):
 $G_1 : 1 \leftrightarrow 2$, $G_4 : 1 \leftrightarrow 3$, $G_6 : 2 \leftrightarrow 3$, G_2, G_5, G_7 lo stesso ma con una fase, le rimanenti:
 G_3 e G_8 sono diagonali. G_1, G_2, G_3 sono gli operatori di isospin e G_8 quello di ipercarica.

Esiste anche un'altra rappresentazione di $SU(3)$ (necessaria per definire un prodotto scalare invariante: Ψ^*): $\psi^* \rightarrow \psi'^* = U^* \psi^* = \exp(i\vec{\alpha} \cdot (-\vec{G}^*)) \psi^*$

In $SU(2)$ $G \equiv -G^*$, in $SU(3)$ G non è equivalente a G^* . In particolare $3 \neq 3^*$ ($2=2^*$)

Infatti per $-G_1^*, -G_2^*$ e $-G_3^*$ esiste una trasformazione unitaria R che cambia $-G_i^* \rightarrow G_i$

da notare che $G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ già soddisfa $-G_2^* = G_2$

Quindi R deve commutare con G_2 : def: $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Cioè se usiamo come rappresentazione per gli antiquark $R|\bar{q}\rangle$ si possono usare come generatori di rotazione nello spazio dell'isospin G_1, G_2, G_3 sia per i quark che per gli antiquark

quindi i quark sono : $u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, gli antiquark $\bar{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $-\bar{d} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Possiamo quindi costruire stati di quark e antiquark, prendendo gli stati quark-quark
 Con algebra dello spin $\frac{1}{2}$, ad es nucleone-nucleone oppure quark-antiquark,
 con la sostituzione:

$$u \rightarrow -\bar{d}, d \rightarrow \bar{u}$$

Stati di isospin I di quark-quark e di quark-antiquark: tripletto I=1 e singoletto I=0

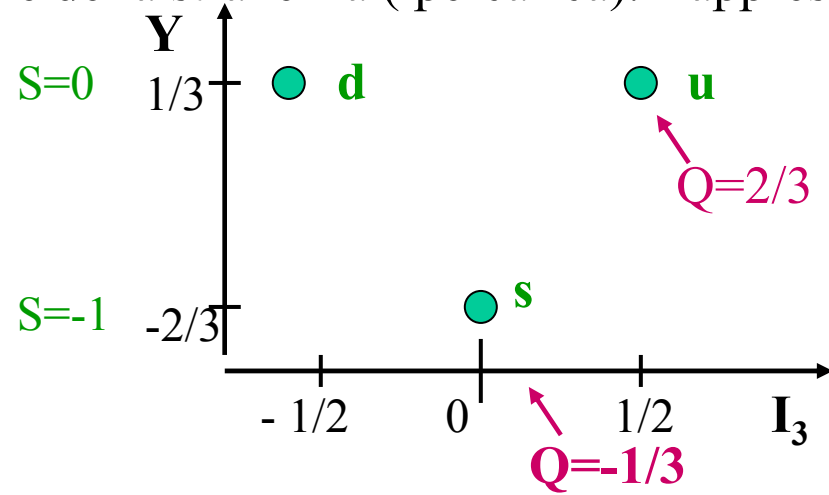
$I = 1$	$I = 1$	$I = 0$	$I = 0$
$ uu\rangle$	$- u\bar{d}\rangle$	$\frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}}$	$\frac{ u\bar{u}\rangle - d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{ u\bar{u}\rangle + d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{ ud\rangle + du\rangle}{\sqrt{2}}$	$\frac{ u\bar{u}\rangle - d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$		
$ dd\rangle$	$ d\bar{u}\rangle$		

Lo stato di tripletto I=1, descrive i pioni carichi e il $\pi^0 = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$

Lo stato di tripletto I=0, descrive ad es. a $\omega^0 = \frac{|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$

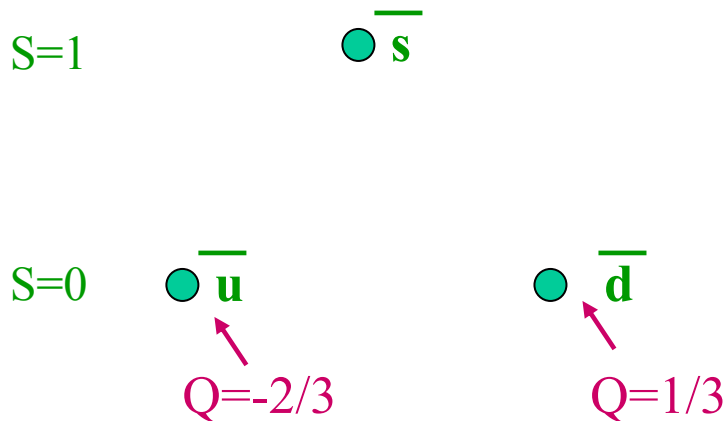
Per l'ipercarica notiamo che la trasformazione R lascia la matrice $-G^*_8$ invariata

Rappresentazione grafica degli autovettori di G_3 e G_8 (autostati dello spin isotopico e della stranezza (ipercarica)). Rappresentazione fondamentale 3dim di $SU(3)$.



Weight diagram:
l'autovettore è un punto nel piano
e la posizione è l'autovalore

In $SU(2)$ $G \equiv -G^*$, in $SU(3)$ G non è equivalente a G^* . In particolare $3 \neq 3^*$ ($2=2^*$)



Rappresentazione 3^* (coniugata)
fondamentale

Nel momento angolare e spin isotopico le rappresentazioni a più alta dimensione si possono generare sommando 2 o più rappresentazioni fondamentali,

tableaux di Young, ex:

Somma di 2 spin $\frac{1}{2}$: $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$ pesati con coefficienti CG

In SU(3): $3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$ i mesoni!

$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$????

$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ i barioni

$3^* \otimes 3^* \otimes 3^*$ gli antibarioni

$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 27$?????

All'interno di ciascun multipletto le particelle hanno lo stesso spin, parità, "massa" (ma non la stessa stranezza e carica elettriche che sono le qualità cui le interazioni

forti sono insensibili). La simmetria tra u d e s non è perfetta :

ci sono differenze di massa tra i quark e anche

le interazioni elettromagnetiche provocano piccole differenze di massa.

Novembre 1974: scoperta la $J/\Psi \rightarrow e^+e^-$ ($m \sim 3\text{GeV}$) e con vita media

"lunga" : $\tau \sim 10^{-20}$ s (adroni $\tau \sim 10^{-23}$ s): Interpretazione:

è uno stato costituito da nuovi quark c: $J/\Psi(c\bar{c})$.

