TEMA I

1) Due particelle di massa m vincolate in una dimensione hanno Hamiltoniana: $H=(p_1^2+p_2^2)/\,2m+mL^2\omega^2\,/\,2\ \ \mathrm{sen}[\big((x_1^2-x_2^2)^2+2x_2^2\big)/L^2]$. Determinare le frequenze dei modi normali per le piccole oscillazioni intorno a $x_1=x_2=0$

2) Si descriva il moto classico di un elettrone non relativistico immerso in un campo magnetico statico ed uniforme **B** sovrapposto ad un campo elettrico statico ed uniforme **E** tale che **E** $\cdot$**B**=0 e |**E**| << |**B**|.

3) Si consideri un pacchetto d'onda elettromagnetico, con dimensione trasversa (alla direzione di propagazione) L, pulsazione centrale ω_0 e ampiezza E_0 che si propaga in un mezzo con una costante dielettrica $\varepsilon(\omega,|E|)\ \ \varepsilon_0(\omega)+|E|^2\varepsilon_1(\omega)$ nonlineare, dove $|E|$ e' l'ampiezza del campo elettrico dell'onda. Si determini il segno di ε_1 e si dia una stima del suo valore (indipendentemente dai dettagli della forma del pacchetto) affinche', il pacchetto non si allarghi in quanto l'effetto della nonlinearita' compensa, nella direzione trasversa, quello della diffrazione. Un effetto in parte analogo ha luogo nelle fibre ottiche

4) Determinare il valore della probabilita' di trovare un momento angolare totale j=3 per una particella di spin s=1, s_z=1 e momento angolare orbitale l=3, m=2.

5) Nell'Hamiltoniana di una particella di spin 1/2 il termine di spin di Pauli e' della forma H_{spin} = **-** μ**S**·**B** Sia **B** diretto secondo l'asse z: **B**=(0,0,B). Al tempo t=0 la particella si trova in uno stato in cui l'autovalore della componente x dello spin ($s_x = \sigma_x/2$) e' +1/2. Dopo quanto tempo lo stato della particella sara' un autostato di s_x con autovalore -1/2?

6) Si consideri un gas, globalmente neutro, di elettroni e protoni non relativistici che interagiscono tra di loro con interazione coulombiana. Si ipotizzi che gli elettroni e i protoni si trovino in equilibrio termico. Si determinino:

a) le condizioni di temperatura e densita' per le quali il gas approssimi un gas perfetto classico

b) le condizioni per cui il gas approssimi un gas perfetto quantistico totalmente degenere (sia per gli elettroni che per i protoni).

7) Trascurando i termini di ordine λ^2, determinare l'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore anarmonico unidimensionale di Hamiltoniana

$H= p^2/2m + m\omega^2/2\ x^2 + \lambda\, x^4$

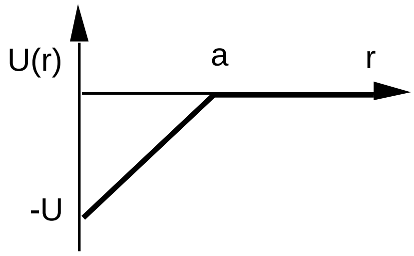
8) Per un gas perfetto di bosoni di spin zero con energia e impulso connessi dalla relazione $\varepsilon = a\ p^r$, trovare la condizione su r affinche' esista una temperatura critica non nulla per la condensazione di Bose.

9) Descrivere e spiegare lo spettro e la degenerazione dei livelli per un oscillatore armonico isotropo in due dimensioni: $H=(p_1^2+p_2^2)/\,2m+m\omega^2(x_1^2+x_2^2)/\,2$

10) Si consideri uno ione idrogenoide (carica del nucleo uguale a Ze ed un solo elettrone esterno). Determinare, nello stato fondamentale, la dipendenza da Z della velocita' media dell'elettrone attorno al nucleo e della funzione d'onda in r=0.

TEMA II

1) Una massa puntiforme m e’ vincolata a muoversi in un piano e la sua energia potenziale a simmetria circolare e’ disegnata in figura.



Se la massa si trova in r=a/2 con velocita’ v_t tangenziale data, quali sono le condizioni sulle componenti v_t tangenziale e v_r radiale della velocita’ iniziale affinche’ la massa rimanga confinata nella regione r<a.

2) Una particella di massa M decade in due particelle identiche di massa nulla (per es. $\pi_0 \to \gamma\gamma$). Nel sistema di riposo della particella che decade i prodotti del decadimento vanno in direzioni opposte. Sia θ l'angolo che forma tale direzione con l'asse z. Nel sistema di Lorentz in cui la particella che decade viaggia lungo l'asse z con velocita' v/c=β qual'e' l'angolo che formano le particelle finali tra di loro in funzione di θ e di β?

3) Un atomo irradia onde elettromagnetiche con un tempo medio di decadimento τ. La dipendenza dal tempo del campo elettrico dell'atomo e' $E(t) = E_0 \exp(-t/\tau - i\omega_0 t)$. Si determini la larghezza e la distribuzione in pulsazione ω della radiazione emessa.

4) Determinare il valore della probabilita' di trovare un momento angolare totale j=2 per una particella di spin s=1, s_z=1 e momento angolare orbitale l=2, m=1.

