Two-level system

Laser excitation, Landau-Zener transition, resonant collisions, radiatively assisted collisions

Variables internes et externes

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + V\left(\left|\hat{\vec{r}}_1 - \hat{\vec{r}}_2\right|\right)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M},\ \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,\ \vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{M}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}}{2M} + \frac{\hat{p}}{2\mu} + V\left(\hat{r}\right) = \hat{H}_{CM} + \hat{H}_{rel}$$

$$\left[\hat{X}_j, \hat{P}_k\right] = i\hbar\delta_{jk},\ \left[\hat{x}_j, \hat{p}_k\right] = i\hbar\delta_{jk},\ \left[\hat{x}_j, \hat{P}_k\right] = 0,$$

$$\left[\hat{X}_j, \hat{p}_k\right] = 0,\ \left[\hat{H}_{CM}, \hat{H}_{rel}\right] = 0$$

En absence d'interaction, l'hamiltonien est la somme de

2 hamiltoniens qui commutent.

Les fonctions d'onde sont alors factorisables.

Plan du cours I

- I - Hamiltonien d’interaction avec une onde électromagnétique
- II - Evolution en bande étroite sans relaxation d’un système à deux niveaux
  - Traitement perturbatif dépendant du temps
  - Approximation du champ tournant, profil de Rabi…
  - Franges de Ramsey, méthode d’excitation en champs séparés

I - Hamiltonien d'interaction avec une onde électromagnétique

Onde électromagnétique : $\left\{\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)\right\}$ **vecteurs réels**

Equations de Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\ ;\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}\ ;\ \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)=\mu_0 j(\vec{r},t)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t},\ \text{avec } \varepsilon_0\mu_0 c^2=1$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0\Rightarrow\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\ ;\ \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0}\Rightarrow\vec{E}=-\vec{\nabla}U-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

le couple $\left\{\vec{A},U\right\}$ décrit un jauge

changement de jauge : $\vec{A}'(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)\ ;\ U'(\vec{r},t)=U(\vec{r},t)-\dfrac{\partial\chi(\vec{r},t)}{\partial t}$

Equations du mouvement de $\vec{A}(\vec{r},t)$ et $U(\vec{r},t)$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}U-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad;\quad\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}U-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

Jauge de Coulomb (ou radiative) : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$; propagation dans le vide $\rho=0,\vec{j}=\vec{0}$

$$\Delta U=0\ \ (U=0)\ ;\ \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\Delta\vec{A}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

Onde électromagnétique plane monochromatique progressive de pulsation ω :

$$\vec{A}(r,t)=\mathrm{Re}\left\{\vec{A}_0\exp-i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\},\text{ avec : }k^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0\text{ et }\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0\Rightarrow\vec{k}\cdot\vec{A}_0=0$$

$$\vec{E}=\mathrm{Re}\left\{i\omega\vec{A}_0\exp-i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}\ ;\ \vec{B}=\mathrm{Re}\left\{i\vec{k}\times\vec{A}_0\exp-i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}$$

$\vec{E}_0=i\omega\vec{A}_0$; $\vec{B}_0=i\vec{k}\times\vec{A}_0 \Rightarrow \left\{\vec{E},\vec{B},\vec{k}\right\}$ forment un trièdre rectangle

fréquence $\nu=\dfrac{\omega}{2\pi}$,longueur d'onde $\lambda=\dfrac{c}{\nu}$, nombre d'onde $k=\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

Polarisation linéaire : $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos\left(\omega t - kz + \varphi\right),$

$\vec{B} = B_0 \vec{e}_y \cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)$, avec $B_0 = E_0 / c$

Polarisation $\sigma_\pm$ définies par rapport à l'axe de quantification $\vec{e}_z$

$$\vec{e}_+ = -\frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \; ; \vec{e}_- = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \; ; \; \vec{E}_\pm = \mathrm{Re}\left\{E_0 \vec{e}_\pm \exp - i\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right\}$$

$$\vec{E}_+ = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left\{\vec{e}_x \cos\left(\omega t - kz + \varphi\right) + \vec{e}_y \sin\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right\}$$

$$\vec{E}_- = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left\{\vec{e}_x \cos\left(\omega t - kz + \varphi\right) - \vec{e}_y \sin\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right\}$$

Polarisation elliptique : $\vec{E} = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0 \exp - i\left(\omega t - kz\right)\right\}$

$$\vec{E}_0 = E_{0+} \exp\left(-i\varphi_+\right)\vec{e}_+ + E_{0-} \exp\left(-i\varphi_-\right)\vec{e}_-$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{E_a \vec{e}_a \cos\left(\omega t - kz + \varphi\right) + E_b \vec{e}_b \sin\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right\}$$

$$\vec{e}_a = -\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y, \; \vec{e}_b = \sin\theta \vec{e}_x - \cos\theta \vec{e}_y, \; \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = 0$$

$$E_a = E_{0+} - E_{0-}, \; E_b = E_{0+} + E_{0-}, \; \varphi = \frac{\left(\varphi_+ + \varphi_-\right)}{2}, \; \theta = \frac{\left(\varphi_+ - \varphi_-\right)}{2}$$

Faisceau gaussien

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{A}}{iz_0}\frac{W_0}{W(z)}\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\xi(z)\right)\exp i\omega t\right\}$$

Rayon de courbure : $R(z) = z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$

Extension spatiale : $W(z) = W_0\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$, taille du faisceau : $W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$

Phase de Guoy : $\xi(z) = Arc\tan\frac{z}{z_0}$

Intensité d'une onde électromagnétique :

$$\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)-\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)=-\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}=0$$

En appliquant la formule d'Ostrogradski :

$$\frac{1}{\mu_0}\iint\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{S}+\iiint\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t}\right)dV=0$$

Pour une onde plane le flux énergétique moyen (ou intensité) est donné par :

$$I=\frac{\varepsilon_0 c}{2}\left|E_0\right|^2$$

Hamiltonien d'interaction ($q < 0$)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - q\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right]^2 + qU\left(\hat{\vec{r}},t\right)$$

Théorème d'Ehrenfest : $\mathrm{i}\hbar \dfrac{d\left\langle \hat{\vec{C}} \right\rangle}{dt} = \mathrm{i}\hbar \left\langle \dfrac{\partial \hat{\vec{C}}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \left[\hat{\vec{C}}, \hat{H} \right] \right\rangle$

$$\frac{d\left\langle \hat{\vec{r}} \right\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[\hat{\vec{r}}, \hat{H} \right] \right\rangle = \frac{1}{m}\left\langle \hat{\vec{p}} - q\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right) \right\rangle = \left\langle \hat{\vec{v}} \right\rangle$$

$$m\frac{d\left\langle \hat{\vec{v}} \right\rangle}{dt} = q\left\langle \frac{\hat{\vec{v}} \times \vec{B}\left(\hat{\vec{r}},t\right) - \vec{B}\left(\hat{\vec{r}},t\right) \times \hat{\vec{v}}}{2} \right\rangle + q\left\langle \vec{E}\left(\hat{\vec{r}},t\right) \right\rangle$$

Hamiltonien : $\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - q\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right]^2 + V(\hat{r}) - \frac{q}{m}\hat{\vec{S}}.\vec{B}\left(\hat{\vec{r}},t\right)$

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})\right) - \frac{q}{m}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right) + \frac{q^2}{2m}\left|A\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right|^2 - \frac{q}{m}\hat{\vec{S}}.\vec{B}\left(\hat{\vec{r}},t\right)$$

Remarque en jauge de Coulomb : $\left[\hat{\vec{p}},\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right] = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right) = 0$

$$\frac{q^2}{2m}\left|A\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right|^2 << \left|\frac{q}{m}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right|$$

$$\frac{\left|\frac{q}{m}\hat{\vec{S}}.\vec{B}\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right|}{\left|\frac{q}{m}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right)\right|} \approx \frac{\hbar k}{p} \approx \frac{a_0}{\lambda} << 1$$

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})\right) - \frac{q}{m}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{A}\left(\hat{\vec{r}},t\right)$$

Approximation dipolaire électrique : $\exp(ikz) = 1 + ikz - \frac{(kz)^2}{2} + \ldots \approx 1$

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})\right) - \frac{q}{m}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{A}\left(\vec{0},t\right), \text{ si : } kz \sim \frac{a_0}{\lambda} << 1$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}_{DE}, \text{ avec : } \hat{W}_{DE} = -\frac{q}{m}\hat{\vec{p}} \cdot \vec{A}\left(\vec{0}, t\right)$$

Autre forme de l'hamiltonien (transformation de jauge de Göppert-Mayer)

$$\hat{W}'_{DE} = -\hat{\vec{D}} \cdot \vec{E}\left(\vec{0}, t\right), \text{ avec le moment dipolaire : } \hat{\vec{D}} = q\hat{\vec{r}}$$

$$\text{Jauge de Coulomb : } \vec{A}\left(\vec{r}, t\right) = -\frac{E_0}{\omega}\vec{e}_x \sin\left(\omega t - kz + \varphi\right), \; U\left(\vec{r}, t\right) = 0$$

$$\text{Changement de jauge : } \chi\left(\vec{r}, t\right) = \frac{E_0}{\omega} x \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$\vec{A}'\left(\vec{r}, t\right) = \vec{A}\left(\vec{r}, t\right) + \vec{\nabla}\chi\left(\vec{r}, t\right) = \frac{E_0}{\omega}\vec{e}_x\left[-\sin\left(\omega t - kz + \varphi\right) + \sin\left(\omega t + \varphi\right)\right],$$

$$U'\left(\vec{r}, t\right) = U\left(\vec{r}, t\right) - \frac{\partial\chi\left(\vec{r}, t\right)}{\partial t} = -xE_0\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$kz \approx 0 \Rightarrow \vec{A}'\left(\vec{r}, t\right) = 0, \; U'\left(\vec{r}, t\right) = -xE_0\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - q\vec{A}\left(\vec{0}, t\right)\right]^2 + qV\left(\hat{r}\right)$$

