CONCORSO DI AMMISSIONE AL XXIII ciclo di DOTTORATO IN FISICA
Universita' di Pisa
A.A. 2007/2008

BUSTA n.1

Risolvere tutti i problemi dal n.1 al n. 4 e risolvere un problema a scelta dal n.5 al n.9

1)

Siano dati due sistemi di riferimento *S* e *S'* in moto uniforme lungo l'asse *x* l'uno rispettto all'altro con velocità relativa *v*. In S' è collocato un cannone con alzo θ'.

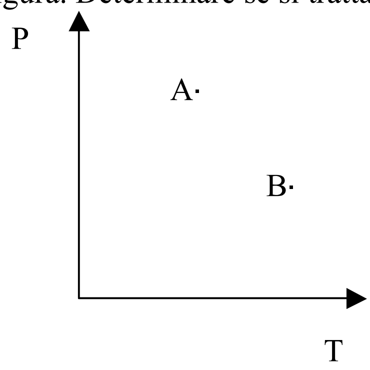
- a) Dire qual è l'alzo del cannone visto dall'osservatore in *S*.
- b) Il cannone spara un proiettile che esce dalla bocca del cannone con velocità *u'* nel riferimento *S'*. Determinare l'angolo che la velocità del proiettile forma con l'asse *x* nel sistema di riferimento *S*. Motivare il risultato ottenuto in (b) confrontandolo con quello del punto (a).

2)

Sia dato un nucleo di carica Ze nell'origine circondato da una nube di carica elettronica con densità $\rho(r)$. Determinare l'energia potenziale per un elettrone a distanza r dal centro del nucleo.

3)

E' dato un gas perfetto che in una trasformazione generica passa dallo stato A allo stato B come in figura. Determinare se si tratta di una compressione o di una espansoine.



4)

Si definisca l'operatore parità $\mathcal{P}$ in una dimensione, che su una funzione d'onda $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ definita sullo spazio unidimensionale $-\infty < x < \infty$ agisce come

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x).$$

Si dimostri che

$$\mathcal{P} = e^{i\pi N}$$

dove si é definito

$$N \equiv \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) - \frac{1}{2},$$

e p ed x soddisfano la relazione di commutazione $[p, x] = -i$ (si è posto $\hbar = 1$).

PROBLEMI A SCELTA

5)

Il sistema Ko $\overline{\text{Ko}}$ decade come K_S e K_L. K_S decade prevalentemente in 2 pioni.

- Per quali valori dello spin isotopico totale il decadimento in due pioni è permesso?
- Trovare il rapporto $R=\Gamma(\pi^+\pi^-)/\Gamma(\pi^0\pi^0)$

E' messo a disposizoine il booklet PDG per consultazione.

6)

Considerare un campo scalare di lagrangiana $\mathcal{L}$, con relazioni di commutazione canoniche

$$\begin{aligned} i[\pi^0(t,\vec{x}),\phi(t,\vec{x})] &= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\ i[\pi^0(t,\vec{x}),\pi^0(t,\vec{x})] &= 0 \\ i[\phi(t,\vec{x}),\phi(t,\vec{x})] &= 0. \end{aligned}$$

Definire il quadri-impulso P^μ

$$P^\mu \equiv \int d^3x\, \theta^{0\mu}$$

in termini del tensore energia–impulso

$$\theta^{\mu\nu} = \pi^\mu \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Dimostrare che P^μ genera le traslazioni dei campi ϕ, cioè

$$i[P^\mu(t),\phi(x)] = \partial^\mu \phi(x).$$

Considerare quindi il caso particolare in cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi(x)\partial_\mu \phi(x) + gx^2\phi(x).$$

Determinare il commutatore $[P^0(t), P^i(t)]$ e commentare il risultato.

7)

Stimare la temperatura media interna del sole approssimandolo come un corpo nero sferico di raggio R=6.7x10^{8}m, assumendo che il cammino libero medio dei fotoni all' interno del sole sia λ=5mm e che la luminosità sia L=4x10^{26}Watt

8)

Un solido contiene atomi magnetici aventi spin $\frac{1}{2}$. A temperature sufficientemente elevate, ciascuno spin è orientato in modo casuale. A temperature sufficientemente basse, tutti gli spin si orientano lungo la stessa direzione. Si trova sperimentalmente che la capacità termica in funzione della temperatura T è espressa da

$$\begin{aligned} C(T) &= A\left(2\frac{T}{T_1}-1\right) \quad \text{se } \frac{1}{2}T_1 < T < T_1 \\ C(T) &= 0 \quad \text{altrimenti,} \end{aligned}$$

ove T_1 è una costante. Trovare l'espressione del coefficiente A.

