

Concorso di Ammissione al XIX ciclo di Dottorato in Fisica - Busta n. 1

Il candidato svolga uno a scelta dei temi e risolva uno a scelta dei problemi.

Temi

- 1) Approssimazione semiclassica in meccanica quantistica. Principi e applicazioni
- 2) Si illustri una tecnica di misura dell'energia e se ne discuta il campo di applicabilità e le principali sorgenti di incertezza.
- 3) Meccanismi d'emissione dei raggi X. Descrivere almeno un'applicazione fisica dei raggi X.
- 4) Descrivere le evidenze osservative dell'esistenza di campi magnetici in ambiente cosmico (ad.es. stelle, galassie, mezzo interstellare, ammassi di galassie..)
- 5) Discutere le potenziali sorgenti di onde gravitazionali rivelabili da strumenti basati sulla terra. Analizzare le sorgenti per classe, periodiche, catastrofiche, quasi-periodiche. Spiegare quali sono i vantaggi o la necessità di avere più di uno strumento in grado di rivelare onde gravitazionali.

Problema 1

Si consideri un oscillatore armonico N dimensionale

$$H = \sum_1^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{k_i^2}{2} x_i^2 \right) \quad (1)$$

- a) Si dimostri che l'equazione di Schroedinger é separabile in coordinate cartesiane.
- b) Si scriva l'Hamiltoniana in termini degli operatori di salita e discesa a_i^\dagger , a_i relativi all'oscillatore armonico i -esimo.
- c) Si mostri che gli operatori $A_j^i = a_i^\dagger a_j$ ($i, j = 1 \dots N$) obbediscono le regole di commutazione

$$[A_j^i, A_l^k] = A_l^i \delta_j^k - A_j^k \delta_l^i \quad (2)$$

Si mostri che tali regole sono l'algebra di Lie del gruppo $U(N)$.

- d) Si mostri che se le costanti elastiche k_i sono tutte uguali H é invariante sotto il gruppo $U(N)$.
- e) Per $N = 3$ si scrivano gli altri invarianti indipendenti e la generica Hamiltoniana invariante.
- f) Si supponga per $N = 3$ che due costanti elastiche siano uguali ed una diversa. Si dica qual'é il gruppo di simmetria residuo e si discuta lo spettro.

- g) Cosa cambia se le a_i obbediscono la statistica di Fermi invece che quella di Bose?

Problema 2.

Si consideri il decadimento della particella π^0 (massa $135 \text{ MeV}/c^2$) in due fotoni. Si assuma che il π^0 sia prodotto lungo l'asse z con energia di 10 GeV . Si determini, anche numericamente:

- a) L'energia minima e massima dei due fotoni nel laboratorio.
- b) Il minimo angolo di apertura tra i due fotoni.
- c) Se i due fotoni vengono rivelati ad una distanza di 10 m dal punto di produzione con una risoluzione energetica $\Delta E/E = 3\%$, si determini la risoluzione spaziale necessaria sul punto di impatto dei fotoni per ottenere una risoluzione sulla massa del π^0 di 5 MeV .
- d) Schematizzando il rivelatore come un cerchio di raggio 1 m centrato sull'asse z e ortogonale ad esso, si determini l'efficienza geometrica per la rivelazione di entrambi i fotoni.

Problema 3.

- a) Si calcoli l'energia di ionizzazione dell'atomo di Idrogeno nel suo stato fondamentale U_0 (ad esempio usando il modello atomico di Bohr).
- b) Si calcoli il rapporto fra le popolazioni atomiche dello stato fondamentale ed il primo livello eccitato.
- c) Si consideri quindi un gas di Idrogeno, n_0 atomi/ m^3 , in equilibrio termico alla temperatura T, e lo si schematizzi come un sistema a due livelli:
 - i) stato dell'elettrone legato al protone, con energia $-U_0$;
 - ii) stato dell'elettrone libero, cioè atomo ionizzato.

Si calcoli in questo caso il grado di ionizzazione definito come il rapporto fra il numero di atomi ionizzati diviso il numero totale degli atomi di un gas: $\alpha = n_i/n_0$.

- d) Si calcoli numericamente il grado di ionizzazione dell'Idrogeno, nei due casi specifici:
 $T=1\text{eV}, n_0 = 10^{16} \text{ atomi}/m^3$
 $T=1\text{eV}, n_0 = 10^{25} \text{ atomi}/m^3$
Si commenti brevemente il risultato, cercando di interpretarlo fisicamente.
- e) Considerando un modello più realistico dell'atomo di Idrogeno con gli infiniti livelli dell'elettrone legato, ci si deve attendere di trovare valori di α sensibilmente diversi rispetto a quelli trovati al punto d) ? In ogni caso i corrispondenti valori di α aumenterebbero o diminuirebbero?

