Concorso di Ammissione al XX ciclo di Dottorato in Fisica

Busta n.1

Il candidato svolga uno a scelta dei temi e risolva uno a scelta dei problemi.

Temi

1) Descrivere un fenomeno fisico fondamentale in relazione ad un fenomeno astrofisico.
2) Gli aspetti di maggior rilievo nella fisica dei neutrini.
3) Discutere il teorema di fluttuazione-dissipazione e le sue applicazioni.
4) Discutere l'idea della rottura spontanea delle simmetrie, facendo un esempio di applicazione in fisica della materia condensata od in fisica delle interazioni fondamentali
5) Discutere un metodo di possibile rivelazione di onde gravitazionali.

Esercizi

Problema 1.

a) Consideriamo un corpo celeste gassoso autogravitante, di massa totale M e raggio torale R, a simmetria sferica in assenza di rotazioni. Esprimere la condizione di equilibrio meccanico in un punto qualunque della struttura.
b) Se il corpo ruota su se stesso, per quale velocità angolare sarà distrutto? (Supponiamo che il corpo rimanga sferico fino alla distruzione).
c) Il corpo è costituto da gas perfetto monoatomico. Supponiamo che un elemento di questo gas subisca un piccolo spostamento adiabatico, in direzione radiale, rispetto alla posizione di equilibrio. L'elemento si mantiene comunque in equilibrio di pressione con l'ambiente circostante ed il peso molecolare medio è lo stesso tra elemento ed ambiente. A quale accelerazione è soggetto l'elemento? Cosa cambia se il peso molecolare medio è diverso tra elemento ed ambiente?
d) Ricavare la relazione tra pressione e temperatura per l'elemento di gas perfetto monoatomico durante un piccolo spostamento adiabatico reversibile.

Problema 2.

Un fascio di pioni negativi da 50 MeV viene fatto arrestare all'interno di un bersaglio di idrogeno liquido di spessore 10 cm. I π^- vengono tutti assorbiti attraverso le due reazioni:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \tag{1}$$
$$\pi^- + p \rightarrow \gamma + n \tag{2}$$

$$R(\pi^0 + n)/(\gamma + n) = 1.53 \pm 0.02 \tag{3}$$

ove R è il cosiddetto rapporto di Panofsky. Due rivelatori di NaI (cilindri di diametro 50 cm e spessore 50 cm) vengono posti a 90° rispetto al fascio incidente, ai lati opposti rispetto al bersaglio ad idrogeno, ad una distanza di 1 m dal bersaglio a idrogeno. Davanti a ciascun rivelatore NaI e' posto un collimatore di piombo con apertura $10 \times 10\ cm^2$ (di grande spessore, 5 cm). Se nel bersaglio di idrogeno liquido si arresta un totale di 10^9 π^-, valutare il numero di mesoni π^0 che saranno rivelati dalle coincidenze fra i due NaI.

$$\begin{aligned} M(\pi^-) &= 139.57\ MeV \\ M(\pi^0) &= 134.98\ MeV \\ M(p) &= 938.27\ MeV \\ M(n) &= 939.56\ MeV \end{aligned}$$

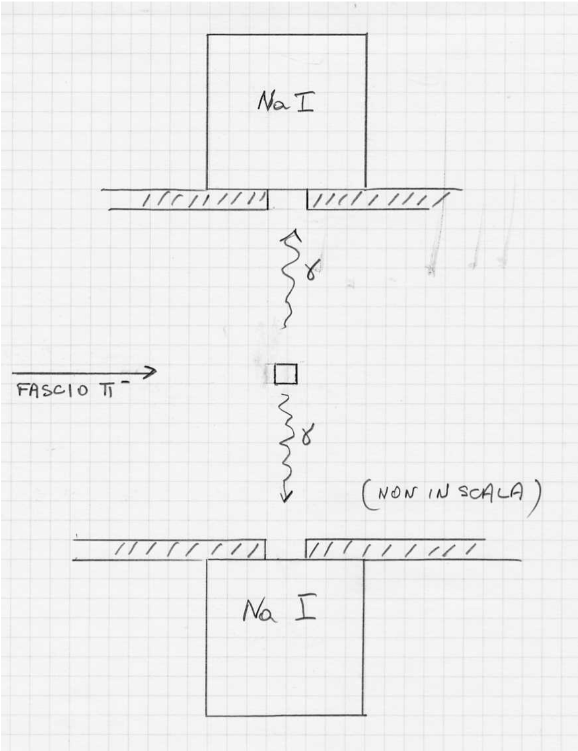


Figura 1: Schema dell' esperimento di scambio carica

Problema 3.