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} - q\vec{A}'\left(\hat{\vec{r}}, t\right)\right]^2 + qV\left(\hat{r}\right) + qU'\left(\hat{\vec{r}}, t\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + qV\left(\hat{r}\right) - q\hat{x}E_0\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

Remarques : dans la nouvelle jauge $\dfrac{d\langle \hat{\vec{r}} \rangle}{dt} = \dfrac{\langle \hat{\vec{p}} \rangle}{m} = \langle \hat{\vec{v}} \rangle$

Elément de matrice de W_{DE} : $\langle \psi_f | \hat{W}_{DE} | \psi_i \rangle = \dfrac{qE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_f | \hat{p}_x | \psi_i \rangle$

$$\left[\hat{x}, \hat{H}_0 \right] = i\hbar \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial x} = i\hbar \frac{\hat{p}_x}{m} \Rightarrow \langle \psi_f | \hat{W}_{DE} | \psi_i \rangle = iqE_0 \frac{\omega_{if}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \langle \psi_f | \hat{x} | \psi_i \rangle$$

II - Evolution en bande étroite sans relaxation d'un système à deux niveaux

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}(t)$$

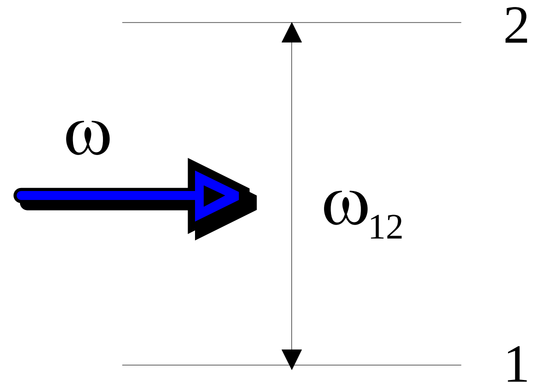
$$\hat{H}_0 = E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2|$$

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega_{12} = E_2 - E_1$$

$$\hat{W}(t) = -\hat{\vec{D}} \cdot \vec{E}(t) = -\left(\hat{\vec{D}} \cdot \vec{e}\right) E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{W}(t) = \hbar \left(\frac{\Omega}{2} \exp i\omega t + \frac{\Omega^*}{2} \exp - i\omega t \right) \left[|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| \right]$$

$$\hbar\Omega = -E_0 \exp i\varphi \left\langle 1 \middle| \hat{\vec{D}} \cdot \vec{e} \middle| 2 \right\rangle$$



Equation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle,\ \text{avec :}\ \left|\psi(t)\right\rangle = a_1(t)\left|1\right\rangle + a_2(t)\left|2\right\rangle$$

$$i\frac{d}{dt}a_1(t) = \frac{E_1}{\hbar}a_1(t) + \left(\frac{\Omega}{2}\exp i\omega t + \frac{\Omega^*}{2}\exp - i\omega t\right)a_2(t)$$

$$i\frac{d}{dt}a_2(t) = \frac{E_2}{\hbar}a_2(t) + \left(\frac{\Omega}{2}\exp i\omega t + \frac{\Omega^*}{2}\exp - i\omega t\right)a_1(t)$$

II.1 - Traitement perturbatif dépendant du temps

Etat initial : $a_1(0)=1,\ a_2(0)=0 \Rightarrow\ a_1^{(0)}(0)=1,\ \ a_i^{(j)}(t)=0 \text{ si } \{i,j\}\neq\{1,0\}$

Ordre zéro : $a_1^{(0)}(t)=\exp-\dfrac{iE_1t}{\hbar},\ a_2^{(0)}(t)=0$

Ordre un :

$$i\frac{d}{dt}a_1^{(1)}(t)=\frac{E_1}{\hbar}a_1^{(1)}(t)$$

$$i\frac{d}{dt}a_2^{(1)}(t)=\frac{E_2}{\hbar}a_2^{(1)}(t)+\left(\frac{\Omega}{2}\exp i\omega t+\frac{\Omega^*}{2}\exp-i\omega t\right)a_1^{(0)}(t)$$

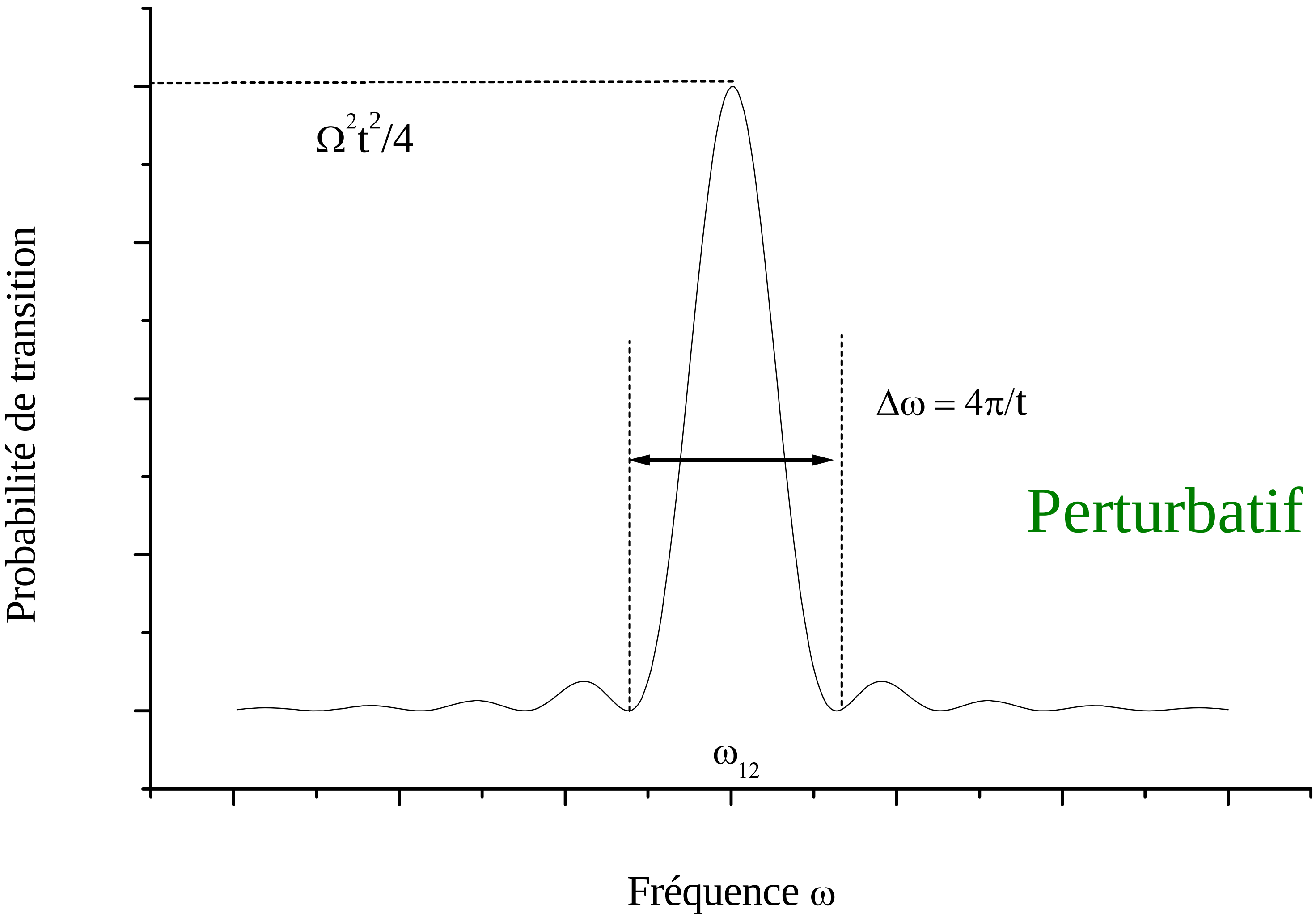
$$a_1^{(1)}(t)=0,\ a_2^{(1)}(t)=\exp-\frac{iE_2t}{\hbar}\left[A^+ + A^-\right]$$

Terme anti-résonnant : $A^+=\dfrac{\Omega}{2}\dfrac{\exp i\left(\omega+\omega_0\right)t-1}{i\left(\omega+\omega_0\right)}=\dfrac{\Omega}{2}\exp\left(\dfrac{i\left(\omega+\omega_0\right)t}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\left(\omega+\omega_0\right)t/2\right)}{\left(\omega+\omega_0\right)/2}$