(previsto anche teoricamente: meccanismo GIM)

Con la scoperta del quarto quark c il numero dei mesoni e barioni aumenta, e il gruppo di simmetria diventa **SU(4) di rango 3 e ordine $n^2-1=15$**
 Supermultipletti di SU(4):

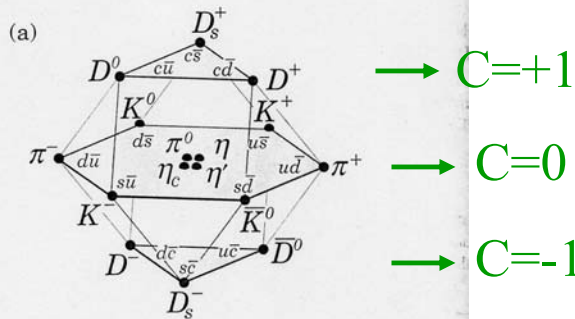
Mesoni:

$$4 \otimes \bar{4} = 1 \oplus 15$$

Barioni:

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 4 \oplus 20 \oplus 20 \oplus 20$$

pseudoscalari



vettori

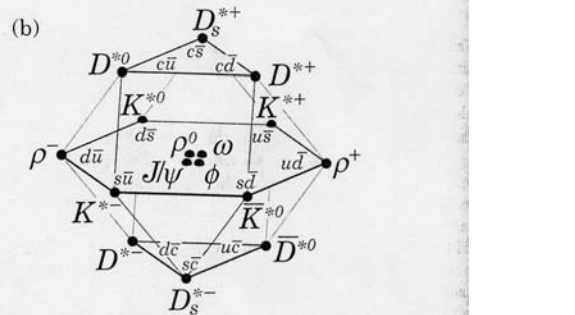


Figure 13.1: SU(4) 16-plets for the (a) pseudoscalar and (b) vector mesons made of u, d, s, and c quarks. The nonets of light mesons occupy the central planes, to which the $c\bar{c}$ states have been added. The neutral mesons at the centers of these planes are mixtures of $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$, and $c\bar{c}$ states.

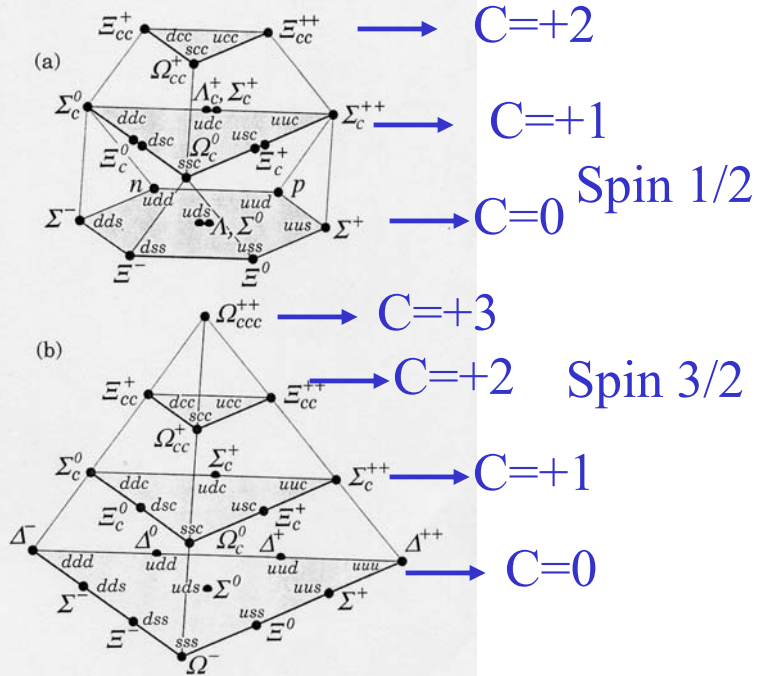


Figure 13.2: SU(4) multiplets of baryons made of u, d, s, and c quarks. (a) The 20-plet with an SU(3) octet. (b) The 20-plet with an SU(3) decuplet.

Torniamo ai barioni $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$, consideriamo il decupletto ($S=3/2$):

ddd	dud	duu	uuu	← “ Δ ”
dds	dus	uus		← “ Σ ”
	dss	uss		← “ Ξ ”
	sss			← “ Ω ”

N.B. Gli stati nei tre angoli sono simmetrici per lo scambio: anche gli altri dovrebbero esserlo. Ma problema per la simmetria BE/FD!

Dei barioni il singoletto è antisimmetrico, il decupletto simmetrico $8 \oplus 8$ misto

Se aggiungiamo anche lo spin $SU(3) \rightarrow SU(6)$, **stati di base: $u\uparrow u\downarrow, d\uparrow d\downarrow, s\uparrow s\downarrow$ e:**

$$6 \otimes \bar{6} = 35 \oplus 1 \quad 36 : [(3,2) \otimes (\bar{3},2)] = (8,3) \oplus (1,3) \text{ (nonetto vettoriale)} \oplus (8,1) \text{ (ottetto pseudoscalare)} \oplus (1,1) \text{ (singoletto pseudoscalare)}$$

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = 20 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 56$$

A misto S

ex. Il 56 sono i multipletti di $SU(3)$:
56 = (8,2) + (10,4)

Anche l’ottetto barionico è simmetrico sia per scambio di sapore che di spin, ad esempio lo stato del protone (uud):

$$\Phi(p, S_z=+1/2) = 1/\sqrt{18} [2u\uparrow u\uparrow d\downarrow + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow + 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow]$$

Particle data group

Table 13.2: Suggested $q\bar{q}$ quark-model assignments for most of the known mesons. Some assignments, especially for the 0^{++} multiplet and for some of the higher multiplets, are controversial. Mesons in bold face are included in the Meson Summary Table. Of the light mesons in the Summary Table, the $f_0(1500)$, $f_1(1510)$, $f_2(1950)$, $f_2(2300)$, $f_2(2340)$, and one of the two peaks in the $\eta(1440)$ entry are not in this table. Within the $q\bar{q}$ model, it is especially hard to find a place for the first two of these f mesons and for one of the $\eta(1440)$ peaks. See the “Note on Non- $q\bar{q}$ Mesons” at the end of the Meson Listings.

$N^{2S+1}L_J$	J^{PC}	$u\bar{d}, u\bar{u}, d\bar{d}$ $I = 1$	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ $I = 0$	$c\bar{c}$ $I = 0$	$b\bar{b}$ $I = 0$	$\bar{s}u, \bar{s}d$ $I = 1/2$	$c\bar{u}, c\bar{d}$ $I = 1/2$	$c\bar{s}$ $I = 0$	$\bar{b}u, \bar{b}d$ $I = 1/2$	$\bar{b}s$ $I = 0$	$\bar{b}c$ $I = 0$
1^1S_0	0^{-+}	π	η, η'	$\eta_c(1S)$	$\eta_b(1S)$	K	D	D_s	B	B_s	B_c
1^3S_1	1^{--}	ρ	ω, ϕ	$J/\psi(1S)$	$\Upsilon(1S)$	$K^*(892)$	$D^*(2010)$	D_s^*	B^*	B_s^*	
1^1P_1	1^{+-}	$b_1(1235)$	$h_1(1170), h_1(1380)$	$h_c(1P)$		K_{1B}^\dagger	$D_1(2420)$	$D_{s1}(2536)$			
1^3P_0	0^{++}	$a_0(1450)^*$	$f_0(1370)^*, f_0(1710)^*$	$\chi_{c0}(1P)$	$\chi_{b0}(1P)$	$K_0^*(1430)$					
1^3P_1	1^{++}	$a_1(1260)$	$f_1(1285), f_1(1420)$	$\chi_{c1}(1P)$	$\chi_{b1}(1P)$	K_{1A}^\dagger					
1^3P_2	2^{++}	$a_2(1320)$	$f_2(1270), f_2'(1525)$	$\chi_{c2}(1P)$	$\chi_{b2}(1P)$	$K_2^*(1430)$	$D_2^*(2460)$				
1^1D_2	2^{-+}	$\pi_2(1670)$	$\eta_2(1645), \eta_2(1870)$			$K_2(1770)$					
1^3D_1	1^{--}	$\rho(1700)$	$\omega(1650)$	$\psi(3770)$		$K^*(1680)^\ddagger$					
1^3D_2	2^{--}					$K_2(1820)$					
1^3D_3	3^{+-}	$\rho_3(1690)$	$\omega_3(1670), \phi_3(1850)$			$K_3^*(1780)$					
1^3F_4	4^{++}	$a_4(2040)$	$f_4(2050), f_4(2220)$			$K_4^*(2045)$					
2^1S_0	0^{-+}	$\pi(1300)$	$\eta(1295), \eta(1440)$	$\eta_c(2S)$		$K(1460)$					
2^3S_1	1^{--}	$\rho(1450)$	$\omega(1420), \phi(1680)$	$\psi(2S)$	$\Upsilon(2S)$	$K^*(1410)^\ddagger$					
2^3P_2	2^{++}	$a_2(1700)$	$f_2(1950), f_2(2010)$		$\chi_{b2}(2P)$	$K_2^*(1980)$					
3^1S_0	0^{-+}	$\pi(1800)$	$\eta(1760)$			$K(1830)$					

