

## Concorso di Ammissione al XXI ciclo di Dottorato

A.A. 2005/2006

(busta n.1)

**Si richiede al candidato di svolgere un tema a scelta (scrivendo al massimo tre facciate) e di risolvere almeno parzialmente due esercizi**

### TEMI

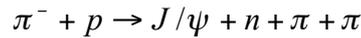
1. Descrivere i principali aspetti osservativi sperimentali e dare una spiegazione fisica il più possibile completa dei seguenti fenomeni naturali:
  - a. l'arcobaleno
  - b. la forza di Coriolis
  - c. la viscosità di un gas
  - d. l'effetto Compton
2. I rumori/fondi/disturbi indesiderati ("noise") costituiscono il limite contro cui si deve combattere in ogni esperimento accurato. Si illustri brevemente qualche metodo di riduzione/aggiramento/eliminazione di questi disturbi; si discuta inoltre quali sono i processi di "noise" ineliminabili perché dovuti a cause fondamentali.
3. Descrivere i vari limiti sperimentali e osservativi sull'età della Terra e dell'Universo. Si usino esempi tratti dal maggior numero di aree scientifiche (geologia, astrofisica, biologia ecc.) Discutere la dipendenza delle conclusioni da una possibile variazione nel tempo delle costanti fisiche universali.
4. Lo studio dei fenomeni radioattivi ha avuto un'importanza fondamentale per lo sviluppo della fisica del nucleo e delle particelle. Si descrivano i caratteri dei diversi tipi di radioattività, distinguendo fenomeni naturali e indotti artificialmente, e si discutano alcune tecniche di misura.
5. Illustrare analogie e differenze fra le onde elettromagnetiche e le onde gravitazionali (per esempio: perché non esiste radiazione gravitazionale di dipolo? ecc).

### ESERCIZI

1. Da molti anni (in pratica da quando sono disponibili computer abbastanza potenti) è stata sviluppata una tecnica spettroscopica denominata "Spettroscopia per Trasformata di Fourier" (Fourier Transform Spectroscopy, FTS). Si basa sull'uso di un interferometro di Michelson e viene impiegata soprattutto nell'infrarosso.
  - a. Supponiamo di inviare una radiazione monocromatica di intensità  $I_0$  e frequenza  $\nu$  in un interferometro di Michelson dotato di uno specchio traslabile e di osservare l'intensità  $I(x)$  delle frange di interferenza all'uscita dell'interferometro al variare della posizione  $x$  dello specchio. Dimostrare che  $I(x) = I_0 (1 + \cos(4\pi\nu x/c))$ .
  - b. Se invece di una radiazione monocromatica si invia una larga distribuzione spettrale  $I_0(\nu)$ , scrivere l'espressione che si ottiene per l'intensità  $I(x)$  osservata all'uscita dell'interferometro. Come è possibile, una volta misurata  $I(x)$  al variare di  $x$ , risalire alla distribuzione  $I_0(\nu)$  ?
  - c. Si cerchi di valutare il potere risolutivo di questa tecnica: a tal fine si immagini che  $I_0(\nu)$  sia costituita da due sole componenti spettrali monocromatiche a distanza  $\Delta\nu$  e si calcoli come è legata la minima  $\Delta\nu_{\min}$  osservabile al massimo spostamento  $L$  disponibile per lo

specchio. Discutere quali sono i vantaggi di questa tecnica rispetto a quelle tradizionali in cui si esegue una scansione sequenziale dello spettro.

2. Si consideri un esperimento in cui si produce la particella  $J/\psi$  e se ne osserva il decadimento.
- Calcolare l'energia di soglia di un fascio di  $\pi^-$  per produrre la  $J/\psi$  su un bersaglio fisso secondo la reazione



( $m_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ ,  $m_p = m_n = 0.94 \text{ GeV}/c^2$ ,  $m_{J/\psi} = 3.1 \text{ GeV}/c^2$ ).