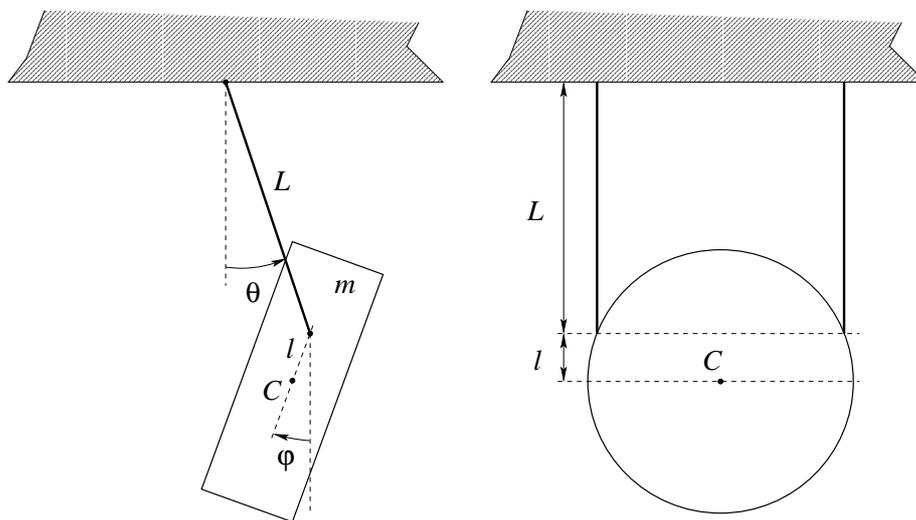
Problema 4.

Si derivi la distanza limite mareale di due masse autogravitanti, M_1 e M_2 separate a distanza a .

- Qual'è la dipendenza funzionale nei sistemi binari?
- Per due galassie, qual'è la dipendenza dalla velocità massima di rotazione?

Problema 5.

Si consideri uno specchio cilindrico a faccie piane, di massa m , diametro D e spessore h , sospeso verticalmente mediante due fili verticali di lunghezza L . Sia l la proiezione verticale della distanza tra il punto di attacco inferiore dei fili ed il centro di massa dello specchio C (vedi figura sottostante)



- Indicando con r^2 e t^2 la riflettività e la trasmittività dello specchio, calcolare la forza dovuta alla pressione di radiazione prodotta da un fascio di potenza media P_0 incidente perpendicolarmente e nel centro della superficie dello specchio. Supporre che $r^2 = 0.9$, $t^2 = 0.1$ e $P_0 = 10W$.
- Calcolare l'angolo prodotto θ rispetto al punto di sospensione. Si supponga la forza applicata in C , $m = 10\text{kg}$, $l = 0.001\text{m}$, $L = 0.45\text{m}$, $D = 0.25\text{m}$ e $h = 0.1\text{m}$.
- Ipotizzando che la fluttuazione in potenza del laser sia $\delta P(\omega) = 10^{-3}P_0/\omega$, determinare le fluttuazioni della posizione del centro dello specchio alla frequenza angolare di $\omega = 100\text{rad/s}$. Considerare $\omega \gg \omega_0$, dove $\omega_0 = g/L$ e g la costante del campo gravitazionale.

Concorso di Ammissione al XIX ciclo di Dottorato in Fisica - Busta n. 2

Il candidato svolga uno a scelta dei temi e risolva uno a scelta dei problemi.

Temi

- 1) Simmetrie e gruppi in fisica. Fondamenti e applicazioni.
- 2) Si illustri una tecnica di misura della massa e se ne discuta il campo di applicabilità e le principali sorgenti di incertezza.
- 3) Tecniche spettroscopiche basate sulla diffrazione.
- 4) Spiegare la relazione fra “gravitational lensing” e “gravitational redshift”.
- 5) Discutere le potenziali sorgenti di onde gravitazionali rivelabili da strumenti basati sulla terra. Analizzare le sorgenti per classe, periodiche, catastrofiche, quasi-periodiche. Spiegare quali sono i vantaggi o la necessità di avere più di uno strumento in grado di rivelare onde gravitazionali.

Problema 1.

Nell'urto $e + e \rightarrow e + e$ (Scattering di Moeller) da elettroni non polarizzati si misura la polarizzazione degli elettroni finali.