* See our scalar minireview in the Particle Listings. The candidates for the $I = 1$ states are $a_0(980)$ and $a_0(1450)$, while for $I = 0$ they are: $f_0(600)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, and $f_0(1710)$. The light scalars are problematic, since there may be two poles for one $q\bar{q}$ state and $a_0(980)$, $f_0(980)$ may be $K\bar{K}$ bound states.

† The K_{1A} and K_{1B} are nearly equal (45°) mixes of the $K_1(1270)$ and $K_1(1400)$.

‡ The $K^*(1410)$ could be replaced by the $K^*(1680)$ as the 2^3S_1 state.

$n^{2S+1}L_J$

Il charmonio

SLAC 1974:
 $e^+e^- \rightarrow \Psi$
 $\rightarrow e^+e^-$
 $\rightarrow \mu^+\mu^-$
 $\rightarrow \text{adroni}$

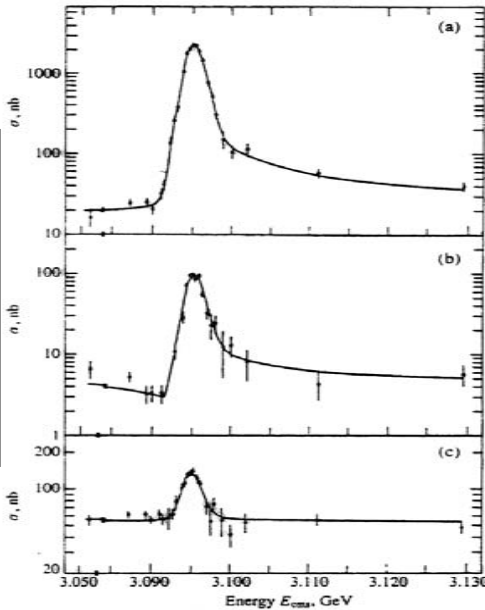


Fig. 4.1. Results of Augustin *et al.* (1974) showing the observation of the J/ψ resonance of mass 3.1 GeV, produced in e^+e^- annihilation at the SPEAR storage ring, SLAC. (a) $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$; (b) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $|\cos\theta| \leq 0.6$; (c) $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $|\cos\theta| \leq 0.6$.

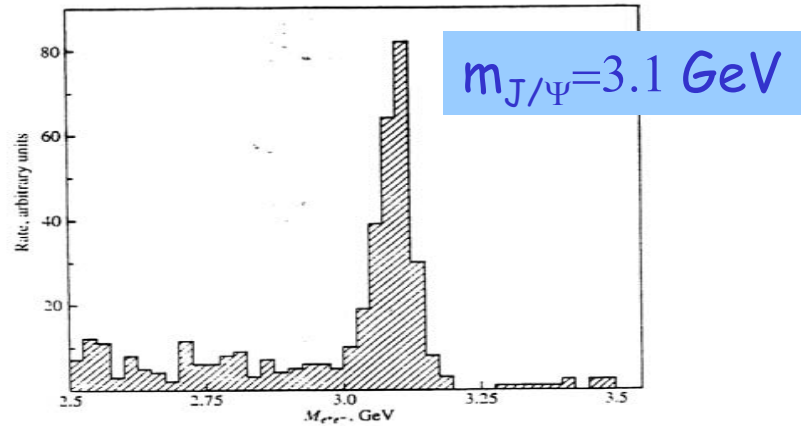


Fig. 4.2. Results of Aubert *et al.* (1974) indicating the narrow resonance J/ψ in the invariant-mass distribution of e^+e^- pairs produced in inclusive reactions of protons with a beryllium target. $p + \text{Be} \rightarrow e^+e^- + X$. The experiment was carried out with the 28 GeV AGS at Brookhaven National Laboratory.

BNL 1974: $p + \text{Be} \rightarrow J/\Psi + X$
 $\quad \quad \quad \rightarrow e^+e^-$

La larghezza dei picchi è dominata dalla risoluzione sperimentale. La sezione d'urto per la produzione della risonanza (Breit Wigner)

$$\sigma(E)_{(e^+e^- \rightarrow \Psi \rightarrow e^+e^-)} = \frac{4\pi\tilde{\lambda}^2 (2J+1)\Gamma_{e^+e^-}^2 / 4}{(2s_1+1)(2s_2+1)[(E-E_R)^2 + \Gamma^2 / 4]}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{p_e}$$

Con $s_1=s_2=1/2$ e $J=1$

Integrando su E con la sostituzione $(2(E-E_R)/\Gamma)=\tan\theta$:

$$\int_0^\infty \sigma(E)dE = \frac{3}{2} \pi^2 \tilde{\lambda}^2 \left[\frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma} \right]^2 \Gamma \rightarrow \text{sperimentalmente} :$$

$$\int_0^\infty \sigma(E)dE = 800 \text{ nb} \cdot \text{MeV}, \text{ sapendo } \frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma} = .6\%, p = 1500 \text{ MeV}$$

$\Gamma=0.087 \text{ MeV}$
molto più piccola
della risol. sperim.

La larghezza totale della J/Ψ è molto minore della risoluzione sperimentale e anche molto minore di quella delle risonanze precedenti. Ad esempio:
Per la $\rho(776 \text{ MeV})$, $\Gamma_\rho=150 \text{ MeV}$; per la $\omega(782)$, $\Gamma_\omega=8.4 \text{ MeV}$,
per la $\Phi(1020)$, $\Gamma_\Phi=4.26 \text{ MeV}$.