- Si schematizzi un rivelatore a simmetria cilindrica lungo l'asse  $z$  che copra la regione di angoli polari  $10^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ . Considerando le  $J/\psi$  prodotte con  $p_z = 10 \text{ GeV}/c$  calcolare l'accettanza per osservare i due muoni nel decadimento  $\mu^+ \mu^-$ .
  - I muoni in questione sono selezionati facendoli passare attraverso un assorbitore in ferro in cui la perdita di energia vale  $\Delta E = 2 \text{ GeV}$ . Qual è la probabilità che un muone emerga dall'assorbitore?
3. Per attenuare le vibrazioni sismiche da cui è affetta una massa, la si può sospendere mediante un filo, costituendo così un pendolo fisico.

- Gli effetti sismici si possono schematizzare ammettendo che il punto di sospensione, solidale con il terreno, oscilla orizzontalmente con uno spettro di potenza  $S_0(\omega)$  definito da:

$$\langle \tilde{x}_0(\omega) * \tilde{x}_0(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega - \omega')S_0(\omega)$$

di intensità data ( $\tilde{x}_0$  è la trasformata di Fourier del movimento orizzontale del punto di sospensione). Il pendolo è schematizzato da un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza  $l$  e da una massa puntiforme  $m$ . Si consideri un regime nel quale l'approssimazione di piccole oscillazioni è ottima.

- Determinare in funzione di  $\omega$  la funzione di trasferimento del pendolo  $T^P(\omega) = \tilde{x}_1(\omega)/\tilde{x}_0(\omega)$  e lo spettro di potenza delle oscillazioni orizzontali  $\tilde{x}_1(\omega)$  della massa. In quale regione di frequenza il sistema si comporta da attenuatore?
- Per migliorare le caratteristiche di attenuazione si decide di utilizzare un pendolo multiplo a  $N$  stadi, tutti identici al precedente. Mostrare che la funzione di trasferimento  $T^C$  della catena di pendoli può essere scritta come:

$$T_{0 \rightarrow N}^C(\omega) = \prod_{k=1}^N T_{(k-1) \rightarrow k}^C(\omega)$$

dove

$$T_{i \rightarrow i+1}^C(\omega) = \tilde{x}_{i+1}(\omega)/\tilde{x}_i(\omega)$$

Mostrare che a frequenze sufficientemente elevate è lecito approssimare  $T_{i \rightarrow i+1}^C(\omega) = T^P(\omega)$ , e discutere le conseguenze di questo fatto sulla attenuazione finale.

4. Calcolare il tempo di raffreddamento di un corpo celeste autogravitante nei due casi estremi seguenti:
- il raffreddamento avviene solo per emissione di fotoni
  - il raffreddamento avviene solo per emissione di neutrini

5.

Ogni neutrone ha spin  $1/2$  e possiede un momento magnetico non nullo  $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma}$ , dove  $\vec{\sigma}$  indica le matrici di Pauli,  $\mu_0 = -1.91 \mu_N$  ed il magnetone nucleare vale  $\mu_N = 3.15 \times 10^{-14} \text{ MeV } T^{-1}$ .

- (a) Esplicitare l'evoluzione temporale —in rappresentazione di Heisenberg— delle componenti dell'operatore di spin di un neutrone in presenza di un campo magnetico uniforme e costante  $\vec{B}$  non nullo.
- (b) Un fascio di neutroni non relativistici polarizzati con impulso  $\vec{p}$ , proveniente dalla regione  $x < 0$  dello spazio  $R^3$ , incide sul piano  $x = 0$ . Nella regione  $x > 0$  è presente un campo magnetico uniforme  $\vec{B} = B(0, 0, 1)$ , mentre nella regione  $x < 0$  il campo è nullo. Determinare il coefficiente di riflessione sul piano  $x = 0$  al variare dello stato di polarizzazione.
- (c) Calcolare la suscettività magnetica  $\chi$  di un gas diluito di neutroni a temperatura ambiente. Si ricorda che

$$\chi = \left( \frac{d|\vec{M}|}{d|\vec{B}|} \right)_{\vec{B}=0}$$

dove la magnetizzazione  $\vec{M}$  è data da

$$\vec{M} = -(1/V) \left( \frac{dU}{d\vec{B}} \right)$$

in cui  $U$  rappresenta l'energia interna e  $V$  indica il volume del gas.