Le tecniche di risonanza magnetica nucleare in vivo permettono la registrazione di segnali provenienti da regioni di dimensioni $(0.1 \text{ mm})^3$. Supponiamo che il campione sia costituito esclusivamente di acqua e che il segnale di risonanza sia prodotto dai nuclei di idrogeno (I=1/2) a temperatura ambiente per un campo magnetico di 5000 Gauss. La frequenza di risonanza del protone è 42.6 MHz per un campo di 10^4 Gauss(= 1 Tesla).

a) Determinare il numero di nuclei di idrogeno presenti nel campione e la frazione netta che contribuisce al segnale di risonanza magnetica del campione.

b) Determinare la magnetizzazione del campione.

Differenti tecniche di rivelazione possono essere applicate per osservare il segnale di risonanza.

c) In una rivelazione ad onda continua viene misurata la potenza assorbita dal campione alla frequenza di risonanza del protone. Se il tempo di rilassamento longitudinale T_1 dei nuclei di idrogeno vale 1 ms, qual'è la potenza massima assorbita dal campione?

d) In una tecnica di rivelazione alternativa, la magnetizzazione viene rovesciata e successivamente viene rivelato il segnale indotto in una spiretta di area S, induttanza L e resistenza R orientata lungo la magnetizzazione longitudinale. Determinare la dipendenza temporale del segnale indotto dentro la spiretta.

e) Quale tipo di rumore rende difficile l'osservazione del segnale descritto nel punto precedente?

Problema 4.

Si consideri un atomo di idrogeno con un termine perturbativo,

$$H' = V(r)\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{p}\,V(r) \tag{4}$$

dove $\mathbf{s}$ è l'operatore di spin dell'elettrone, $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\sigma$; $\mathbf{p}$ l'impulso, $V(r)$ è un potenziale a simmetria centrale.

a) Spiegare perchè H' non può essere semplicemente scritto come $2V(r)\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}$;

b) Dire quali degli operatori tra $\mathcal{P}$ (parità), $\mathbf{L}$ (momento angolare orbitale), $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$ (momento angolare totale), $\mathbf{J}^2$, e $\mathbf{L}^2$, sono conservati;

c) Elencare, senza calcoli espliciti, gli stati non perturbati $|n,\ell,m;s_z\rangle$ per i quali l'elemento di matrice

$$C(n,\ell,m;s_z) = \langle n,\ell,m;s_z|H^{'}|1,0,0;\frac{1}{2}\rangle \tag{5}$$

è non nullo, dove con $(n,\ell,m;s_z)$ sono indicati il numero quantico principale, il momento angolare orbitale, il numero quantico azimutale, e la componente z di spin dell'elettrone. Determinare i rapporti tra gli elementi non nulli per lo stesso valore di n, i.e.,

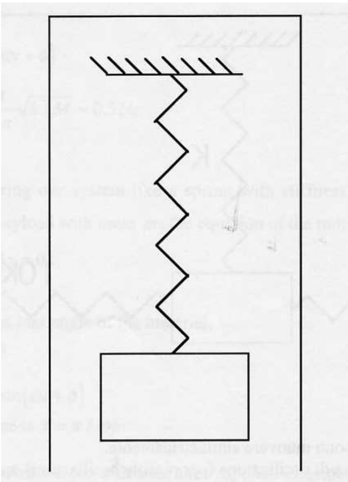
$$\frac{C(n,\ell,m;s_z)}{C(n,\ell',m';s_z')}. \tag{6}$$

d) Calcolare esplicitamente gli elementi di matrice $C(n,\ell,m;s_z)$ del punto (c) per $n=2$ e per la scelta del potenziale $V(r) = g\,\delta^3(\mathbf{r})$, e verificare il risultato generale (6).

Problema 5.

Rispondere ad alcune delle domande sottoelencate. Consideriamo una molla di costante k=1000 N/m, lunghezza a riposo l_o = 0.1 m, caricata con una massa M=100 Kg. La molla è attaccata al soffitto. Si considerano solo i movimenti verticali.

a) Calcolare la frequenza di oscillazione e descrivere il movimento del carico. Descrivere



lo stesso movimento se la molla ha una dissipazione (angolo di perdita) dell'uno per mille per ciclo.