- a) Si mostri che, se c'è invarianza sotto parità, tale polarizzazione può solo essere perpendicolare al piano di scattering.
- b) Si calcoli l'ampiezza di scattering prodotta dallo scambio di un fotone e si verifichi esplicitamente l'asserto di cui al punto a)
 - i) mostrando che l'interazione è invariante per parità
 - ii) calcolando la polarizzazione
- c) Si scriva il contributo all'ampiezza prodotto dallo scambio di uno Z_0

$$L_I = \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu^0 \bar{\psi}_e \gamma_\mu (a + b\gamma_5) \psi_e \quad (1)$$

con $a = (1 - 4 \sin^2 \theta_W)$, $b = 1$.

- i) Si mostri che, se si tiene conto anche di L_I , la parità è violata.
- ii) Si calcoli la polarizzazione nel piano di scattering
- iii) Se ne discuta la dipendenza dall'energia per $E \ll M_{Z_0}$.

Problema 2.

Si consideri il decadimento della particella π^0 (massa $135 \text{ MeV}/c^2$) in due fotoni. Si assuma che il π^0 sia prodotto lungo l'asse z con energia di 10 GeV . Si determini, anche numericamente:

- a) L'energia minima e massima dei due fotoni nel laboratorio.
- b) Il minimo angolo di apertura tra i due fotoni.
- c) Se i due fotoni vengono rivelati ad una distanza di 10 m dal punto di produzione con una risoluzione spaziale di 1 cm ed una risoluzione energetica $\Delta E/E = 3\%$, si determini con quale risoluzione si pu misurare la coordinata z di produzione del π^0 .
- d) Schematizzando il rivelatore come un cerchio di raggio D centrato sull'asse z e ortogonale ad esso, si determini D in modo che l'inefficienza geometrica per la rivelazione di entrambi i fotoni sia del 3% .

Problema 3.

Un elettrone si trova immerso nel campo e.m. di un fascio di radiazione ottica ($0.5 \mu\text{m}$), linearmente polarizzata, la cui distribuzione d'intensità varia radialmente con andamento gaussiano rispetto alla coordinata radiale trasversa r :

$$I = I_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

- a) Calcolare l'energia cinetica dell'elettrone (mediata sul periodo T di oscillazione del campo e.m.) in funzione della coordinata radiale r .
- b) Calcolare la forza F_p (mediata sul periodo T di oscillazione del campo e.m.) che agisce sull'elettrone.
- c) Calcolare il valore dell'ampiezza del campo elettrico E_0 della radiazione e.m. e della forza F_p in $r = 0$ e $r = r_0$.
- d) Nel caso in cui $I_0 = 10^{14} \text{ W/cm}^2$ e $r_0 = 5 \mu\text{m}$, calcolare numericamente E_0 e F_p , in $r = 0$ e $r = r_0$.
- e) Nel caso in cui il moto dell'elettrone risultasse relativistico, come si esprime la forza F_p in termini del fattore di Lorentz γ ?

Problema 4.

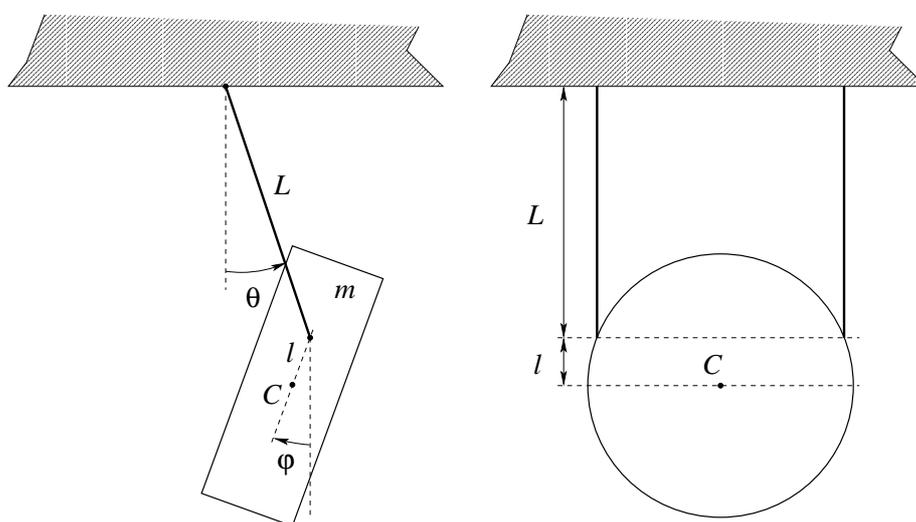
Si consideri un corpo di raggio R e massa M circondato da una nube di plasma a simmetria sferica. Si assuma che la luminosità, L , sia prodotta solo dall'accrescimento gravitazionale. Si assuma inoltre che l'opacità sia dovuta solo allo scattering su elettroni (Thomson scattering).