## (busta n.2)

**Si richiede al candidato di svolgere un tema a scelta (scrivendo al massimo tre facciate) e di risolvere almeno parzialmente due esercizi**

### TEMI

6. Descrivere i principali aspetti osservativi sperimentali e dare una spiegazione fisica il più possibile completa dei seguenti fenomeni naturali:
  - a. l'arcobaleno
  - b. la forza di Coriolis
  - c. la viscosità di un gas
  - d. l'effetto Compton
7. Il "feedback" è una nozione importante in tutta la fisica: si incontra nella semplice pratica di laboratorio, è essenziale nella progettazione e realizzazione di esperimenti di grande precisione, è alla base della ideazione e costruzione di nuovi strumenti e dispositivi, si incontra nello studio teorico di alcuni sistemi caotici e nel legame tra teoria del controllo e teoria dell'informazione. Si presentino i concetti elementari e si discuta brevemente qualche esempio di applicazione del feedback, eventualmente anche ad esperimenti di carattere fondamentale.
8. Discutere il teorema del viriale e illustrarne le applicazioni in fisica e in particolare in astrofisica.
9. Lo studio dei fenomeni radioattivi ha avuto un'importanza fondamentale per lo sviluppo della fisica del nucleo e delle particelle. Si descrivano i caratteri dei diversi tipi di radioattività, distinguendo fenomeni naturali e indotti artificialmente, e si discutano alcune tecniche di misura.
10. Illustrare analogie e differenze fra le onde elettromagnetiche e le onde gravitazionali (per esempio: perché non esiste radiazione gravitazionale di dipolo? ecc).

### ESERCIZI

6. Da molti anni (in pratica da quando sono disponibili computer abbastanza potenti) è stata sviluppata una tecnica spettroscopica denominata "Spettroscopia per Trasformata di Fourier" (Fourier Transform Spectroscopy, FTS). Si basa sull'uso di un interferometro di Michelson e viene impiegata soprattutto nell'infrarosso.
  - a. Supponiamo di inviare una radiazione monocromatica di intensità  $I_0$  e frequenza  $\nu$  in un interferometro di Michelson dotato di uno specchio traslabile e di osservare l'intensità  $I(x)$  delle frange di interferenza all'uscita dell'interferometro al variare della posizione  $x$  dello specchio. Dimostrare che  $I(x) = I_0 (1 + \cos(4\pi\nu x/c))$ .
  - b. Se invece di una radiazione monocromatica si invia una larga distribuzione spettrale  $I_0(\nu)$ , scrivere l'espressione che si ottiene per l'intensità  $I(x)$  osservata all'uscita dell'interferometro. Come è possibile, una volta misurata  $I(x)$  al variare di  $x$ , risalire alla distribuzione  $I_0(\nu)$  ?
  - c. Si cerchi di valutare il potere risolutivo di questa tecnica: a tal fine si immagini che  $I_0(\nu)$  sia costituita da due sole componenti spettrali monocromatiche a distanza  $\Delta\nu$  e si calcoli come è legata la minima  $\Delta\nu_{\min}$  osservabile al massimo spostamento  $L$  disponibile per lo specchio. Discutere quali sono i vantaggi di questa tecnica rispetto a quelle tradizionali in cui si esegue una scansione sequenziale dello spettro.