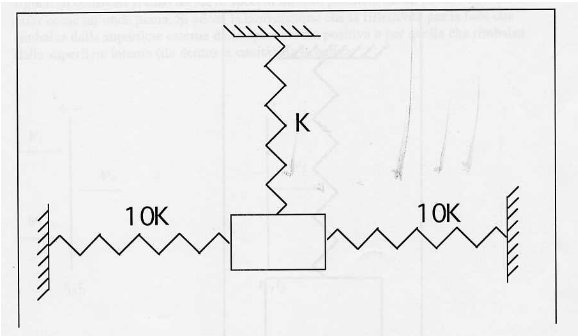
b) Descrivere qualitativamente o quantitativamente il movimento del carico per un movimento sinusoidale del soffitto per frequenze molto minori e molto maggiori della frequenza di risonanza.

Quando il carico ha raggiunto l'equilibrio aggiungiamo due molle di costante elastica come nel disegno qui sotto. La distanza iniziale delle pareti laterali dalla superficie del carico è l_o.

Le pareti della stanza si possono muovere simmetricamente.

c) Calcolare la frequenza di oscillazione (per piccole oscillazioni) quando le pareti della stanza si avvicinano (per $l<l_o$) o si allontanano ($l>l_o$) e descrivere il movimento del carico.

d) Descrivere lo stesso movimento se la molla verticale ha una dissipazione dell'uno per mille (considerare le due molle orizzontali senza perdita). Che valori di l devo scegliere per avere una frequenza di risonanza di 3 Hz, 1 Hz 0.3 Hz, 0.1 Hz, 0.03 e 0 Hz. Cosa succede a 0 Hz?



Concorso di Ammissione al XX ciclo di Dottorato in Fisica

Busta n.2

Il candidato svolga uno a scelta dei temi e risolva uno a scelta dei problemi.

Temi

1) Reazioni nucleari di interesse astrofisico.

2) Descrivere uno o più fenomeni di interazione radiazione-materia di interesse per la fisica nucleare e delle particelle elementari.

3) Descrivere un fenomeno di meccanica quantistica di particolare interesse per la fisica della materia.

4) Discutere le simmetrie del tipo spazio-temporale in fisica quantistica, elaborando su un esempio che a voi interessa.

5) Discutere l'utilità di osservare congiuntamente più tipi di radiazione, comprese le onde gravitazionali, da una sorgente astrofisica.

Esercizi

Problema 1.

a) Consideriamo un corpo celeste gassoso autogravitante di massa totale M e raggio totale R a simmetria sferica in assenza di rotazioni.

Calcolare la velocità di fuga da tale corpo celeste.

b) Esprimere la condizione di equilibrio meccanico in un punto qualunque della struttura.

c) Supponendo che la pressione del gas sia nulla e che il corpo sia omogeneo calcolare il tempo di "libero collasso" nel quale il raggio passa dal valore iniziale a zero. Si ricorda che:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arccosx.$$

d) Dato che il corpo è gassoso definire sotto quali condizioni delle variabili fisiche gli effetti coulombiani possono essere trascurati. Supponendo il corpo costituito da un gas perfetto con fotoni all'equilibrio termodinamico scrivere l'equazione di stato della struttura. Cosa cambia nel caso di degenerazione non relativistica degli elettroni?

Problema 2.

Una successione di decadimenti studiati da Rutherford e Chadwick riguarda la serie naturale dell' uranio 238. I decadimenti sono, secondo la tabella ed una porzione dello schema allegato (semplificato), nella notazione originale di Rutherford ed in quella odierna:

Vecchia Notazione	Attuale notazione	Decadimento	$t_{1/2}$
Ra A	$_{84}Po^{218}$	alfa	3.05 m
Ra B	$_{82}Pb^{214}$	beta	26.8 m
Ra C	$_{83}Bi^{214}$	beta	19.7 m
Ra C'	$_{84}Po^{214}$	alfa	164 μs
Ra D	$_{82}Pb^{210}$	beta	19.4 y

Tabella 1: Decadimenti dell' $_{92}U^{238}$

All'istante iniziale e' presente il solo RaA. Calcolare il tempo necessario perche' il numero di nuclei di RaD corrisponda al 90% di quelli del RaA iniziale. Si tratti il decadimento del RaC' come se avvenisse con $t_{1/2} = 0$.