Terme résonnant : $A^-=\dfrac{\Omega^*}{2}\dfrac{\exp i\left(\omega-\omega_0\right)t-1}{i\left(\omega-\omega_0\right)}=\dfrac{\Omega^*}{2}\exp\left(\dfrac{i\left(\omega-\omega_0\right)t}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\left(\omega-\omega_0\right)t/2\right)}{\left(\omega-\omega_0\right)/2}$

$$P_{1\to2}(t)\approx\left|A^-\right|^2=\frac{|\Omega|^2}{4}\left\{\frac{\sin\left(\left(\omega-\omega_0\right)t/2\right)}{\left(\omega-\omega_0\right)/2}\right\}^2$$

$$(\omega+\omega_0)t \approx 2\omega t >> 1 \Rightarrow t << 1/\omega_0, 1/\omega$$



$$\text{Perturbatif : } t << \frac{1}{|\Omega|}$$

II.2 - Approximation du champ tournant

On pose : $a_1(t) = \alpha_1(t)\exp - i\omega_1 t,\ a_2(t) = \alpha_2(t)\exp - i\omega_1 t\ \ \exp - i\omega t$

$$i\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = \left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\Omega^*}{2}\exp - i2\omega t\right)\alpha_2(t)$$

$$i\frac{d}{dt}\alpha_2(t) = -\delta a_2(t) + \left(\frac{\Omega}{2}\exp i2\omega t + \frac{\Omega^*}{2}\right)\alpha_1(t)$$

$$\delta = \omega - \omega_0 = \omega - (\omega_2 - \omega_1)$$

On fait l'approximation que les $\alpha_i(t)$ et leurs dérivées ne varient pas sur une période optique T

$$\alpha_i(t) = \overline{\alpha}_i(t) = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_t^{t+T}\alpha_i(t')dt',\ \text{mais}\ \frac{1}{\mathrm{T}}\int_t^{t+T}\alpha_i(t')\exp(-i2\omega t')dt' \cong 0$$

Les équations peuvent s'écrire (validité : $\omega, \omega_0 >> |\delta|, |\Omega|$) :

$$i\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = \frac{\Omega}{2}\alpha_2(t)$$

$$i\frac{d}{dt}\alpha_2(t) = -\delta\alpha_2(t) + \frac{\Omega^*}{2}\alpha_1(t)$$

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{\Omega}{2}\\ \frac{\Omega^*}{2} & -\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{pmatrix}$$

Valeurs propres de la matrice d'évolution : $-\lambda\left(-\lambda-\delta\right)-\frac{|\Omega|^2}{4}=0$

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}\left(-\delta\pm\sqrt{\delta^2+|\Omega|^2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\delta\pm\Omega'\right),\ \text{avec : }\Omega'=\sqrt{\delta^2+|\Omega|^2}$$

Solutions générales : $\alpha_i(t)=\left(A_i\cos(\Omega' t/2)+B_i\sin(\Omega' t/2)\right)\exp i\delta t/2$

Les A_i et B_i dépendent des $\alpha_i(0)$. Cas particulier : $\alpha_1(0)=1,\ \alpha_2(t)=0$:

$$\dot{\alpha}_1(0)=0,\ \dot{\alpha}_2(0)=-\frac{i\Omega^*}{\Omega'}$$

$$\alpha_1(t)=\left(\cos(\Omega' t/2)-\frac{i\delta}{\Omega'}\sin(\Omega' t/2)\right)\exp i\delta t/2$$

$$\alpha_2(t)=-\frac{i\Omega^*}{\Omega'}\sin(\Omega' t/2)\exp i\delta t/2$$

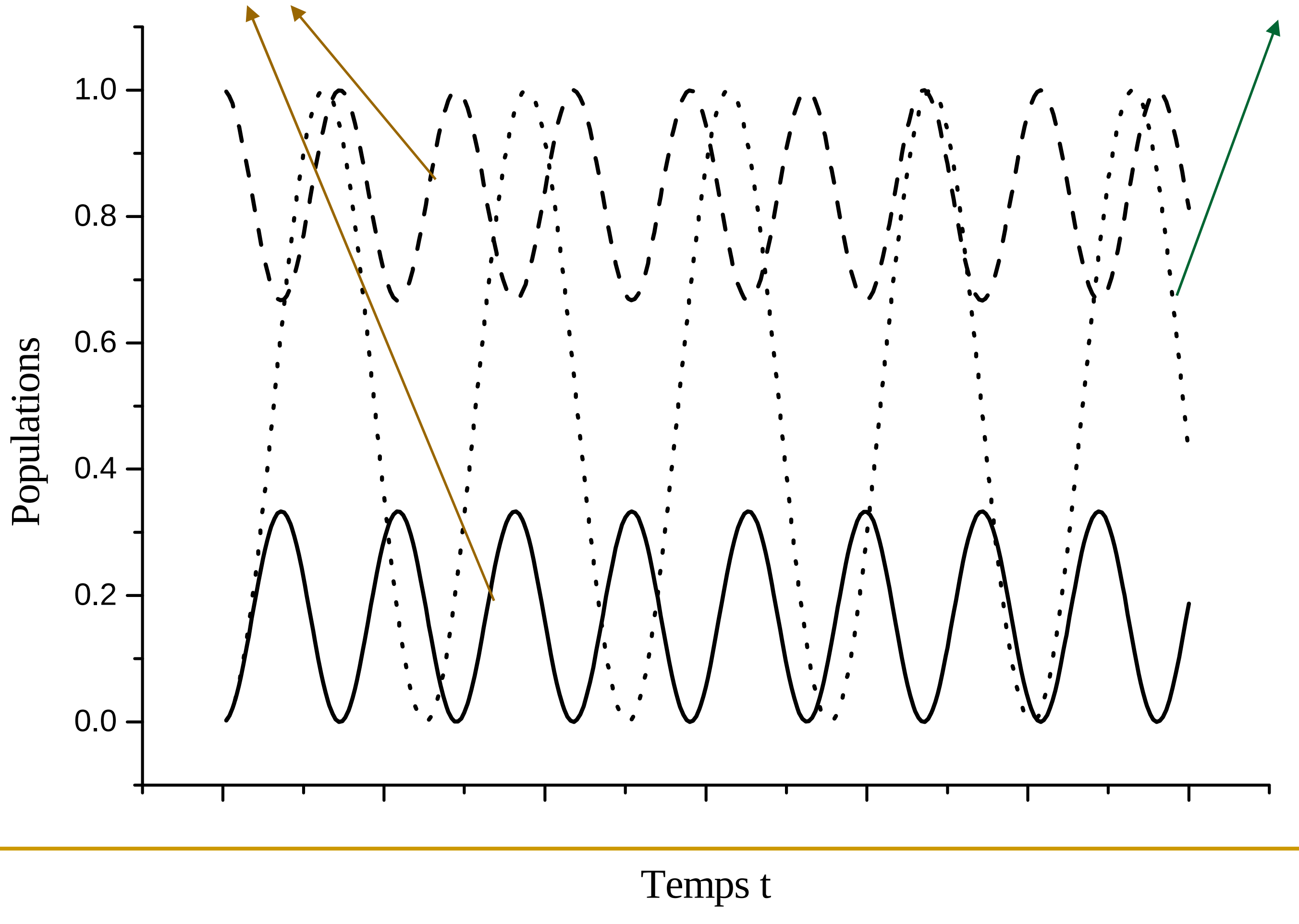
$$N_1(t)=|\alpha_1(t)|^2=1-N_2(t),\ N_2(t)=\frac{|\Omega|^2}{\Omega'^2}\sin^2(\Omega' t/2)$$