7. Il  $^{82}\text{Rb}$  è un isotopo radioattivo del rubidio, il cui spin nucleare vale  $I = 5$ .
- A causa della debole interazione iperfine tutti i livelli energetici sono splittati in due o più sottolivelli, che vengono classificati in termini dei numeri quantici  $L$ ,  $S$ ,  $J$  e  $F$  (dove  $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$  è il momento angolare totale). In quanti sottolivelli si separano lo stato fondamentale  $5S_{1/2}$ , il primo stato eccitato  $5P_{3/2}$  e lo stato  $5D_{5/2}$ ? Qual è la classificazione di questi sottolivelli?
  - Ricordando le regole di selezione per transizioni di dipolo elettrico, indicare quante e quali sono le righe componenti i multipletti delle transizioni  $5S_{1/2} - 5P_{3/2}$  e  $5P_{3/2} - 5D_{5/2}$ .
  - Le lunghezze d'onda delle righe citate al punto (b) sono all'incirca 780 nm. Valutare l'ordine di grandezza della larghezza Doppler di queste righe per un gas di  $^{82}\text{Rb}$  a temperatura ambiente. Sapendo che le costanti iperfini "A" dello stato  $5S_{1/2}$  e  $5P_{3/2}$  sono rispettivamente 563 MHz e 14 MHz discutere se sia possibile (o in quali casi sia possibile) risolvere la struttura dei multipletti, spiegando con quali metodi. La costante iperfine dello stato  $5D_{5/2}$  non è nota: quale tecnica si potrebbe usare per misurarla?  
(Nota: la correzione ai livelli di energia atomici prodotta dalla interazione iperfine è data approssimativamente da  $W_F = hA \langle IJF | \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} | IJF \rangle$ , se si trascurano termini di quadrupolo e multipoli superiori.)
8. Si è ipotizzata l'esistenza di una particella  $u^0$  penetrante, dotata di spin 1 e massa  $m_u < 2 m_e$  e con un accoppiamento  $u^0$ - elettrone uguale a quello elettromagnetico, ma caratterizzato da una costante di accoppiamento effettiva  $\beta \ll \alpha \approx 1/137$ . Si vuole porre un limite sperimentale alla costante  $\beta$  cercando di rivelare l'annichilazione (processo 1)  $e^+e^- \rightarrow u^0\gamma$  in presenza del fondo costituito dal ben noto processo di QED  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  (processo 2). Le annichilazioni avvengono con le particelle iniziali praticamente a riposo. L'apparato sperimentale consiste di un rivelatore di gamma che copre il 10% di  $4\pi$ , con efficienza 100 % e dotato di una risoluzione energetica  $\Delta E/E = 1\%$  (la particella penetrante non è rivelabile).
- Calcolare il valore minimo di  $m_u$  per cui i fotoni dei due processi possono essere risolti in energia.
  - Per  $m_u = 0.25 \text{ MeV}/c^2$  e  $\beta = 10^{-9}$  stimare l'ordine di grandezza del numero di fotoni rivelati per i due processi in  $10^5$  s. Assumere che il numero di annichilazioni  $e^+e^-$  sia  $R = 10^8$  al secondo.
  - Si calcoli il tempo minimo necessario a rivelare un numero di eventi (1) superiore a 5 volte la fluttuazione dei conteggi di fondo nell'intervallo  $\Delta E$  corrispondente alla risoluzione del rivelatore. Il fondo nel rivelatore di gamma può schematizzarsi proporzionale all'intervallo di energia e al numero di gamma che incidono su di esso:  $dN = 0.02 \text{ dE}/(m_e c^2) \times N_\gamma$
9. Derivare la velocità di propagazione di un'onda nei casi seguenti:
- gas perfetto
  - corda
  - magnetoidrodinamica

5.