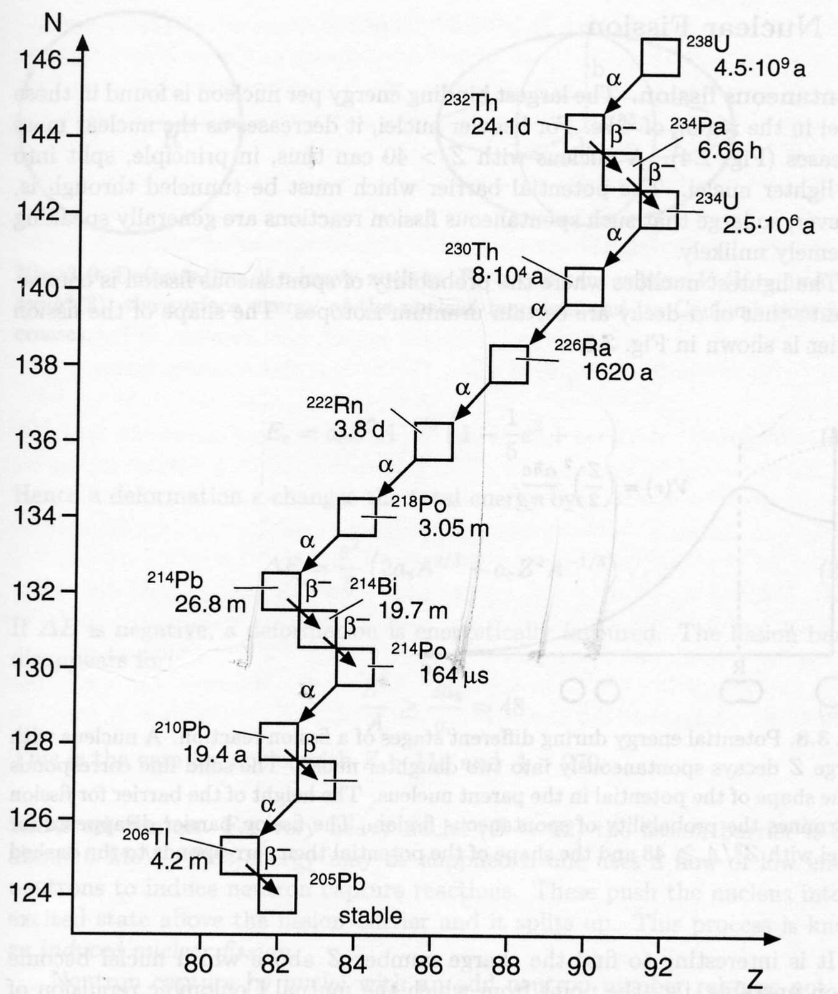


Fig. 3.7. Illustration of the ^{238}U decay chain in the N–Z plane. The half life of each of the nuclides is given together with its decay mode.

Figura 1: Schema di decadimento semplificato per $_{92}U^{238}$

Problema 3.

Gli elettroni liberi di un metallo possono essere descritti attraverso il modello di Drude di elettroni liberi che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac.

a) Derivare la dipendenza del livello di Fermi a temperatura T=0 dalla densità elettronica e stimare il valore del livello di Fermi tenendo conto che la densità elettronica nei metalli è tipicamente $5 \cdot 10^{22}$ cm^{-3}.

b) Determinare la capacità termica degli elettroni ad una temperatura T.

c) Determinare la loro suscettività magnetica a temperatura 0.

d) Determinare la loro conducibilità elettrica in funzione della densità elettronica ed il tempo di collisione .

Nota. Può essere utile la seguente approssimazione (valida per $k_B T << \mu F$) dello sviluppo di Sommerfeld per una funzione arbitraria H(ε) e la distribuzione f(ε) di Fermi Dirac:

$$\int_0^{\mu_F} H(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\mu_F} H(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (K_B T)^2 H'(\mu_F) + O\Big(\frac{K_B T}{\mu_F}\Big)^4$$

Problema 4.

Un nucleo atomico in uno stato eccitato (con energia di eccitazione G) emette un fotone e compie transizione allo stato fondamentale.

a) Supponendo che il nucleo sia infinitamente massivo, si determini l'energia del fotone emesso, E_γ.

b) Supponiamo che il nucleo, libero, di massa M, sia a riposo prima di emissione del fotone. Tenendo conto del rinculo del nucleo, si determini l'energia del fotone E_γ approssimativamente (*i.e.*, al primo ordine in $O(G/Mc^2)$). Si assuma $Mc^2 \gg G$.