- a) Si calcoli la pressione radiativa nell'approssimazione di scattering singolo.

- b) Si mostri che c'è una luminosità massima al di sopra della quale la pressione radiativa impedisce l'accrescimento.
- c) Si trovi la dipendenza del tasso d'accrescimento massimo da M e R .
- d) Se la massa centrale è un buco nero (di tipo Schwarzschild) si trovi la relazione fra la massa e il tasso d'accrescimento permesso.

Problema 5.

Si consideri uno specchio cilindrico a faccie piane, di massa m , diametro D e spessore h , sospeso verticalmente mediante due fili verticali di lunghezza L . Sia l la proiezione verticale della distanza tra il punto di attacco inferiore dei fili ed il centro di massa dello specchio C (vedi figura sottostante)



- a) Indicando con r^2 e t^2 la riflettività e la trasmittività dello specchio, calcolare la forza dovuta alla pressione di radiazione prodotta da un fascio di potenza media P_0 incidente perpendicolarmente e nel centro della superficie dello specchio. Supporre che $r^2 = 0.9$, $t^2 = 0.1$ e $P_0 = 10W$.
- b) Calcolare l'angolo prodotto θ rispetto al punto di sospensione. Si supponga la forza applicata in C , $m = 10\text{kg}$, $l = 0.001\text{m}$, $L = 0.45\text{m}$, $D = 0.25\text{m}$ e $h = 0.1\text{m}$.
- c) Ipotizzando che la fluttuazione in potenza del laser sia $\delta P(\omega) = 10^{-3} P_0/\omega$, determinare le fluttuazioni della posizione del centro dello specchio alla frequenza angolare di $\omega = 100\text{rad/s}$. Considerare $\omega \gg \omega_0$, dove $\omega_0 = g/L$ e g la costante del campo gravitazionale.

Concorso di Ammissione al XIX ciclo di Dottorato in Fisica - Busta n. 3

Il candidato svolga uno a scelta dei temi e risolva uno a scelta dei problemi.

Temi

- 1) L'invarianza di gauge.
- 2) Si discuta l'interazione della radiazione elettromagnetica con la materia, soffermandosi su un caso particolare.
- 3) Propagazione di onde elettromagnetiche nella materia. Il candidato approfondisca l'argomento considerando uno specifico mezzo materiale.
- 4) Descrivere l'evidenza per l'esistenza di materia oscura a scale maggiori o uguali alle dimensioni di una galassia.
- 5) Si consideri un interferometro Michelson avente in ciascun braccio una cavità Fabry-Perot ed un specchio all'ingresso per il "ricircolo" del campo elettromagnetico riflesso. Descrivere le principali sorgenti di rumore e distinguere tra sorgenti di natura tecnica e di natura fisica fondamentale quali rumore di quantizzazione ("shot noise") e rumore termico.

Problema 1.

Si consideri lo scattering elastico di due particelle di spin 0 interagenti con un potenziale centrale $V(r)$

- a) Si mostri che il problema può essere trattato come diffusione da un centro fisso con massa uguale alla massa ridotta.
- b) Si scriva l'espressione per gli sfasamenti in approssimazione di Born.
- c) Si calcoli l'espressione della lunghezza di scattering in approssimazione di Born.
- d) Si mostri che, se $V(r)$ è a raggio finito, l'onda S domina a basse energie.
- e) Si specializzi al caso di una buca di potenziale costante di raggio r_0 .

Problema 2.

Si vuole realizzare una misura di flusso di particelle con due contatori di area identica accostati e posti in coincidenza. Il flusso è di 10 particelle/s; ciascun contatore può essere considerato con efficienza 100%, ma ha un rumore elevato, con una frequenza di scatto in singola f_s pari a 10kHz.

- a) Determinare la frequenza delle coincidenze accidentali f_{acc} se il tempo di formatura del segnale è di 100ns.
- b) Determinare l'errore statistico sulla misura del flusso per un periodo di conteggio di 10 s.