L'hamiltoniana  $H$  di un atomo di idrogeno, che si trova in presenza di un campo elettrico di quadrupolo, vale  $H = H_0 + V$ , dove

$$H_0 = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

e

$$V = -A(3z^2 - r^2)$$

$A$  indica una opportuna costante,  $(x, y, z)$  denotano le componenti cartesiane dell'operatore posizione e  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

- (a) Elencare e discutere le costanti del moto e le associate simmetrie del sistema. Sia  $\mathcal{H}'$  un sottospazio minimale dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  degli stati del sistema nel quale è definita una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni. Dimostrare che la traccia di  $V$  calcolata in  $\mathcal{H}'$  assume il valore nullo.
- (b) All'ordine più basso della teoria delle perturbazioni, determinare l'effetto del campo esterno sui valori dell'energia relativamente agli stati con  $n = 1$  e  $n = 2$ , dove  $n$  denota il numero quantico principale. Dare una spiegazione il più possibile completa della degenerazione residua dei livelli energetici.
- (c) Nelle transizioni elettromagnetiche tra gli stati con  $n = 2$  ed  $n = 1$ , i cui livelli energetici sono stati determinati in (ii), quante righe spettrali si osservano, qual è la corrispondente distribuzione angolare e polarizzazione della luce emessa, in approssimazione di dipolo ?

### **(busta n.3)**

**Si richiede al candidato di svolgere un tema a scelta (scrivendo al massimo tre facciate) e di risolvere almeno parzialmente due esercizi**

#### **TEMI**

11. Descrivere i principali aspetti osservativi sperimentali e dare una spiegazione fisica il più possibile completa dei seguenti fenomeni naturali:
  - a. l'azzurro del cielo
  - b. l'effetto Doppler
  - c. l'irreversibilità termodinamica
  - d. l'invarianza di spin isotopico in fisica adronica
12. I rumori/fondi/disturbi indesiderati ("noise") costituiscono il limite contro cui si deve combattere in ogni esperimento accurato. Si illustri brevemente qualche metodo di riduzione/aggiramento/eliminazione di questi disturbi; si discuta inoltre quali sono i processi di "noise" ineliminabili perché dovuti a cause fondamentali.
13. Discutere il teorema del viriale e illustrarne le applicazioni in fisica e in particolare in astrofisica.
14. Lo studio dei fenomeni radioattivi ha avuto un'importanza fondamentale per lo sviluppo della fisica del nucleo e delle particelle. Si descrivano i caratteri dei diversi tipi di radioattività, distinguendo fenomeni naturali e indotti artificialmente, e si discutano alcune tecniche di misura.
15. Illustrare analogie e differenze fra le onde elettromagnetiche e le onde gravitazionali (per esempio: perché non esiste radiazione gravitazionale di dipolo? ecc).

#### **ESERCIZI**

10. Da molti anni (in pratica da quando sono disponibili computer abbastanza potenti) è stata sviluppata una tecnica spettroscopica denominata "Spettroscopia per Trasformata di Fourier" (Fourier Transform Spectroscopy, FTS). Si basa sull'uso di un interferometro di Michelson e viene impiegata soprattutto nell'infrarosso.
  - a. Supponiamo di inviare una radiazione monocromatica di intensità  $I_0$  e frequenza  $\nu$  in un interferometro di Michelson dotato di uno specchio traslabile e di osservare l'intensità  $I(x)$  delle frange di interferenza all'uscita dell'interferometro al variare della posizione  $x$  dello specchio. Dimostrare che  $I(x) = I_0 (1 + \cos(4\pi\nu x/c))$ .
  - b. Se invece di una radiazione monocromatica si invia una larga distribuzione spettrale  $I_0(\nu)$ , scrivere l'espressione che si ottiene per l'intensità  $I(x)$  osservata all'uscita dell'interferometro. Come è possibile, una volta misurata  $I(x)$  al variare di  $x$ , risalire alla distribuzione  $I_0(\nu)$  ?
  - c. Si cerchi di valutare il potere risolutivo di questa tecnica: a tal fine si immagini che  $I_0(\nu)$  sia costituita da due sole componenti spettrali monocromatiche a distanza  $\Delta\nu$  e si calcoli come è legata la minima  $\Delta\nu_{\min}$  osservabile al massimo spostamento  $L$  disponibile per lo specchio. Discutere quali sono i vantaggi di questa tecnica rispetto a quelle tradizionali in cui si esegue una scansione sequenziale dello spettro.
11. Si consideri la struttura di un laser a gas funzionante in regime continuo: nella configurazione più semplice è costituita da un mezzo attivo inserito tra i due specchi di un risonatore Fabry-

Perot; se il gas è a bassa pressione si può assumere in prima approssimazione che il suo indice di rifrazione sia uguale a 1.