c) Supponendo che, invece, il nucleo (sempre di massa M) sia legato ad un centro (fisso) di forza attrattiva. L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 \mathbf{r}^2 \tag{1}$$

dove $\mathbf{r}$ è la posizione del centro di massa del nucleo. Il nucleo si trova inizialmente nello stato fondamentale $|\psi^{(0)}\rangle$ di (1), mentre lo stato eccitato interno è come nei punti (a) e (b). Quali sono i valori possibili di energia del fotone emesso in questo caso?

d) Giustificare un'approssimazione secondo la quale lo stato finale del nucleo (a parte che è nello stato fondamentale del sistema interno) è dato da $e^{ikz}|\psi^{(0)}\rangle$, dopo l'emissione di un fotone di impulso $\mathbf{p} = (0, 0, k\hbar)$. Si chiede la formula per le probabilità $P(E_\gamma)$ per vari valori di E_γ di cui al punto (c). Non è necessario calcolare esplicitamente $P(E_\gamma)$.

Problema 5.

Un sistema binario è costituito da due stelle di neutroni di massa M_1 ed M_2 in orbita circolare con periodo P.

a) Proporre (motivandoli) due valori per la massa M_1 ed M_2.

b) Ricavare il raggio dell'orbita. Scrivere l'espressione per l'energia totale del sistema binario trascurando l'energia cinetica rotazionale delle due stelle e struttando il teorema del viriale.

c) Descrivere molto brevemente il meccanismo di emissione di onde gravitazionali fino alla coalescenza delle due stelle.

d) Esplicitare la dipendenza del rate di emissione di energia per onde gravitazionali dalla massa delle sue stelle, dal periodo e dal raggio dell'orbita.

Concorso di Ammissione al XX ciclo di Dottorato in Fisica

Busta n.3

Il candidato svolga uno a scelta dei temi e risolva uno a scelta dei problemi.

Temi

1) Descrivere un fenomeno di meccanica quantistica di interesse in astrofisica.

2) La spettrometria di massa e le sue applicazioni in fisica nucleare ed in fisica delle particelle elementari.

3) Descrivere un fenomeno di interazione radiazione-materia di particolare interesse per la fisica della materia

4) L'equazione relativistica per una particella di spin $1/2$.

5) Possibili sorgenti di onde gravitazionali.

Esercizi

Problema 1.

a) Consideriamo un corpo celeste gassoso a simmetria sferica, di massa totale M e raggio totale R, in assenza di rotazioni. Se il sistema, costituito da gas perfetto monoatomico, si contrae lentamente passando tra stati di equilibrio meccanico quasi perfetto quale percentuale dell'energia gravitazionale liberata viene irraggiata? Calcolare il calore specifico della struttura. Spiegare il significato del risultato ottenuto.

b) Calcolare l'energia gravitazionale totale del corpo celeste approssimandolo come corpo omogeneo $\rho(r) = \bar{\rho}$.

c) Sotto le ipotesi delle domande a) e b) scrivere l'espressione per l'energia termica totale in funzione della pressione del gas.

d) Supponiamo che il corpo in questione sia il Sole. L$\approx 3.84 \cdot 10^{33}$ erg/s, densità media≈ 1 g/cm^3, raggio $\approx 7 \cdot 10^{10}$ cm, massa$\approx 2 \cdot 10^{33}$ g ed un cammino libero medio per i fotoni λ_p ≈ 0.5 cm. Calcolare l'ordine di grandezza del tempo di emissione dalla superficie di un fotone proveniente dal centro del Sole. Possiamo asumere che ciascun processo di interazione radiazione-materia richieda $\approx 10^{-8}$ s.

Problema 2.

Degli iperoni Λ^0 vengono prodotti in soglia mediante la reazione indotta da un fascio di π^- su protoni fermi:

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$$

Trovare il massimo angolo, nel sistema del laboratorio, al quale puo' essere emesso il protone che emerge dal decadimento $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$. Nel caso che la reazione sia iniziata da $\pi^- + NUCLEO$ invece che da $\pi^- + p$, valutare di quanto risulti ridotta l'energia minima del π^- necessaria alla produzione del sistema $K^0 + \Lambda^0$. L'iperone Λ^0 decade per il 63.9% in $\pi^- + p$ e per il 35.8% in $\pi^0 + n$. Giustificare tali rapporti di decadimento.

$$\begin{aligned} M(\pi^-) &= 139.57\ MeV \\ M(\pi^0) &= 134.98\ MeV \\ M(p) &= 938.27\ MeV \\ M(n) &= 939.56\ MeV \\ M(\Lambda^0) &= 1115.68\ MeV \\ M(K^0) &= 497.67\ MeV \end{aligned}$$

Problema 3.