Le champ e.m. est supposé cohérent pendant la durée de l'interaction

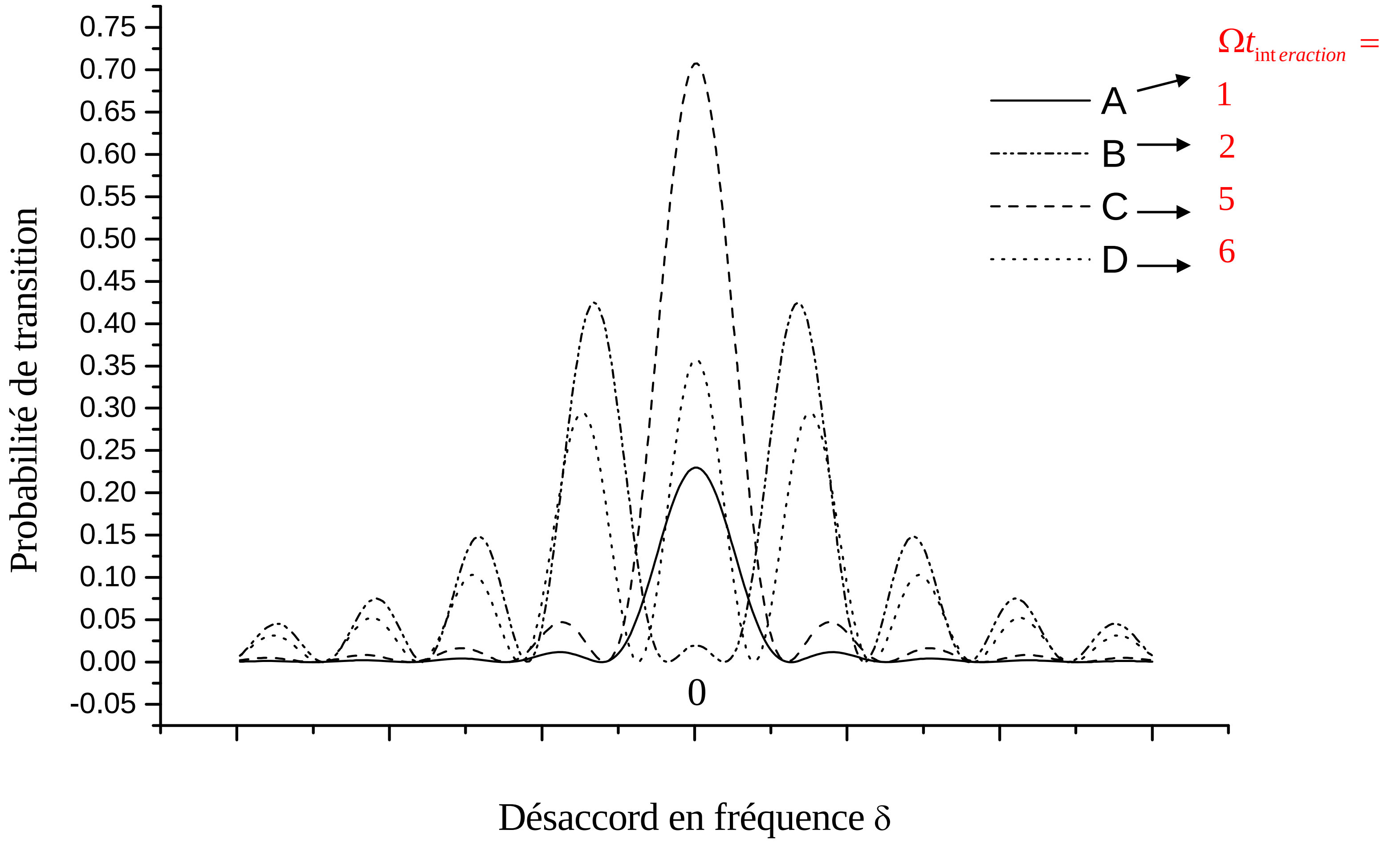
II.2.a - Oscillations de Rabi

Hors résonance (N_1 et N_2)
$\delta=\Omega$

A résonance (N_2)
Fréquence de Rabi : Ω

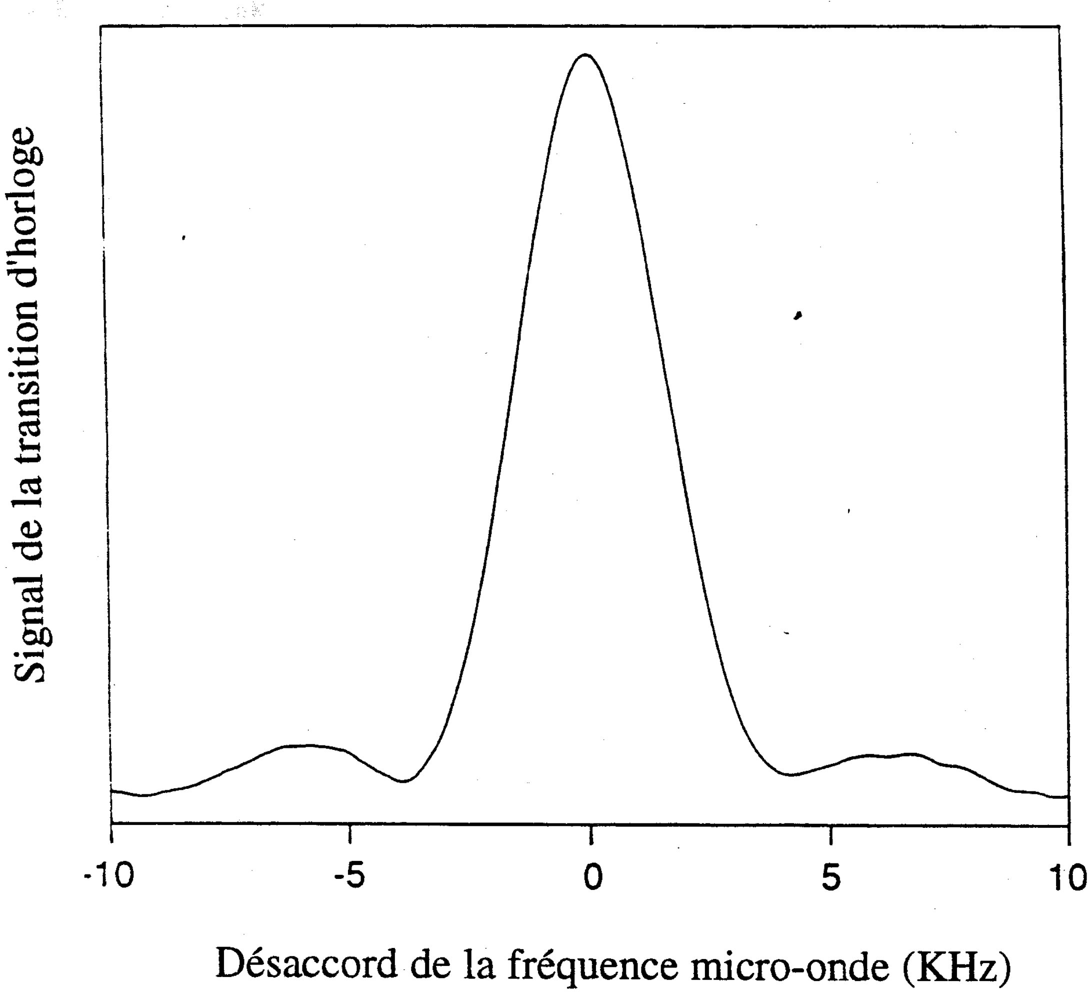


Profil de Rabi



Profil de Rabi d'un jet ralenti à v=50m/s sur transition d'horloge à Cs

Thèse de Saïda Guellati 1992, Opt. Comm. *82, 27 (1991)*



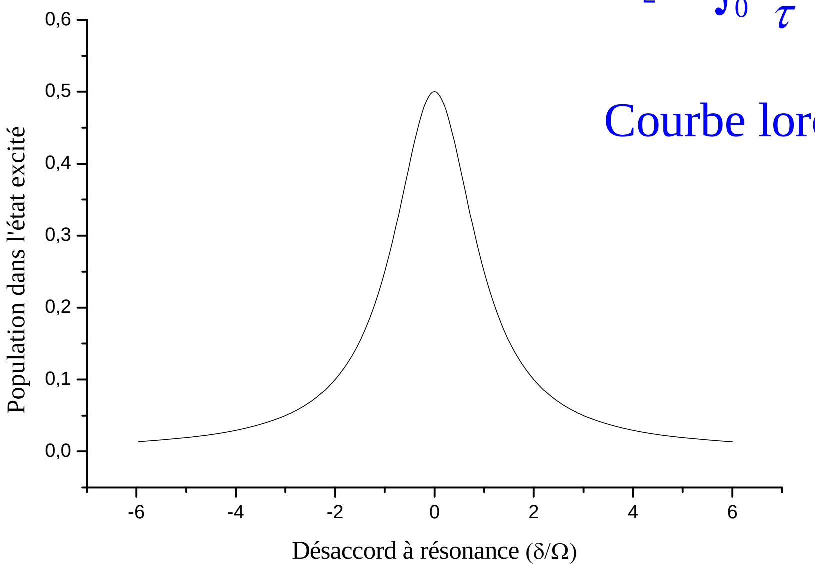
II.2.b - Influence du temps d'interaction

On suppose que les atomes "voient" le champ e.m. pendant un temps $t = t_{\text{int}}$ avec une probabilité $P(t)$

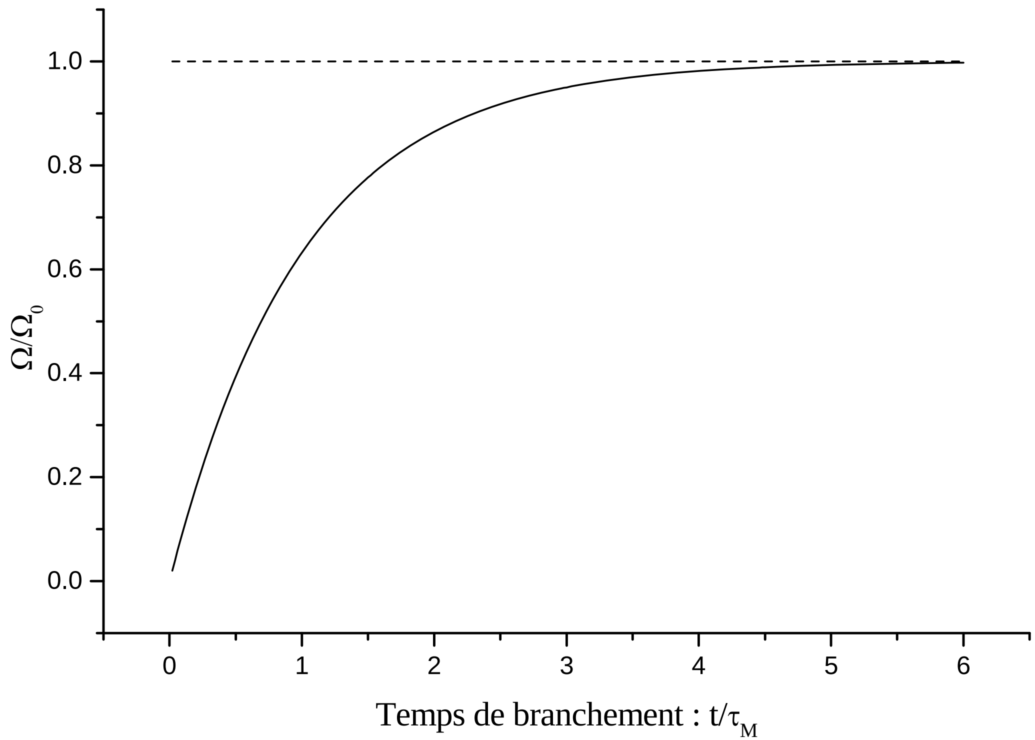
exemple : $P(t) = \frac{1}{\tau}\exp(-t/\tau), \quad \Gamma = \frac{1}{\tau}$

$$\bar{N}_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\tau}\exp(-t/\tau)N_2(t)dt = \frac{1}{2}\frac{|\Omega|^2}{\delta^2 + |\Omega|^2 + \Gamma^2}$$