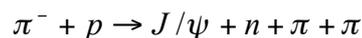
- a. Spiegare come è legata la distanza  $L$  tra gli specchi alla lunghezza d'onda  $\lambda$  emessa dal laser. Nel caso di  $L = 30$  cm, qual è la differenza di frequenza  $\nu_m$  di due modi longitudinali contigui ?
- b. Supponiamo che le condizioni di funzionamento del laser (riflettività degli specchi, amplificazione del gas, ...) siano tali che l'emissione non sia monocromatica, ma costituita da due modi contigui di uguale intensità. Si vuole analizzare lo spettro di emissione con un interferometro di Michelson, osservando le frange di interferenza al variare della posizione di uno dei due specchi. Calcolare qual è la minima traslazione dello specchio necessaria per misurare  $\nu_m$ .
- c. Potete suggerire metodi alternativi per misurare  $\nu_m$  ? Nella realizzazione di un prototipo di laser spesso succede che si osservi emissione anche su ulteriori modi "trasversi": discutere quali accorgimenti si possono impiegare per sopprimere queste emissioni indesiderate.

12. La diffusione elastica di un fotone trasferisce impulso al bersaglio. Si assuma che la sezione d'urto  $\sigma_v$  dipenda dalla frequenza .

- a. Trovare l'accelerazione del bersaglio indotta da un flusso di fotoni incidenti  $F_v$
- b. Descrivere il limite classico (diffusione di Thomson). Come cambia l'accelerazione se il bersaglio assorbe invece di diffondere?
- c. Considerare un guscio sferico di gas rarefatto che circonda una massa puntiforme  $M$  a una distanza  $r$ . La massa  $M$  irraggia con luminosità  $L$ . Per quali valori di  $L$  la pressione di radiazione equilibra l'accelerazione gravitazionale del guscio?

13. Si consideri un esperimento in cui si produce la particella  $J/\psi$  e se ne osserva il decadimento.

- g. Calcolare l'energia di soglia di un fascio di  $\pi^-$  per produrre la  $J/\psi$  su un bersaglio fisso secondo la reazione



( $m_\pi = 0.14$  GeV/c<sup>2</sup>,  $m_p = m_n = 0.94$  GeV/c<sup>2</sup>,  $m_{J/\psi} = 3.1$  GeV/c<sup>2</sup>).

- h. Si schematizzi un rivelatore a simmetria cilindrica lungo l'asse  $z$  che copra la regione di angoli polari  $10^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ . Considerando le  $J/\psi$  prodotte con  $p_z = 10$  GeV/c calcolare l'accettanza per osservare i due muoni nel decadimento  $\mu^+ \mu^-$ .
- i. I muoni in questione sono selezionati facendoli passare attraverso un assorbitore in ferro in cui la perdita di energia vale  $\Delta E = 2$  GeV. Qual è la probabilità che un muone emerga dall'assorbitore?

5.

$N$  particelle, tra loro non interagenti, di massa nulla con spin  $1/2$  ed elicità fissata, per esempio elicità  $-1$ , sono in equilibrio termodinamico entro un recipiente di volume  $V$ .

- (a) Calcolare l'energia di Fermi  $\epsilon_F$  del sistema.
- (b) Nel limite di gas completamente degenere, determinare la pressione  $P$  del sistema.
- (c) Studiare le proprietà termodinamiche del sistema quando vale la disuguaglianza  $(N/V) (\hbar c/kT)^3 \ll 1$ , dove  $T$  indica la temperatura termodinamica assoluta e  $k$  la costante di Boltzmann.