Consideriamo un atomo di massa M descritto da un sistema a due livelli, fondamentale ed eccitato, interagente con radiazione laser di frequenza ω.

a) Determinare le condizioni di risonanza per i fotoni interagenti con il sistema a due livelli per il processo di assorbimento e quello di emissione tenendo conto del rinculo atomico per un atomo inizialmente in quiete.

b) Analizzare l'effetto di rinculo sullo spettro di assorbimento/emissione di una radiazione γ di 14 KeV da parte di un atomo di ^{57}Fe con larghezza della riga di assorbimento $\Gamma = 5 \cdot 10^{-9}$ eV.

c) Per un campione gassoso di ^{57}Fe alla temperatura T di 6000 K la larghezza Doppler della riga di assorbimento potrebbe mascherare l'effetto di rinculo?
d) Nell'effetto Mössbauer l'atomo di ^{57}Fe che assorbe si trova immerso in un grammo atomo dello stesso materiale. In questo regime cosa succede all'effetto del rinculo?
e) Spiegare a parole, senza calcoli, qual'é l'origine dell'effetto rinculo in un'analisi dell'assorbimento/emissione basata sulla soluzione dell'equazione di Schrodinger per l'interazione atomo-laser.

Problema 4.

Si consideri un oscillatore armonico descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{1}$$

All'istante $t = 0$, il sistema è descritto da un pacchetto d'onda Gaussiano $\psi_0(x) = C e^{-x^2/2d^2}$, con

$$\langle\psi_0|x^2|\psi_0\rangle = \frac{d^2}{2} = x_0^2, \quad \langle\psi_0|p^2|\psi_0\rangle = \frac{\hbar^2}{2d^2} = p_0^2. \tag{2}$$

a) Dimostrare la relazione

$$\langle\psi_0|x\,p + p\,x|\psi_0\rangle = 0. \tag{3}$$

b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per $p_H(t)$ e $q_H(t)$ e risolverle.
c) Calcolare il valor medio della dispersione in x, $\langle\psi_S(t)|x^2|\psi_S(t)\rangle$ dove $\psi_S(x,t)$ è la funzione d'onda nello schema di Schrödinger; utilizzando i risultati dei punti (a) e (b).
d)Scrivere le equazioni di Heisenberg per $p_H(t)$ e $q_H(t)$ con l'Hamiltoniana (1), dove $\omega = \omega(t)$ dipende dal tempo t in maniera generale. Risolverle nel caso particolare, $\omega(t) = \frac{\omega_0}{1+\nu t}$, con ω_0, ν constanti, discutendo il limite adiabatico e il limite di variazione rapida.

Problema 5.

In un interferometro di Michelson, la radiazione incidente viene divisa in ampiezza in due parti che si propagano nei due bracci dell'interferometro stesso per raggiungere successivamente il rivelatore e produrre la figura di interferenza.

a) Se la radiazione incidente è costituita da una larga distribuzione spettrale, la figura di interferenza è limitata ad un basso ordine di interferenza. Se per esempio supponiamo di inviare simultaneamente all'ingresso due radiazioni monocromatiche con lunghezze d'onda λ_1=500 nm e λ_2 =501 nm, valutare la massima differenza fra le lunghezze dei due bracci con cui possiamo osservare adeguatamente le frange di interferenza.
b) Due tubi identici di 20 cm di lunghezza, chiusi di lamine di vetro con facce piane e parallele, sono collocati nei due bracci dell'interferometro. Viene usata una sorgente di luce monocromatica con lughezza d'onda λ = 500 nm. I tubi sono inizialmente riempiti di aria a temperatura e pressione standard, il cui indice di rifrazione è $n_1 = 1 + 2.9 \cdot 10^{-4}$. Descrivere quanti minimi di interferenza passano sull'asse centrale dell'interferometro mentre uno dei due tubi viene vuotato.
c) Se indichiamo con δ la differenza di fase creata dalla differenza di cammino sui due bracci, dimostrare che nel caso di uguali intensità I delle radiazioni sui due bracci, la intensità di interferenza puo' essere scritta:

$$I_{TOT} = 2I(1 + cos\delta)$$

d) Usando la formula di cui sopra determinare, in unità di δ la semilarghezza e la distanza fra massimi successivi. Qual è allora la finezza associata ad un inteferometro Michelson?