Courbe lorentzienne de largeur : $2\sqrt{|\Omega|^2 + \Gamma^2}$



II.2.c - Mode de branchement



$$\Omega(t) = \Omega_0 \left(1 - \exp(-t/\tau_M)\right), \quad \Gamma_{\mathrm{M}} = 1/\tau_M$$

Cas hors résonance

$\delta >> |\Omega_0|$: un calcul de perturbation dépendant du temps suffit : $i\dfrac{d\alpha_2(t)}{dt} = -\delta\alpha_2(t) + \dfrac{\Omega_0^*}{2}\left(1-\exp(-t/\tau_M)\right)$

$$\alpha_2(t) = -i\exp i\delta t\int_0^t \frac{\Omega_0^*}{2}\left(1-\exp(-t'/\tau_M)\right)\exp(-i\delta t')dt' = -i\exp i\delta t\frac{\Omega_0^*}{2}\left[\frac{\exp(-i\delta t)-1}{-i\delta} - \frac{\exp(-i\delta t-\Gamma_M t)-1}{-i\delta-\Gamma_M}\right]$$

$$t >> \tau_M,\quad \alpha_2(t) = -i\exp i\delta t\frac{\Omega_0^*}{2}\left[\frac{\exp(-i\delta t)}{-i\delta} + \frac{\Gamma_M}{i\delta\left(i\delta+\Gamma_M\right)}\right]$$

$$N_2(t) = \frac{|\Omega_0|^2}{4\delta^2}\left|\frac{\Gamma_M}{\left(i\delta+\Gamma_M\right)} - \exp(-i\delta t)\right|^2;\quad \frac{\Gamma_M}{\left(i\delta+\Gamma_M\right)} = \sqrt{\frac{\Gamma_M^2}{\Gamma_M^2+\delta^2}}\exp -i\theta,\quad \cos\theta = \frac{\Gamma_M}{\sqrt{\Gamma_M^2+\delta^2}},\quad \sin\theta = \frac{\delta}{\sqrt{\Gamma_M^2+\delta^2}}$$

$N_2(t) = \dfrac{|\Omega_0|^2}{4\delta^2}\left[\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta\cos\left(\delta t - \theta\right)\right]$, la population oscille entre $\dfrac{|\Omega_0|^2}{4\delta^2}\left[\cos\theta - 1\right]^2$ et $\dfrac{|\Omega_0|^2}{4\delta^2}\left[\cos\theta + 1\right]^2$.

Population moyenne : $\bar{N}_2 = \dfrac{|\Omega_0|^2}{4\delta^2}\left[\cos^2\theta + 1\right] = \dfrac{|\Omega_0|^2}{4\delta^2}\left[\dfrac{2\Gamma_M^2+\delta^2}{\Gamma_M^2+\delta^2}\right]$.

Branchement soudain ou diabatique $\delta << \Gamma_M$: $\bar{N}_2 = \dfrac{|\Omega_0|^2}{2\delta^2}$.

Branchement adiabatique $\delta >> \Gamma_M$: $\bar{N}_2 = \dfrac{|\Omega_0|^2}{4\delta^2}$.

Cas à résonance

$$i\frac{d}{dt}\alpha_1(t)=\frac{\Omega(t)}{2}\alpha_2(t)=\frac{|\Omega(t)|}{2}\exp(i\varphi)\,\alpha_2(t)$$

$$i\frac{d}{dt}\alpha_2(t)=\frac{\Omega^*(t)}{2}\alpha_1(t)=\frac{|\Omega(t)|}{2}\exp(-i\varphi)\,\alpha_1(t)$$

φ phase indépendante du temps (champ monochromatique)

On pose : $\xi=\int_0^t\frac{|\Omega(t')|}{2}dt'$, et $\frac{d\xi}{dt}=\frac{|\Omega(t)|}{2}$

$$i\frac{d\alpha_1(\xi)}{d\xi}=\exp(i\varphi)\,\alpha_2(\xi),\quad i\frac{d\alpha_2(\xi)}{d\xi}=\exp(-i\varphi)\,\alpha_1(\xi)$$

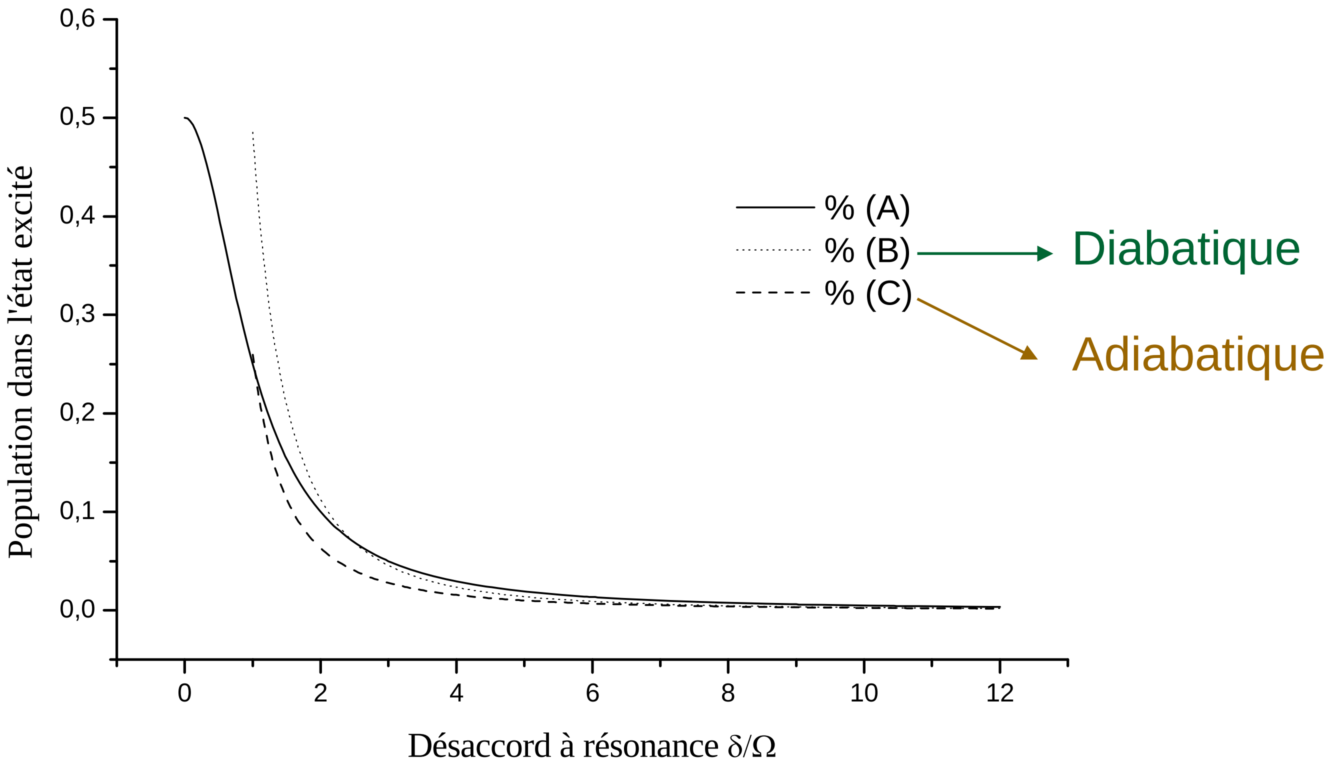
$\frac{d^2\alpha_2(\xi)}{d\xi^2}+\alpha_2(\xi)=0$, avec : à $t=0$; $\xi=0$, $\alpha_1(\xi=0)=1$, $\alpha_2(\xi=0)=0$

$$\alpha_2(\xi)=-i\exp(-i\varphi)\sin\xi,\ \alpha_1(\xi)=\cos\xi;\ \alpha_2(t)=-i\exp(-i\varphi)\sin\left[\int_0^t\frac{|\Omega(t')|}{2}dt'\right],\ \alpha_1(t)=\cos\left[\int_0^t\frac{|\Omega(t')|}{2}dt'\right]$$

$\Omega(t)=\Omega_0\left(1-\exp(-t/\tau_M)\right)$, $\xi=\frac{\Omega_0}{2}\left[t+\tau_M\left(\exp(-t/\tau_M)-1\right)\right]\simeq\frac{\Omega_0}{2}[t-\tau_M]$ si $t>>\tau_M$

$$\alpha_2(t)=-i\exp(-i\varphi)\sin\left[\frac{\Omega_0}{2}(t-\tau_M)\right],\ \alpha_1(t)=\cos\left[\frac{\Omega_0}{2}(t-\tau_M)\right]\ \Rightarrow\ \bar{N}_2=1/2$$

Populations moyennes



II.2.d – Excitation impulsionnelle

Impulsion créneau T : $N_2(t>T)=\frac{|\Omega|^2}{\delta^2+|\Omega|^2}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\delta^2+|\Omega|^2}}{2}T\right)$, aire de l'impulsion : $\theta=|\Omega|T$