9)

Si consideri un sistema modello con un singolo picco di assorbimento all'energia $\hbar\omega_0$ (ad esempio un cristallo a due bande con gap proibito $E_g = \hbar\omega_0$). Sia $\epsilon_2(\omega) = C\delta(\omega-\omega_0)$ la parte immaginaria della funzione dielettrica, dove C è l'intensità della transizione.

a) Derivare l'espressione per la parte reale $\epsilon_1(\omega)$ e verificare che cristalli con grande gap proibito hanno piccola costante dielettrica statica.

b) Trovare l'espressione di C in funzione di $\epsilon_1(0)$.

c) Trovare il valore ω_L di ω per cui $\epsilon_1(\omega) = 0$ e verificare che vale $\left(\frac{\omega_L}{\omega_0}\right)^2 = \frac{\epsilon_1(0)}{\epsilon_1(\infty)}$.

d) Discutere il comportamento della riflettività ad incidenza normale nella regione $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_L$.

e) Discutere qualitativamente il caso di un metallo e di un non-metallo.

BUSTA n. 2

Risolvere tutti i problemi dal n.1 al n. 4 e risolvere un problema a scelta dal n.5 al n.9

1)
Un fotone urta elasticamente su un elettrone libero. Calcolare la relazione fra l'angolo di scattering e le energie del fotone entrante ed uscente

2)
Una bolla di sapone sferica (in prima approssimazione conduttrice) di raggio R e spessore s=R/24000, viene caricata al potenziale di 600Volt. La bolla collassa in una goccia sferica e cade verso il suolo. Sapendo che la rigidità dielettrica dell' aria è circa 12000Volt/cm, a quale altezza dal suolo arriva la goccia prima di scaricarsi?

3)
Si verifica sperimentalmente che il calore specifico a volume costante di EuO a basse temperature è proporzionale a $T^{3/2}$. EuO è un metallo od un isolante? Giustificare.

4)
Determinare i valori medi di L_x, L_y, L_x^2 ed L_y^2 in un autostato di L^2 ed L_z.

PROBLEMI A SCELTA

5)
Il sistema $B^0\overline{B^0}$ mostra chiare analogie con il sistema $K^0\overline{K^0}$.
Per descrivere il mixing particella antiparticella in entrambi i casi si fa uso di una Hamiltoniana efficace H_e=M - i/2 Γ , con M e Γ hermitiane, i cui autostati sono: in un caso K_S e K_L e nell'altro B_H e B_L. Ma $\tau(K_S) << \tau(K_L)$, mentre B_H e B_L hanno sostanzialmente le stesse vite medie.
Dare una giustificazione di questo fatto.
6)
Considerare un oscillatore armonico fermionico, definito dalla lagrangiana

$$L = \bar{\psi}\dot{\psi} + \omega\bar{\psi}\psi,$$

dove $\psi(t)$, $\bar{\psi}(t)$ sono due variabili anticommutanti

$$\begin{aligned} \{\bar{\psi}, \psi\} &= 1 \\ \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\} &= 0 \\ \{\psi, \psi\} &= 0. \end{aligned}$$

Dimostrare che la funzione di partizione per questo sistema è data da

$$Z = \det A$$

dove A è l'operatore

$$A = \frac{d}{dt} + \omega.$$

Calcolare il determinante sullo spazio delle funzioni antiperiodiche in un intervallo di lunghezza β, normalizzando il risultato a quello ottenuto nel caso $\omega = 0$.
Suggerimento: ricordare l'identità $\cosh\frac{z}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{((2n-1)\pi)^2}\right)$.

Interpretare il risultato in termini dello spettro di energia di questo sistema.

7)
Stimare l'ordine di grandezza del cammino libero medio di fotoni di $E=10^{15}$eV nello spazio intergalattico assumendo la sola presenza del fondo cosmico da 2.7K. (Approssimare il fondo cosmico come una densità uniforme di fotoni all' energia del picco della distribuzione).

8)
Sia dato un sistema di 2 elettroni descritti dagli spin-orbitali $\psi_1(\mathbf{r}_1,\sigma_1)$ e $\psi_2(\mathbf{r}_2,\sigma_2)$ rispettivamente. Calcolare la probabilità $P(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$ di avere un elettrone nell'elemento di volume $d\mathbf{r}_1$ attorno a $\mathbf{r}_1$ e l'altro nell'elemento di volume $d\mathbf{r}_2$ attorno a $\mathbf{r}_2$ nei casi seguenti:
- elettroni con spin antiparalleli e differenti orbitali spaziali
- elettroni con spin paralleli e differenti orbitali spaziali.

Notare che la $P(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ si ottiene integrando $|\psi_{tot}(\mathbf{r}_1,\sigma_1, \mathbf{r}_2,\sigma_2)|^2$ sugli spin degli elettroni.

Mediare la $P(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ sullo stato fondamentale di un gas di Fermi e , fissato un elettrone di dato spin all'origine, trovare la probabilità di avere un elettrone con lo stesso spin o con spin opposto a distanza $\mathbf{r}$ da esso.

9)
Calcolare la densità degli stati per un gas di particelle massive e per un gas di particelle di massa nulla in $d = 1, 2, 3$ dimensioni.