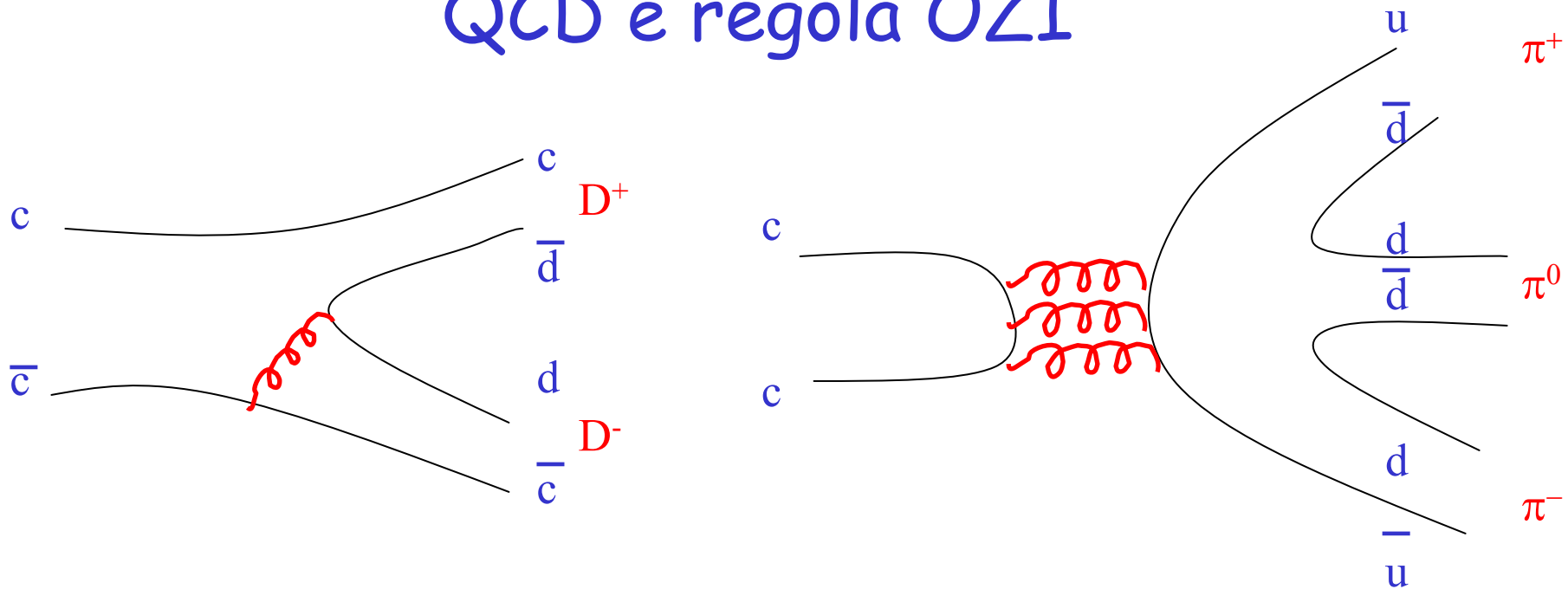
Da notare anche che la larghezza parziale in coppie leptoniche: $\Gamma(J/\Psi \rightarrow e^+e^-)=5 \text{ KeV}$ non molto diversa dalle altre risonanze. Quindi e' **la larghezza adronica ad essere molto minore**. Decadimenti adronici significano stati finali con quark: regola di OZI: i decadimenti di quark con linee disconnesse (in sistemi di quark di tipo diverso) sono soppressi



La J/Ψ è costituita da una coppia di nuovi quark ($\bar{c}c$) e il decadimento in mesoni contenenti questi quark (ex $J/\Psi \rightarrow D^+(c\bar{d})D^-(\bar{c}d)$) e' cinematicamente vietato. Sara' possibile per eccitazioni a massa piu' alta della J/Ψ , ex la $\Psi(3770)$ che in effetti ha larghezza molto maggiore: 24 MeV

Per i decadimenti leptonici si passa sempre attraverso un accoppiamento elettromagnetico, fotoni, mentre per quelli adronici l'accoppiamento e' di tipo forte (QCD) mediato da gluoni.

QCD e regola OZI



L'interazione responsabile del decadimento e l'interazione di colore (QCD)
 Lo stato iniziale non ha colore e così deve essere lo stato intermedio (gluoni) e quello
 Finale. Ma nell'anichilazione un singolo gluone non è sufficiente:
 Il gluone è colorato! Almeno due gluoni (cfr $8 \otimes 8 = 1 \oplus \dots$). Ma il gluone si comporta
 per C come il fotone, quindi da uno stato a spin 1 fermione/antifermione, come
 l'ortopositronio, se C è conservato dovrà avere un numero dispari di gluoni.
La J/Ψ è uno stato vettoriale.

Conseguenza: la mediazione con 3 gluoni è fortemente soppressa (α_s^6)

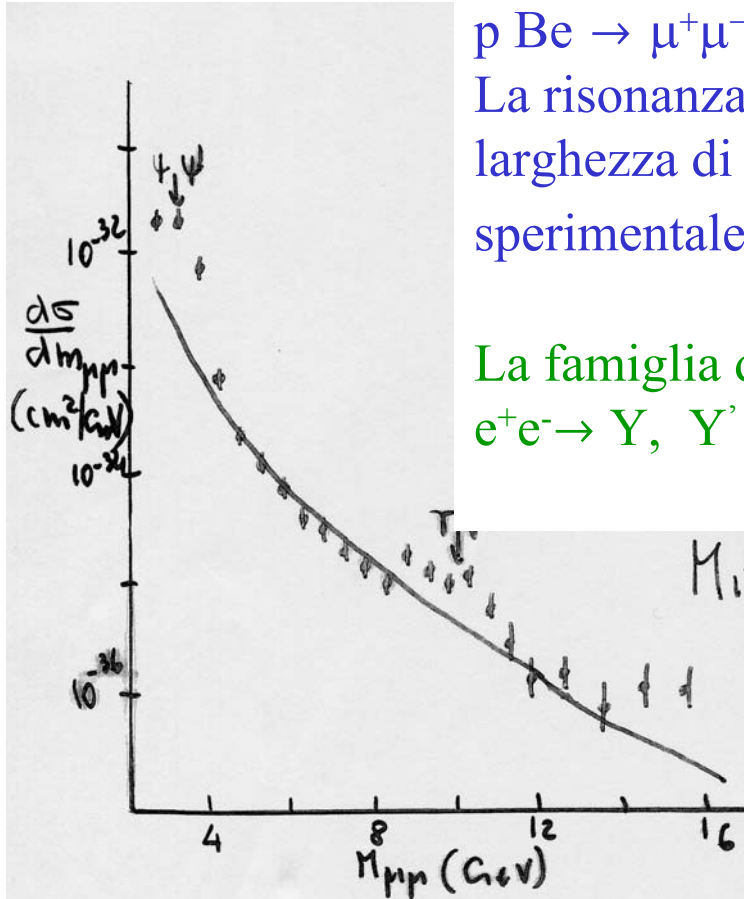
Ulteriore tipo di quark: il b

Il fenomeno si ripete a energie più elevate (1977):

$p \text{ Be} \rightarrow \mu^+ \mu^- + X$ (si studia $M(\mu^+ \mu^-)$).

La risonanza osservata (Y) ha una massa di $\sim 10 \text{ GeV}$ e una larghezza di $\sim 1.2 \text{ GeV}$ che è maggiore della risoluzione sperimentale: ci sono 2 o tre risonanze Y.