Impulsion quelconque (largeur T) :

(a) A résonance : $\alpha_1(t=+\infty)=\cos\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Omega(t')|}{2}dt'\right]$, $\alpha_2(t=+\infty)=-i\exp(-i\varphi)\sin\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Omega(t')|}{2}dt'\right]$

Aire de l'impusion : $\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Omega(t)|\,dt$

(b) Hors résonance $(\delta >> \max|\Omega|)$ ou traitement perturbatif $(\theta << 1)$: $\alpha_2(t=+\infty)=-i\exp i\delta t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Omega^*(t')}{2}\exp(-i\delta t')dt'$

(c) Cas général $\theta\geq 1$, $\max|\Omega|\geq\delta$: pas de soltion analytique

Excitation par une impulsion très brève $\delta T<<1$: $i\frac{d}{dt}\alpha_1(t)=\frac{\Omega}{2}\alpha_2(t)$, $i\frac{d}{dt}\alpha_2(t)=-\delta a_2(t)+\frac{\Omega^*}{2}\alpha_1(t)$

$\alpha_2(t)=\beta_2(t)\exp i\delta t$: $i\frac{d}{dt}\alpha_1(t)=\frac{\Omega\exp i\delta t}{2}\beta_2(t)\approx\frac{\Omega}{2}\beta_2(t)$, $i\frac{d}{dt}\beta_2(t)=\frac{\Omega^*\exp -i\delta t}{2}\alpha_1(t)\approx\frac{\Omega^*}{2}\alpha_1(t)$

$\alpha_2(t_{final}\sim T)=-i\exp(-i\varphi)\sin\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Omega(t')|}{2}dt'\right]$, $N_2(t_{final})=\sin^2\frac{\theta}{2}$

II.2.e – Excitation d’un ensemble de niveaux proches par une impulsion courte

$$\hat{H} = \sum_{i=0,1,2} E_i \left|i\right\rangle\left\langle i\right| + \sum_{i=1,2}\left\{\frac{\Omega_{0i}}{2}\exp i\omega t + \frac{\Omega_{0i}^*}{2}\exp - i\omega t\right\}\left[\left|i\right\rangle\left\langle 0\right| + \left|0\right\rangle\left\langle i\right|\right]$$

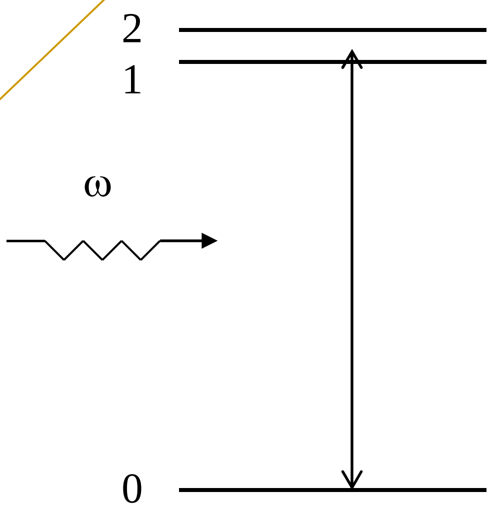
$$\left|\psi(t)\right\rangle = \alpha_0(t)\exp-\frac{iE_0t}{\hbar}\left|0\right\rangle + \alpha_1(t)\exp-\frac{iE_0t}{\hbar}\exp-i\omega t\left|1\right\rangle + \alpha_2(t)\exp-\frac{iE_0t}{\hbar}\exp-i\omega t\left|2\right\rangle$$

Impulsion courte : $\delta_{i=1,2} = \omega - \left(E_i - E_0\right)/\hbar,\ \delta_{i=1,2}T << 1$

$$i\frac{d\alpha_0(t)}{dt} = \frac{\Omega_{01}}{2}\alpha_1(t) + \frac{\Omega_{02}}{2}\alpha_2(t),\quad i\frac{d\alpha_{i=1,2}(t)}{dt} = \cancel{-\delta_{i=1,2}\alpha_{i=1,2}(t)} + \frac{\Omega_{0i=1,2}^*}{2}\alpha_0(t)$$

Après excitation $\theta = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\left|\Omega_{01}(t')\right|^2 + \left|\Omega_{02}(t')\right|^2}\,dt'$: $\alpha_0(t\sim T) = \cos\frac{\theta}{2}$,

$$\alpha_{i=1,2}(t\sim T) = -i\frac{\Omega_{0i=1,2}^*}{\sqrt{\left|\Omega_{01}(t')\right|^2 + \left|\Omega_{02}(t')\right|^2}}\sin\frac{\theta}{2}$$



II.3 – Franges de Ramsey
Méthode d'excitation en champs séparés

$$i\frac{d\alpha_1}{dt}=\frac{\Omega}{2}\alpha_2\ ,\ i\frac{d\alpha_2}{dt}=-\delta\alpha_2+\frac{\Omega^*}{2}\alpha_1$$

Champ faible (ordre 1) :

$$i\frac{d\alpha_1}{dt}=0\ ,\ i\frac{d\alpha_2}{dt}=-\delta\alpha_2+\frac{\Omega^*}{2}$$

$$\alpha_1^{(0)}=1\ ,\ \alpha_2^{(0)}=0$$

$$\alpha_2(t)=\beta_2(t)\exp i\delta t\ ,\ i\frac{d\beta_2}{dt}=\frac{\Omega^*}{2}\exp-i\delta t\ ,\ \beta_2(t)=\int_0^t\frac{\Omega^*}{2i}\exp-i\delta t'\,dt'$$

Impulsion créneau de durée 2τ : $\beta_2(t>2\tau)=-i\frac{\Omega^*}{\delta}\exp-i\delta\tau\sin\delta\tau\ ,\ n_2(t>2\tau)=\frac{|\Omega|^2}{\delta^2}\sin^2\delta\tau$

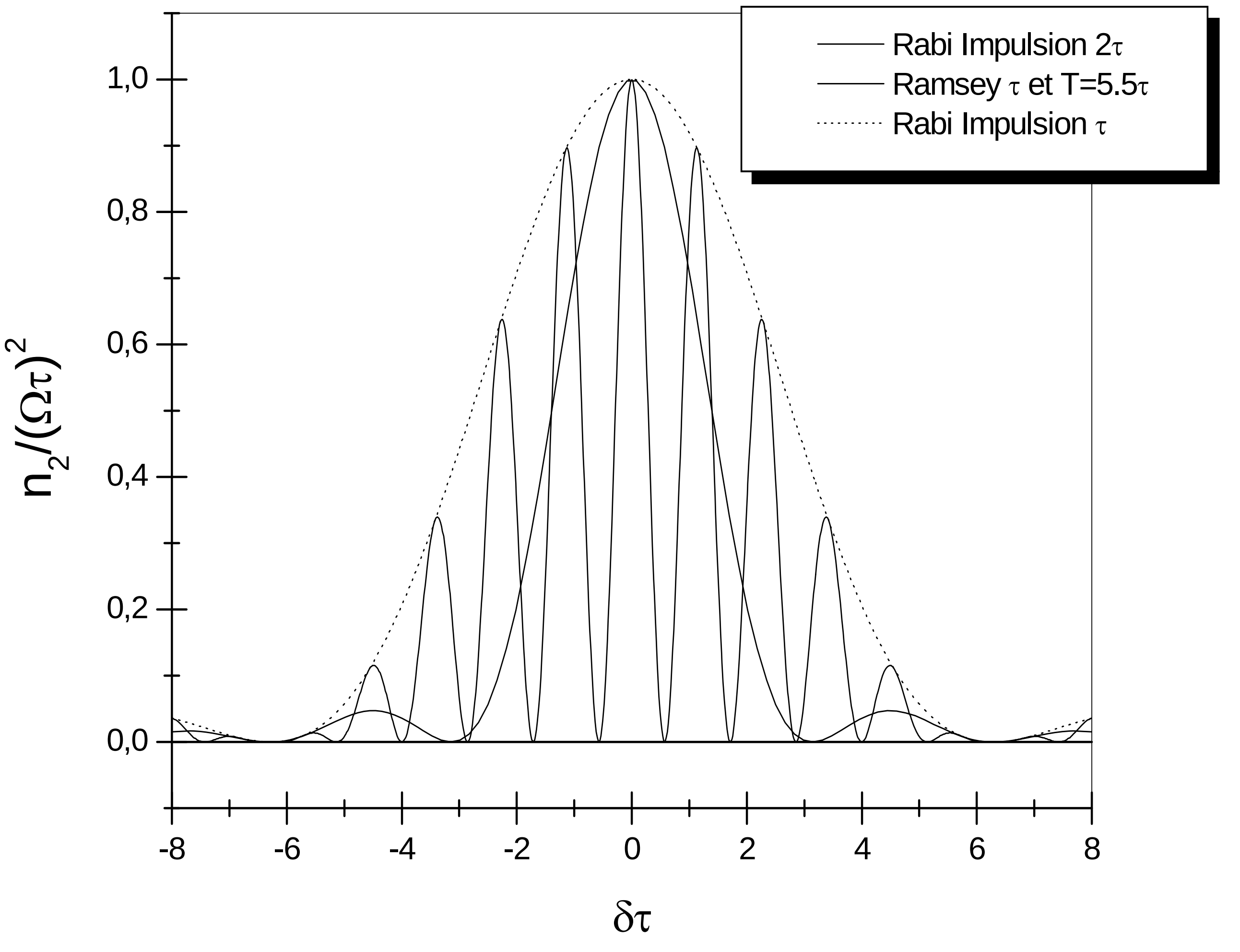
$$n_2(t>2\tau)=|\Omega\tau|^2\sin\mathrm{c}^2\delta\tau$$