5) Nell'Hamiltoniana di una particella di spin 1/2 il termine di spin di Pauli e' della forma $H_{spin} = -\mu \mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$ Sia **B** diretto secondo l'asse z: **B**=(0,0,B). Al tempo t=0 la particella si trova in uno stato in cui l'autovalore della componente x dello spin ($s_x = \sigma_x/2$) e' +1/2. Dopo quanto tempo lo stato della particella sara' un autostato di s_x con autovalore -1/2?

6) Considerare un sistema di N particelle distinguibili con uno spettro di livelli per la singola particella E_n=an, con n= 0,1,2.., e degenerazione uguale a n+1. Determinare l'energia media e l'entropia in funzione di a, N e della temperatura T.

7) Trascurando i termini di ordine λ^2, determinare l'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore anarmonico unidimensionale di Hamiltoniana $H= p^2/2m + mw^2/2\, x^2 + \lambda\, x^4$

8) Per un gas perfetto di bosoni di spin zero con energia e impulso connessi dalla relazione $\varepsilon = a\, p^r$, trovare la condizione su r affinche' esista una temperatura critica non nulla per la condensazione di Bose.

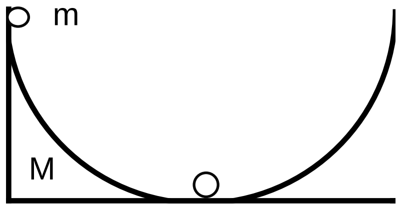
9) La linea spettrale di lunghezza d'onda λ=21 cm e' molto nota agli astronomi perche' permette di osservare l'idrogeno nell'universo. Questa linea deriva dalle transizioni dovute alla struttura iperfina dello stato

fondamentale $n=1$, $l=0$ dell'atomo di idrogeno. Spiegare il meccanismo fisico che da luogo alla struttura iperfina. In quanti livelli, in parte degeneri, si suddivide lo stato fondamentale? Qual'e' l'ordine di grandezza in eV della differenza di energia tra i livelli?

10) Si consideri uno ione idrogenoide (carica del nucleo uguale a Ze ed un solo elettrone esterno). Determinare, nello stato fondamentale, la dipendenza da Z della velocita' media dell'elettrone attorno al nucleo e della funzione d'onda in $r=0$.

TEMA III

1) Un sistema e' composto da una conca semisferica di raggio R e di massa M, che puo' solo traslare, senza attrito, sul piano orizzontale e da una massa m puntiforme, che e' vincolata a muoversi, senza attrito, all'interno della conca.



Ad un certo istante, la massa m si trova ferma ad altezza $z=R$, rispetto alla conca, anch’essa ferma. Si calcoli la reazione esercitata dalla conca sulla massa quando questa passa per $z=0$.

2) Un campo elettrico ha componente solo lungo l'asse z: $\mathbf{E}=(0,0,E)$ e il campo magnetico e' zero: $\mathbf{B}=0$. Determinare le corrispondenti componenti dei campi elettrico e magnetico in un sistema di riferimento che si muove con velocita' $\mathbf{v}=(c\beta,0,0)$ lungo l'asse x.

3) Le onde che si propagano sulla superfice del mare, obbediscono, sotto opportune condizioni, alla relazione di dispersione $\omega^2 = |k|\, g$, ove ω e` la pulsazione, k il numero d'onda e g la accelerazione di gravita`. Si determini l'evoluzione temporale di un pacchetto d'onda gaussiano (in pulsazione), con pulsazione centrale ω_0 e larghezza $\Delta\omega$, che si propaga nel verso positivo lungo l'asse x. Si determinino la velocita' di fase e di gruppo (la velocita' con cui si muove il baricentro del pacchetto) e l'andamento con il tempo della larghezza del pacchetto.

4) Determinare il valore della probabilita' di trovare un momento angolare totale $j=2$ per una particella di spin $s=1$, $s_z=-1$ e momento angolare orbitale $l=2$, $m=-1$.

5) Nell'Hamiltoniana di una particella di spin 1/2 il termine di spin di Pauli e' della forma $H_{spin} = -\mu\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$ Sia $\mathbf{B}$ diretto secondo l'asse z: $\mathbf{B}=(0,0,B)$. Al tempo $t=0$ la particella si trova in uno stato in cui l'autovalore della componente x dello spin ($s_x = \sigma_x/2$) e' $+1/2$. Dopo quanto tempo lo stato della particella sara' un autostato di s_x con autovalore $-1/2$?

6) Determinare l'energia di Fermi di un gas perfetto di fermioni di spin 1/2, con energia e impulso connessi dalla relazione $e = a\, p^r$, allo zero assoluto in funzione della densita' di particelle e dei parametri a e r.

7) Trascurando i termini di ordine λ^2, determinare l'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore anarmonico unidimensionale di Hamiltoniana $H= p^2/2m + mw^2/2\ x^2 + \lambda\ x^4$

8) Mostrare che un gas perfetto di bosoni ($H=p^2/2m$) non ha condensazione di Bose a basse temperature se e' confinato su una superfice di area A in due dimensioni spaziali.

9) Determinare l'ordine di grandezza dell'energia minima di un protone ($m=938$ MeV/c^2) dei raggi cosmici perche' interagendo con i fotoni della radiazione di fondo cosmica possa dare luogo alla produzione di una risonanza N* (M=1232 MeV/c2).

10) Si consideri uno ione idrogenoide (carica del nucleo uguale a Ze ed un solo elettrone esterno). Determinare, nello stato fondamentale, la dipendenza da Z della velocita' media dell'elettrone attorno al nucleo e della funzione d'onda in r=0.