La famiglia delle Y viene studiata con cura nelle macchine $e^+e^- \rightarrow Y, Y', Y'', Y''', Y^4 \dots$



N.B. La $Y(4S)$ che è uno stato $(B\bar{B})$ con massa 10.58 GeV può decadere in coppie di mesoni che contengono il nuovo quark B: $Y(4S) \rightarrow B\bar{B}$

Anche in questo caso la larghezza totale è piccola per la risonanza sotto soglia:

Ex. $\Gamma(Y(1S)) = 0.053 \text{ MeV}$

Ma $\Gamma(Y(4S)) = 10 \text{ MeV}$ (sopra soglia per la produzione di coppie $B\bar{B}$)

Il quarkonio

Atomo di idrogeno: **ep**

$$V(r) = \frac{-e^2}{r} \rightarrow \text{equazione di Schroedinger non relativistica} \rightarrow$$

$$\text{livelli di energia quantizzati } E_n: E_n = -\alpha^2 m_e \left[\frac{1}{n^2} \right] = 13.6 \text{ eV}/n^2 (n=1,2,3,\dots)$$

$$r_0 = \frac{1}{\alpha \cdot m_e} = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{ cm (raggio di Bohr)}$$

Positronio: **e⁺e⁻**

Come in meccanica classica si introduce la massa ridotta: $m_{red} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_e / 2$

$$\text{con } H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_e} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_e} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \rightarrow \frac{p^2}{2m_{red}} + V(r) \quad E_n^{pos} = \frac{1}{2} E_n = -\alpha^2 m_e \frac{1}{4n^2} (n=1,2,3,\dots), r_0^{pos} = \frac{2}{\alpha m_e}$$

Atomo **q \bar{q}**

Forza di legame forte (mediata da gluoni) $\implies \underline{\alpha \rightarrow \alpha_s}$

A piccole distanze potenziale tipo Coulombiano $V(r) \sim 1/r$,

A grandi distanze confinamento dei quark parametrizziamo:

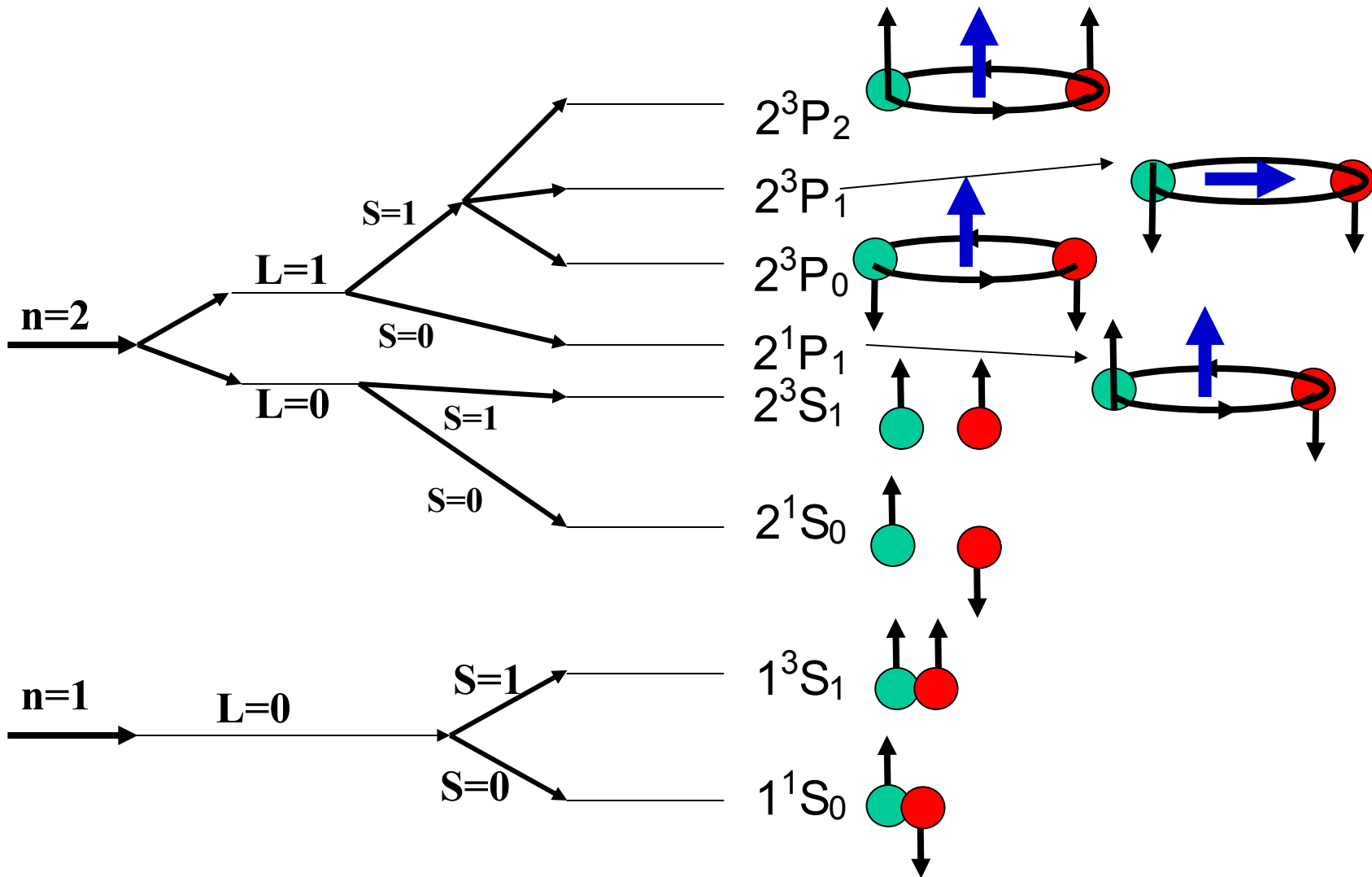
$$V(r) = -\frac{4}{3} \alpha_s / r + F_0 r$$

Correzioni relativistiche

- Accoppiamento spin/orbita
-struttura fine $V \sim \vec{L} \cdot \vec{S}$
- Accoppiamento spin/spin
-struttura iperfine $V \sim \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \sim \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$
- Queste interazioni separano i livelli:
 - Tripletto (3S_1) (ortopositronio)
 - Singoletto (1S_0) (parapositronio)