Deux impulsions de durée τ, séparées par un temps T

$$\beta_2(t>2\tau+T)=\int_0^\tau\frac{\Omega^*}{2i}\exp-i\delta t'\,dt'+\int_T^{T+\tau}\frac{\Omega^*}{2i}\exp-i\delta t'\,dt'=\left(1+\exp-i\delta T\right)\left[-i\frac{\Omega^*}{\delta}\exp\frac{-i\delta\tau}{2}\sin\frac{\delta\tau}{2}\right]$$

$$n_2(t>2\tau+T)=|\Omega\tau|^2\sin\mathrm{c}^2\left(\frac{\delta\tau}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\delta T}{2}\right)$$

Analogie avec des fentes d'Young



Rabi Impulsion 2τ
Ramsey τ et T=5.5τ
Rabi Impulsion τ
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
$n_2/(\Omega\tau)^2$
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
δτ

Dispersion des temps d'interaction

Deux impulsions de durée τ, séparées par un temps $T=\alpha\tau$,

mais avec dispersion du temps d'interaction τ

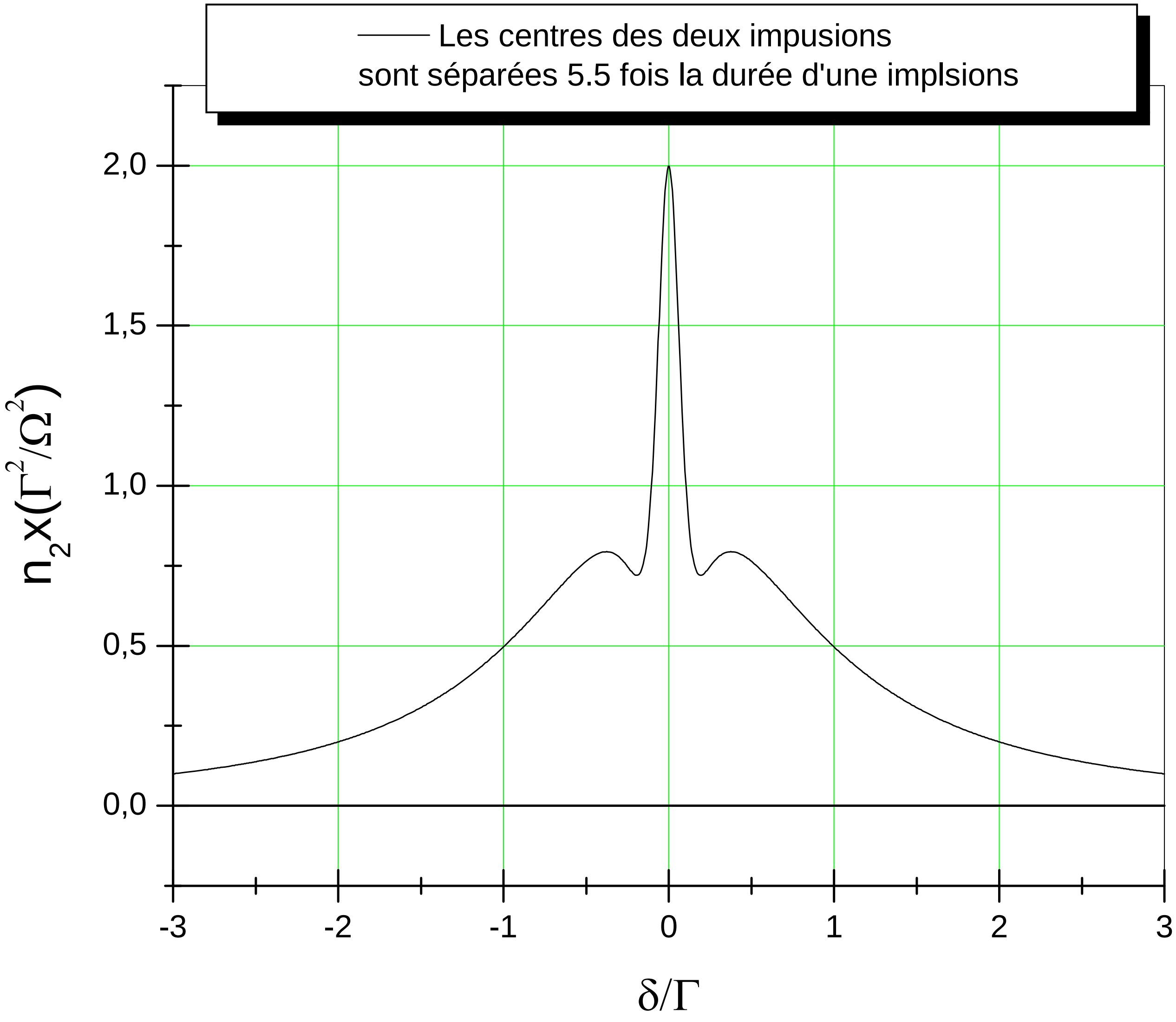
$$\bar{n}_2 = \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\tau/\tau_0\right)}{\tau_0} \left|\Omega\tau\right|^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\delta\tau}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\delta\alpha\tau}{2}\right) d\tau$$

Analogie avec des fentes d'Young en lumière blanche

Conservation de la frange centrale

$$\bar{n}_2 = \frac{\left|\Omega\right|^2}{\delta^2}\left[1 - \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\delta^2} + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\alpha^2\delta^2} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\left(\alpha+1\right)^2\delta^2} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\left(\alpha-1\right)^2\delta^2}\right]$$

$\Gamma = 1/\tau_0$


Les centres des deux impusions
sont séparées 5.5 fois la durée d'une implsions
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
-3
-2
-1
0
1
2
3
$n_2 x(\Gamma^2/\Omega^2)$
δ/Γ

N impulsions

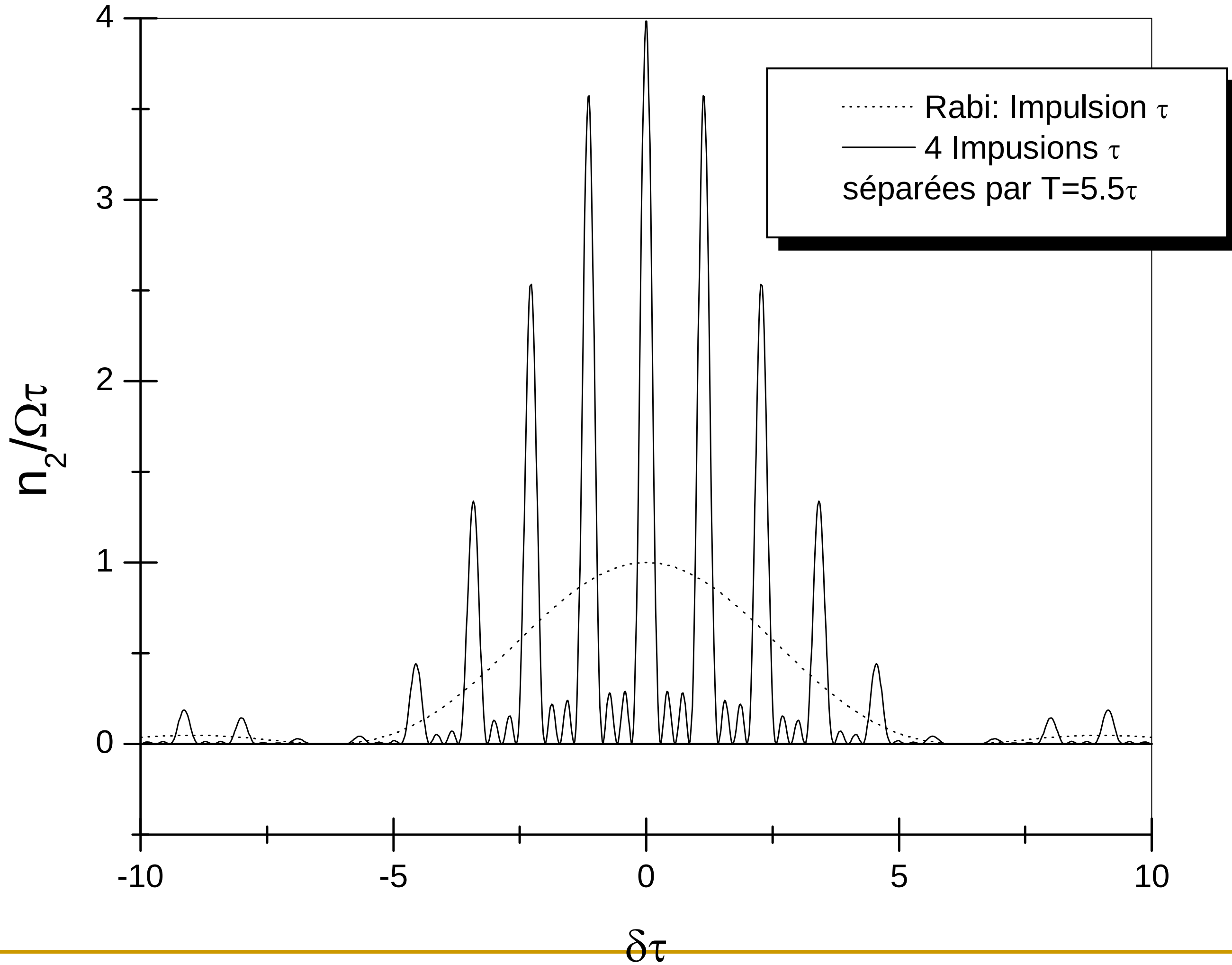
N impulsions de durée τ, séparées par un temps T

$$\beta_2(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jT}^{jT+\tau} \frac{\Omega^*}{2i} \exp - i\delta t' dt' = \sum_{j=0}^{N-1} \exp - i\delta jT \left[-i \frac{\Omega^*}{\delta} \exp \frac{-i\delta\tau}{2} \sin \frac{\delta\tau}{2} \right]$$

$$n_2(t) = \frac{1}{4} |\Omega\tau|^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\delta\tau}{2}\right) \left| \frac{1 - \exp - i\delta NT}{1 - \exp - i\delta T} \right|^2$$

$$n_2(t) = \frac{1}{4} |\Omega\tau|^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\delta\tau}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{\delta NT}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta T}{2}\right)}$$