- c) Assumendo di conoscere f_{acc} con una precisione dell'1%, determinare il tempo di conteggio necessario perchè l'errore statistico sulla misura di flusso sia paragonabile all'errore sistematico derivante dalla imperfetta conoscenza di f_{acc} .
- d) Variando la soglia dei discriminatori è possibile diminuire il ritmo di scatto in singola a spese dell'efficienza di rivelazione. Supponiamo di alzare la soglia fino a rendere f_{acc} trascurabile rispetto al flusso di particelle. Determinare il valore minimo dell'efficienza per cui la misura effettuata in queste condizioni abbia lo stesso errore statistico (a parità di tempo di conteggio) della misura effettuata al punto b.

Problema 3.

Con una lente (focale $f=4\text{cm}$ e diametro $D=2\text{cm}$), corretta sulle principali aberrazioni, si osservano delle polveri le cui dimensioni sono ϕ . L'immagine viene formata su di una CCD i cui pixels hanno dimensioni δ . L'osservazione è fatta con luce da $0.5 \mu\text{m}$.

- a) Qual' è la minima distanza (d_{min}) fra due granelli di polvere, perchè essi possano essere risolti (cioè distinti) sull'immagine digitale?
- b) A quale distanza debbono trovarsi due granelli dal fuoco della lente per poterli risolvere sull'immagine?
- c) Dare il risultato numerico alle domande in a) e b), nei due casi:
 - i) $\phi = 0.1 \mu\text{m}$, $\delta = 20 \mu\text{m}$
 - ii) $\phi = 10 \mu\text{m}$, $\delta = 20 \mu\text{m}$
- d) Rispondere alla domanda del punto c) nel caso in cui l'osservazione venga fatta utilizzando una lastra fotografica (al posto della CCD), in cui la grana dell'emulsione fotografica (molto minore delle dimensioni di un pixel) è $\delta = 0.1 \mu\text{m}$.

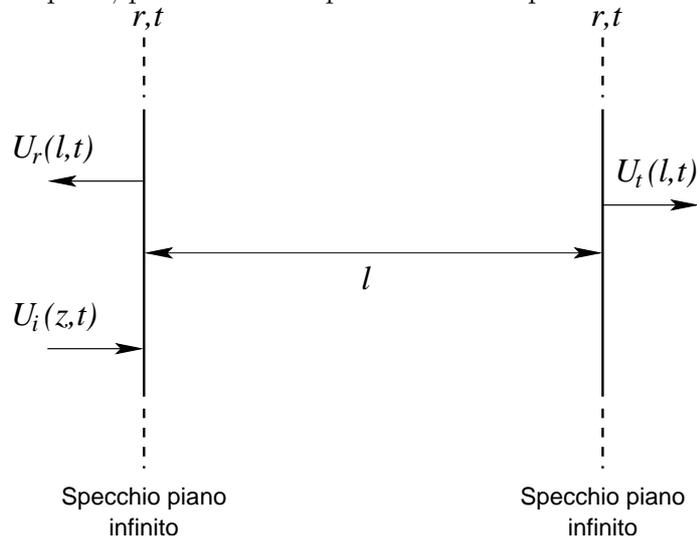
Problema 4.

Si consideri un pianeta di massa M e raggio R a distanza d dalla stella centrale, che ha una luminosità L . Il pianeta ha una atmosfera composta di un'unica specie con peso molecolare μ e con riflettività A (albedo).

- a) Qual'è la temperatura di equilibrio dell'atmosfera, assumendo emissività di corpo nero e illuminazione superficiale uniforme?
- b) Si derivi la scala di tempo per perdere l'atmosfera per evaporazione.

Problema 5.

Si consideri la cavità ottica risonante schematizzata nella figura sottostante, avente specchi piani, paralleli e di superficie infinita posti ad una distanza l .



Si supponga inoltre, che la riflettività e la trasmittività di entrambi gli specchi sia rispettivamente r^2 e t^2 e che $U_i(z,t) = U_0 \exp(-ikz + \omega t)$, $k = 2\pi/\lambda$ sia l'onda piana incidente perpendicolarmente ad uno specchio.

- Determinare nel caso di regime stazionario, l'intensità trasmessa $|U_t(l)|^2$ e riflessa $|U_r(l)|^2$ in funzione della lunghezza della cavità l . Supponendo l fissato, determinare le stesse intensità in funzione della frequenza angolare $\omega = 2\pi\nu$ della luce incidente.
- Determinare la condizione di risonanza, ovvero le lunghezze o le frequenze per cui la potenza trasmessa è massima.
- Supponendo che la potenza incidente sia $P_0 = 100\text{W}$ e che $r^2 = 0.99$, $r^2 + t^2 = 1$, calcolare la forza \vec{F} esercitata alla risonanza dalla pressione di radiazione su uno degli specchi.