$$\Delta E_{fine} \sim \frac{\alpha^4 mc^2}{n^3}$$

Livelli del positronio

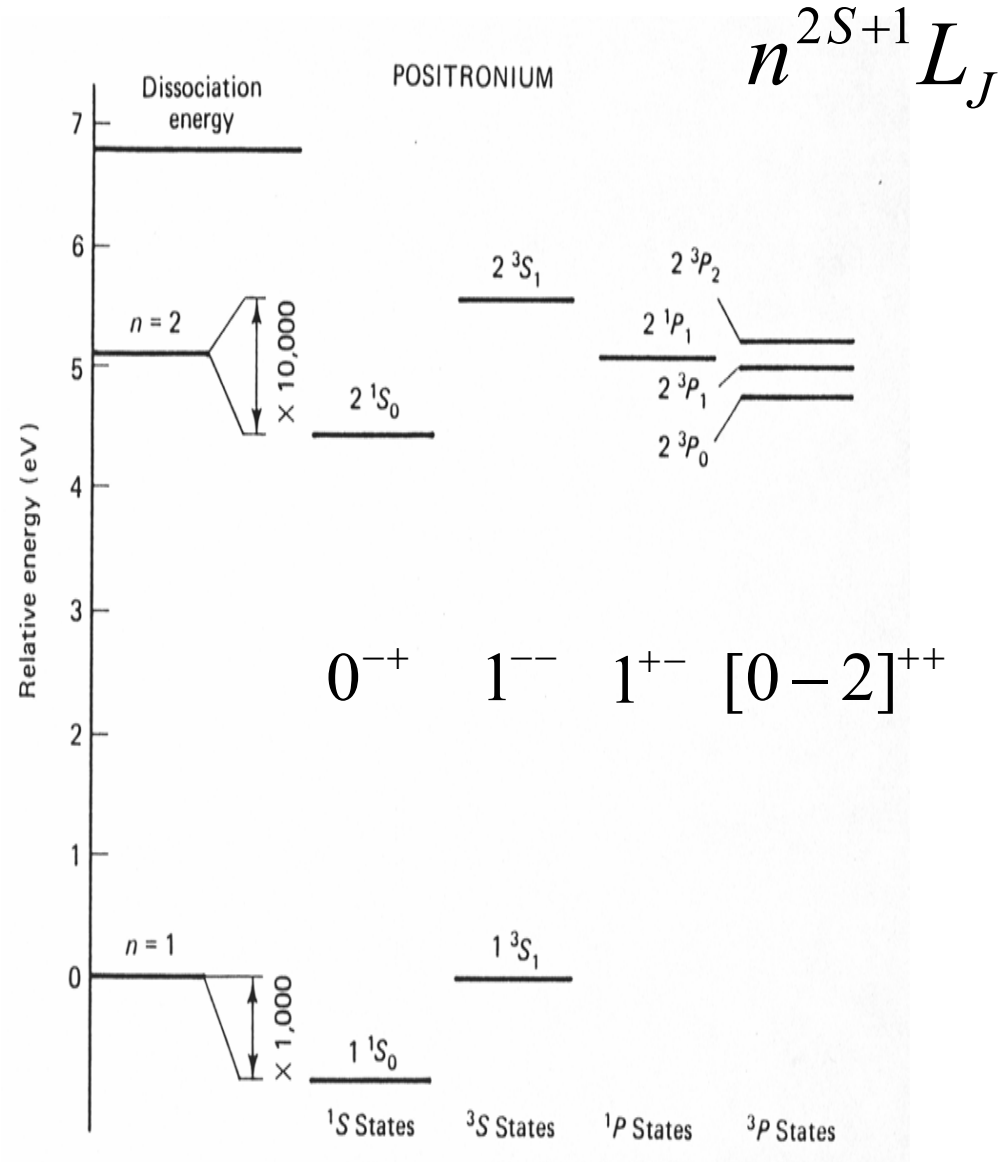


Livelli effettivi

$$E_2 - E_1 = \frac{-\alpha^2 m}{4} \left[\frac{1}{4} - 1 \right] = \frac{3\alpha^2 m}{16} = 5.1 eV$$

$$E_{2^3S_1} - E_{2^1P_1} = \frac{23\alpha^4 m}{960} = 3.5 \times 10^{-5} eV$$

$$E_{1^3S_1} - E_{1^1S_0} = \frac{7\alpha^4 m}{12} = 8.4 \times 10^{-4} eV$$



Vita media del 1^1S_0

- Stimiamo la vita media:

- Due fotoni $\rightarrow \alpha^2$

- Proporzionale alla funzione d'onda all'origine:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3} \sim \frac{1}{V} \quad \text{Raggio di Bohr } a: \quad a = \frac{2\hbar}{m c \alpha} \sim \frac{1}{\alpha m}$$

- Mettiamole insieme e stimiamo la larghezza del positronio
argomento dimensionale:

$$\Gamma = \frac{\alpha^2 |\psi|^2 [M^3]}{m^2 [M^2]} \sim \alpha^5 m$$

Calcolo in QED del positronio

- Il calcolo teorico produce come risultato

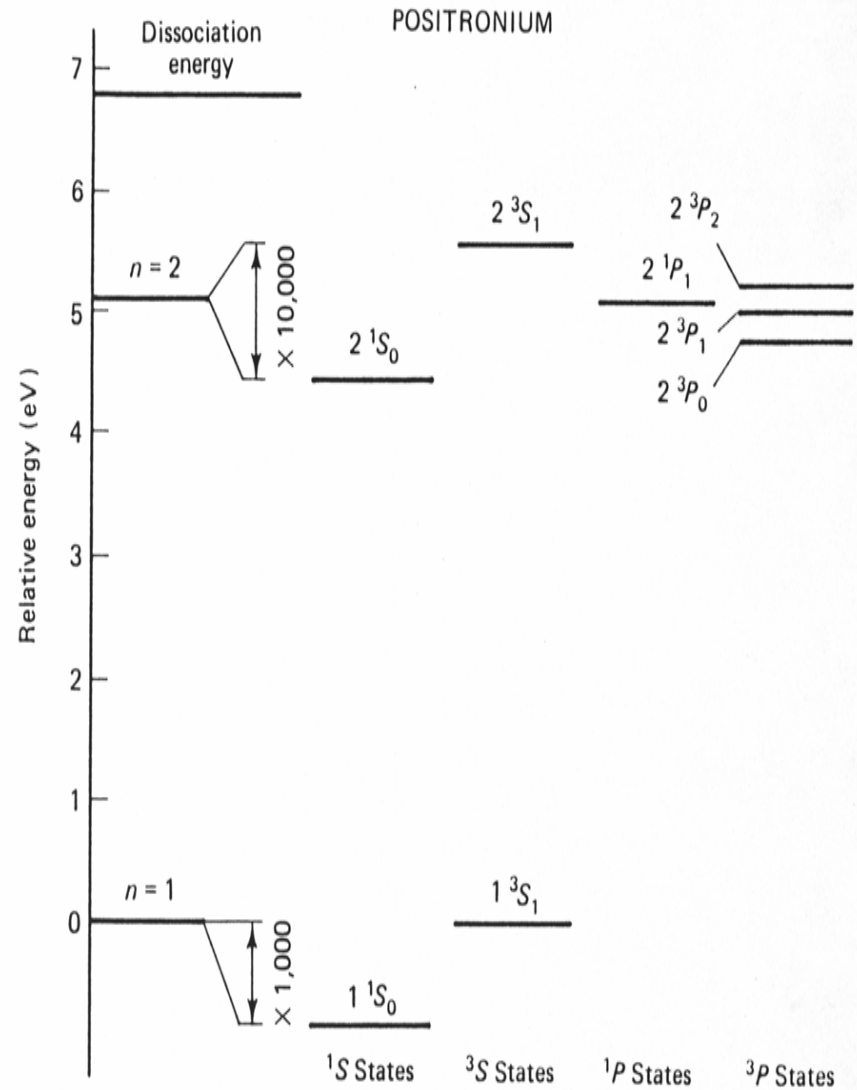
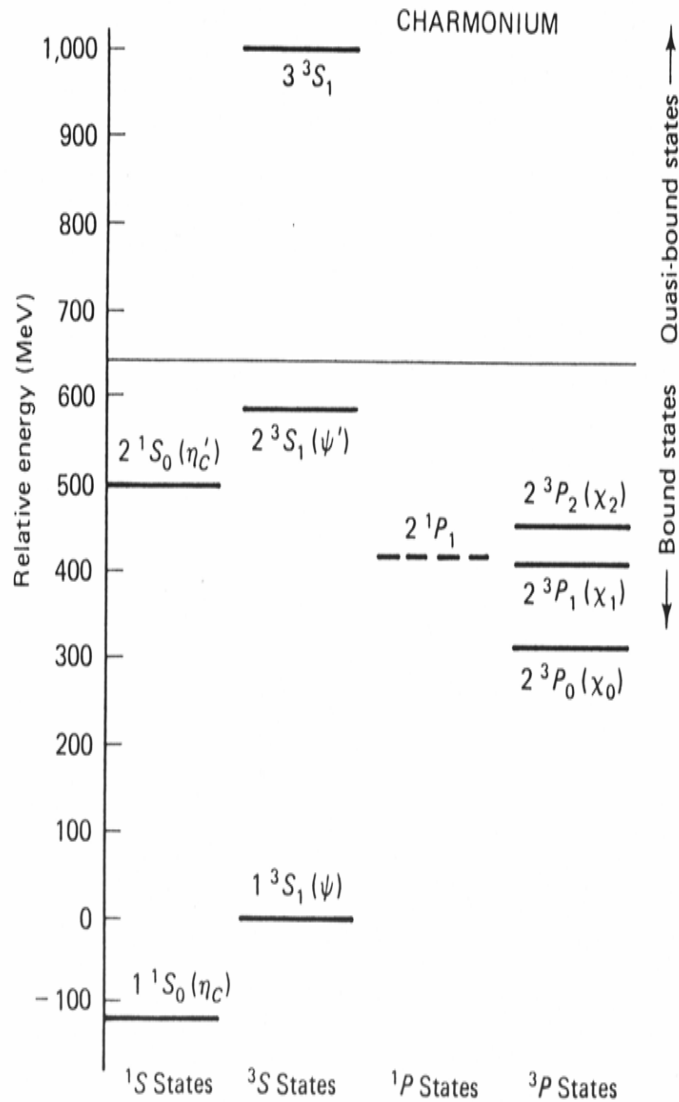
$$\Gamma(2\gamma) = \frac{\alpha^5 m}{2}$$