Analogie avec un réseau de fentes


Rabi: Impulsion τ
4 Impusions τ
séparées par T=5.5τ
n2/Ωτ
δτ
4
3
2
1
0
-10
-5
0
5
10

Deux impulsions π/2

$$i\frac{d\alpha_1}{dt}=\frac{\Omega}{2}\alpha_2\ ,\ \ i\frac{d\alpha_2}{dt}=-\delta\alpha_2+\frac{\Omega^*}{2}\alpha_1$$

Impulsions $\pi/2$ $\left(|\Omega|\tau=\pi/2\right)$: $\alpha_1(\tau)=\left(\cos(\Omega'\tau/2)-\frac{i\delta}{\Omega'}\sin(\Omega'\tau/2)\right)\exp i\delta\tau/2$

$$\alpha_2(\tau)=-\frac{i\Omega^*}{\Omega'}\sin(\Omega'\tau/2)\exp i\delta\tau/2\ ,\ \text{ avec : }\ \Omega'=\sqrt{|\Omega|^2+\delta^2}$$

$$\left|\frac{\delta}{\Omega}\right|<<1\ ,\ \ \alpha_1(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \ \alpha_2(\tau)=-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Evolution libre de τ à $\tau+T$: $\alpha_1(\tau+T)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \ \alpha_2(\tau+T)=-i\frac{\sqrt{2}}{2}\exp i\delta T$

Passage de la seconde impulsion $\pi/2$

$$\frac{d\alpha_2}{dt}(\tau+T)=i\delta\frac{\sqrt{2}}{2}\exp i\delta T+\frac{\Omega^*}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{\Omega^*}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_2(2\tau+T)\approx\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}\exp i\delta T\cos(\Omega'\tau/2)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\Omega'\tau/2)\right)\exp i\delta\tau/2$$

$$n_2(2\tau+T)=\cos^2\left(\frac{\delta T}{2}\right)$$

2 impulsions π/2 (cas général)

$$i\frac{d\alpha_1}{dt}=\frac{\Omega}{2}\alpha_2\ ,\ i\frac{d\alpha_2}{dt}=-\delta\alpha_2+\frac{\Omega^*}{2}\alpha_1$$

Impulsions $\pi/2$ $\left(|\Omega|\tau=\pi/2\right)$:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(\tau)\\ \alpha_2(\tau)\end{pmatrix}=M(\tau)\exp i\delta\tau/2\begin{pmatrix}\alpha_1(0)\\ \alpha_2(0)\end{pmatrix}$$

$$M(\tau)=\begin{pmatrix}\cos(\Omega'\tau/2)-i\left(\delta/\Omega'\right)\sin(\Omega'\tau/2) & -i\left(\Omega/\Omega'\right)\sin(\Omega'\tau/2)\\ -i\left(\Omega^*/\Omega'\right)\sin(\Omega'\tau/2) & \cos(\Omega'\tau/2)+i\left(\delta/\Omega'\right)\sin(\Omega'\tau/2)\end{pmatrix}$$

avec : $\Omega'=\sqrt{|\Omega|^2+\delta^2}$

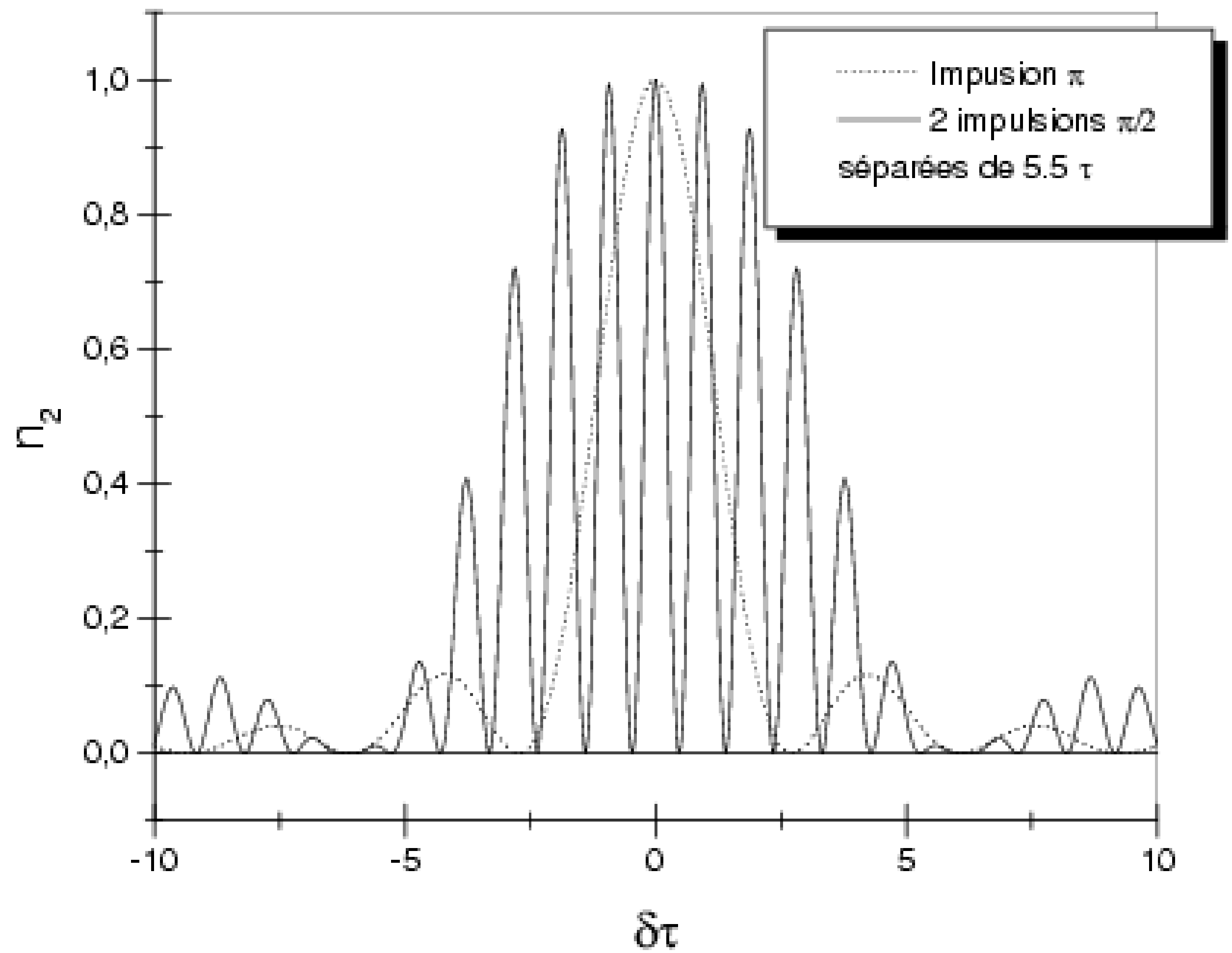
Evolution libre de τ à $\tau+T$: $\begin{pmatrix}\alpha_1(\tau+T)\\ \alpha_2(\tau+T)\end{pmatrix}=D(T)\begin{pmatrix}\alpha_1(\tau)\\ \alpha_2(\tau)\end{pmatrix}$, $D(T)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \exp i\delta T\end{pmatrix}$

Passage de la seconde impulsion $\pi/2$: $\begin{pmatrix}\alpha_1(2\tau+T)\\ \alpha_2(2\tau+T)\end{pmatrix}=M(\tau)\exp i\delta\tau/2\begin{pmatrix}\alpha_1(\tau+T)\\ \alpha_2(\tau+T)\end{pmatrix}$

$$\alpha_2(2\tau+T)=-i\left(\Omega^*/\Omega'\right)\sin(\Omega'\tau/2)\exp i\delta\tau\times$$

$$\times\left\{\left[\cos(\Omega'\tau/2)-i\left(\delta/\Omega'\right)\sin(\Omega'\tau/2)\right]+\left[\cos(\Omega'\tau/2)+i\left(\delta/\Omega'\right)\sin(\Omega'\tau/2)\right]\exp i\delta T\right\}$$

$$n_2(2\tau+T)=4\frac{|\Omega|^2}{\Omega'^2}\sin^2\left(\frac{\Omega'\tau}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\Omega'\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta T}{2}\right)-\frac{\delta}{\Omega'}\sin\left(\frac{\Omega'\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta T}{2}\right)\right]^2$$


Impusion π
2 impulsions π/2
séparées de 5.5 τ
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
n2
-10
-5
0
5
10
δτ