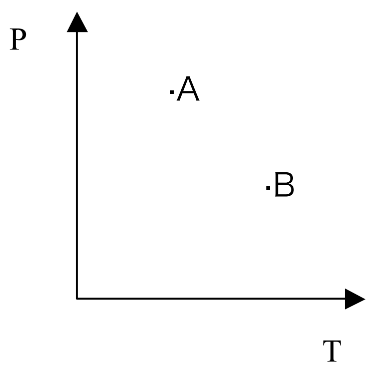
BUSTA n.3

Risolvere tutti i problemi dal n.1 al n. 4 e risolvere un problema a scelta dal n.5 al n.9

1)
Considerare una massa puntiforme ***m*** nel piano ***(x,z),*** collegata all'origine da un filo inestensibile di lunghezza ***L***, immersa in un campo gravitazionale uniforme lungo l'asse ***z*** e inizialmente posta nel punto ***(L,0).*** Si lascia cadere la massa con velocità iniziale nulla.
- Calcolare la velocità della massa e la tensione del filo quando la massa passa per la verticale
- Sotituire il filo inestensibile con un elastico di costante ***k*** e di lunghezza a riposo ***L***. Sia ***L+ΔL*** la lunghezza dell' elastico quando la massa passa per la verticale. Determinare la velocità della massa in funzione di ***ΔL*** quando essa passa per la verticale.

2)
Una camera a ionizzazione a facce piane parallele distanti L, tenuta a potenziale V, è attraversata ortogonalmente da una particella che genera una ionizzazione uniforme di N coppie ione-el./cm. Assumendo che per le rispettive mobilità valga $\mu_{el} >> \mu_{ione}$ e trascurando la diffusione delle particelle, calcolare la corrente i(t) e la carica Q(t) indotte sull' elettrodo che raccoglie gli elettroni.

3)
E' dato un gas perfetto che in una trasformazione generica passa dallo stato A allo stato B come in figura. Determinare se si tratta di una compressione o di una espansione.



4)
Si consideri un sistema di tre particelle non identiche di spin ½ la cui interazione è descritta dall' Hamiltoniana

$$H = A\left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1\right)$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin delle tre particelle. Si determini lo spettro degli autovalori di energia. Che cosa succede se le particelle sono identiche?

PROBLEMI A SCELTA

5)
Pioni e nucleoni interagiscono fortemente fra di loro. Il potenziale di Yukawa descrive questa interazione. Tenendo conto della conservazione dell'isospin nelle interazioni forti, il potenziale di interazione $V_Y(r)$ contiene un fattore che è espresso attraverso gli operatori di isospin $\bar{I}^{(n)}$ dei nucleoni e $\bar{I}^{(\pi)}$ dei pioni.

- Si valuti il rapporto delle sezioni d'urto corrispondenti ad isospin 3/2 ed isospin ½
- Si valutino, in approssimazione di Born, i rapporti relativi delle sezioni d'urto per i processi

$\pi^+ p \Rightarrow \pi^+ p$

$\pi^- p \Rightarrow \pi^- p$

$\pi^- p \Rightarrow \pi^o n$

E' messo a disposizoine il booklet PDG per consultazione.

6)
Determinare la funzione di partizione per un oscillatore armonico unidimensionale $Z \equiv \mathrm{tr}\left[e^{-\beta H}\right]$ attraverso la conoscenza esplicita dello spettro di H. Ripetere quindi il calcolo con il metodo dell'integrale funzionale: dimostrare dapprima che $Z = N\left[\det A\right]^{-1/2}$ dove A è l'operatore

$$A = -\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2.$$

Calcolare quindi il determinante sullo spazio delle funzioni periodiche in un intervallo di lunghezza β, normalizzando il risultato a quello ottenuto nel caso $\omega = 0$.
Suggerimento: ricordare l'identità $\sinh z = z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{(n\pi)^2}\right)$. Interpretare il risultato in termini dello spettro dell'hamiltoniana del sistema.

7)
Stimare l'ordine di grandezza del cammino libero medio di fotoni di $E=10^{15}$eV nello spazio intergalattico assumendo la sola presenza del fondo cosmico da 2.7K. (Approssimare il fondo cosmico come una densità uniforme di fotoni all' energia del picco della distribuzione)

8)
Si consideri un sistema di N elettroni non interagenti in due dimensioni, confinati in una scatola di lati a e b.
a) Si scrivano le energie dello stato fondamentale per $N = 1, 2, 3$ e se ne discutano le rispettive degenerazioni quando $a = b$ oppure $a \neq b$.
b) Si supponga poi che le dimensioni dei due lati della scatola possano variare, e che l'energia elastica classica associata alla scatola sia $E_{el} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$. Si trovi l'energia minima del sistema scatola più elettroni per $N = 1, 2, 3$ e si determini la forma di equilibrio della scatola, ed in particolare, nei vari casi, se si tratta di un quadrato o di un rettangolo.

9)
Calcolare la densità degli stati per un gas di particelle massive e per un gas di particelle di massa nulla in $d = 1, 2, 3$ dimensioni.