- Nel caso dell'ortopositronio abbiamo un ulteriore α (tre fotoni) ma il risultato dimensionale è simile:

$$\Gamma(3\gamma) = \frac{2(\pi^2 - 9)}{9\pi} \alpha^6 m$$

Entrambi i valori sono in buon accordo con i dati sperimentali e anche le separazioni fine e iperfine (**trionfo della QED**).

Paragone con il charmonio



Perchè dovrebbero essere simili?

- Il potenziale Coulombiano è mediato da fotoni senza massa

$$V_{em} = -\frac{\alpha}{r}$$

- Il “potenziale” QCD ha una forma simile:

$$V_{QCD} = -\frac{4\alpha_s}{3r} + kr$$

Il termine Coulombiano è indicato dalla distribuzione angolare di 2 jet in collisioni adroniche $\sim \underline{(1+\cos\theta^2)}$ come nelle interazioni e^+e^- . Tale andamento è testimone di uno **scambio di un mediatore a massa nulla e spin 1**.
Il termine lineare è suggerito dalla linearità tra momento angolare e il quadrato della massa di mesoni e barioni.

Valutazioni

- Consideriamo il raggio di Bohr

$$a(n) = \frac{2\hbar n^2}{m c \alpha} \sim \frac{n^2}{\alpha m} \quad \text{Molto piccolo per quark pesanti}$$

- Quantizziamo il momento angolare

$$p a = n \hbar$$

- Otteniamo una relazione interessante per l'impulso dell'elettrone (quark):

$$p a = \frac{2 p \hbar n^2}{m c \alpha} = n \hbar \Rightarrow \frac{p}{m c} = \frac{\alpha}{2 n} \quad \alpha : p \ll m c$$
$$\alpha_s : p / m c \sim .1$$

- Così non è irragionevole che un modello a potenziale (perturbativo)
 - e non relativistico funzioni con quark pesanti!

I quark leggeri (u,d,s) sono intrinsecamente relativistici: l'energia di legame è di centinaia di MeV (paragonabile alla loro massa) quindi l'equazione di Schroedinger non è applicabile. Con i quark pesanti (c,b,(t)) la teoria con il potenziale è più fondata: Correlazioni tra gli stati del positronio e quelli del charmonio e bottonio.

Ma grande differenza tra le scale! Ex. La struttura iperfina (interazione spin/spin) 1^1S_0 e 1^3S_1 del positronio è 10^{-11} volte più piccola che nel charmonio (η_c - ψ).

Altri quarkoni possibili?
cb, ct, bt, .. ?

Simili a μ^+e^- ...

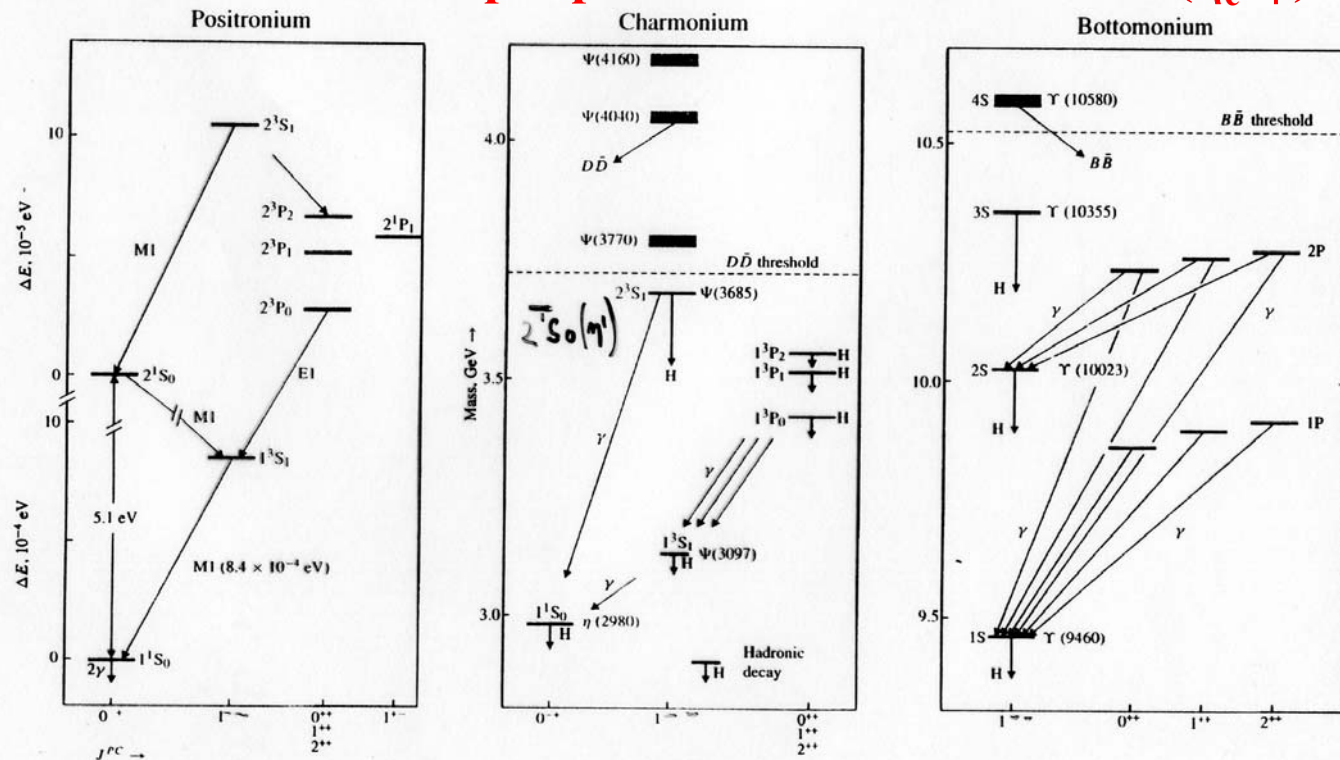
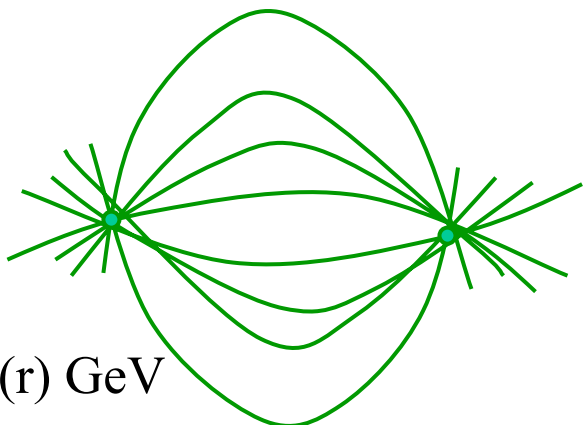


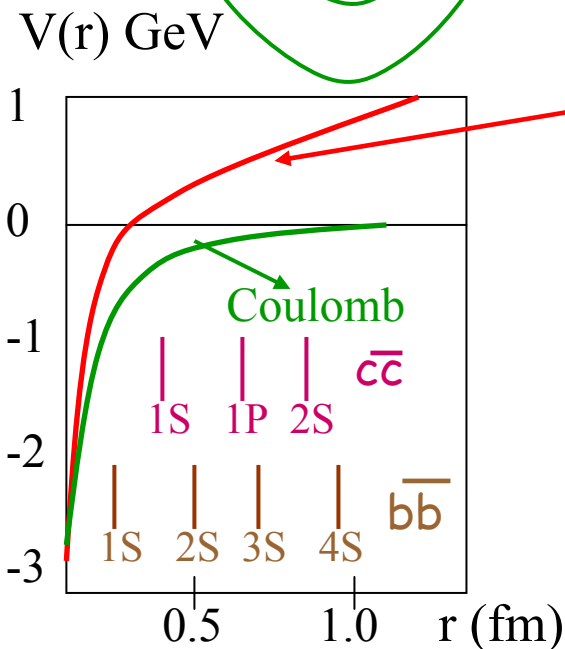
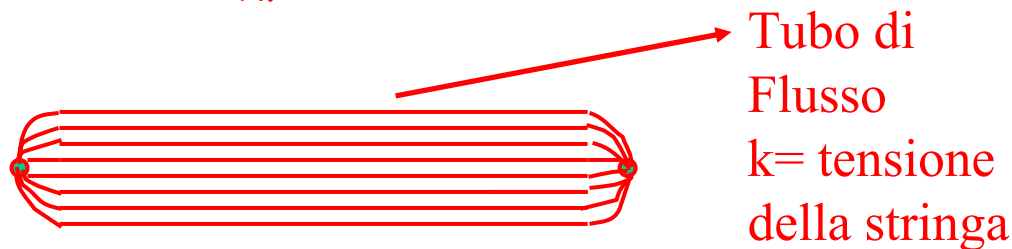
Fig. 4.8. The energy-level diagrams for positronium, charmonium and bottomonium. Note the changes in scale for positronium. Only states with $J^{PC} = 1^{--}$ can be accessed in e^+e^- annihilation experiments. Note that the atomic physics convention is to label the lowest-lying P states of positronium as 2P, while for the charmonium and bottomonium states the nuclear physics nomenclature 1P is employed. The shading indicates broad states.

La parte di potenziale $V(r)=kr$ determina il confinamento: infatti $k=0.18 \text{ GeV}^2$ e a distanza di $\sim 2 \text{ GeV}^{-1}$ ($\sim 0.4 \text{ fm}$) $V \sim 0.36 \text{ GeV} > m(2\pi)$

Campo di potenziale Coul.



Campo di potenziale kr

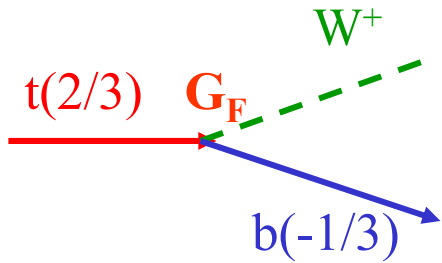


Potenziale forte in funzione della separazione r .
Si prevedono anche i raggi di charmonio e bottonio

N.B. Raggio 1^3S_1 (ψ) è circa 0.4 fm
 $\ll r(\text{positronio})$ ($r \propto 1/m\alpha$)

I livelli del charmonio e del bottonio dipendono da $V(r)$ ma anche da termini cinetici che contengono le masse m_c e m_b per cui da un fit con l'eq. di Schroedinger si ottengono α_s , k , m_C , m_B .

Stati legati con il top?



Supponiamo che $m_{\text{top}} \gg m_b, m_W$

$$\Gamma_t \propto G_F \cdot m_t^3 \quad (\text{esatto: } \Gamma_t \propto \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} G_F \cdot m_t^3)$$

Ex. Se $m_t = 200 \text{ GeV}$, $\Gamma_t = 2.4 \text{ GeV}$ ($\tau_t = 1/\Gamma_t = 3 \cdot 10^{-25} \text{ s}$)

Stato legato $t\bar{t}$?

$t\bar{t}$: sistema non relativistico in campo Coulombiano $V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r}$

Stimiamo velocità dei quark e raggio del sistema:

$$m_t v r_0 = 1; \quad \frac{m_t v^2}{r_0} = \frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r_0^2} \Rightarrow$$

$$v = \frac{4}{3} \alpha_S; \quad r_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha_S m_t}, \quad (\text{viriale } m_t \overline{v^2} = \frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r_0}, \text{ se } V \sim r^{-n} : 2\langle T \rangle = n\langle V \rangle)$$

$$\Rightarrow \text{periodo orbitale } T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{9\pi}{8\alpha_S^2 m_t}$$

se $\alpha_S = 0.12$, $m_t = 200 \text{ GeV}$,

$$\Rightarrow T = 8 \cdot 10^{-25} \text{ s} > \tau_{t\bar{t}} = 1/2 \tau_t$$

Il top decade prima di formare lo stato legato!

Bibliografia

-D.H. Perkins, “Introduction to high energy Physics” 4th edition 1999, Cambridge University Press.

-Quang Ho-Kim, P.Xuan Yem, “Elementary particles and their interactions, concepts and phenomena” Springer 1998.