

**Università di Pisa**  
**Scuola di dottorato in Scienze di base Galileo Galilei**  
**Fisica e Fisica Applicata**  
**Prova scritta di ammissione - 15/10/2010**

**Prova numero 1**

**Prima parte**

Negli ultimi 10 anni il Premio Nobel per la Fisica è stato assegnato per le seguenti ricerche:

- 2001: realizzazione e studio della condensazione di Bose-Einstein in gas rarefatti;
- 2002: rivelazione dei neutrini cosmici e scoperta delle sorgenti X cosmiche;
- 2003: teoria dei superconduttori e dei superfluidi;
- 2004: scoperta della libertà asintotica nella teoria delle interazioni forti;
- 2005: teoria quantistica della coerenza ottica e sviluppo della spettroscopia laser di precisione;
- 2006: spettro ed anisotropia della radiazione cosmica di fondo;
- 2007: scoperta della magnetoresistenza gigante;
- 2008: meccanismo di rottura spontanea di simmetria in fisica subatomica e origine della simmetria CP e suo legame con le famiglie di quark;
- 2009: trasmissione di luce in fibre ottiche ed invenzione del sensore CCD;
- 2010: esperimenti innovativi sul grafene bi-dimensionale.

Il candidato discuta, in modo sintetico e preciso, la rilevanza e l'innovazione teorica o sperimentale di una delle suddette ricerche.

**Seconda parte**

Il candidato risolva almeno quattro dei seguenti esercizi.

1. Un corpo di massa  $m$  si muove senza attrito su un anello di raggio  $a$ , senza potersene staccare. L'anello ruota intorno ad un suo diametro posto verticalmente con velocità angolare costante  $\omega$ .  
Calcolare l'angolo  $\theta$  tra la direzione verticale e il raggio passante per il centro dell'anello che determina la posizione di equilibrio del corpo al variare di  $\omega$ .  
Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni che il corpo può compiere intorno a questo punto di equilibrio, sempre in funzione di  $\omega$ .

2. Un circuito conduttore è sagomato come un rettangolo nel piano verticale, di lato minore  $L$  e lato maggiore variabile, poichè la sbarra conduttrice (di massa  $m$ ) che costituisce il lato minore inferiore è libera di cadere sotto l'azione della forza peso, rimanendo in contatto con i lati lunghi. Il circuito ha una resistenza elettrica complessiva  $R$  (interamente concentrata nella sbarra) ed è immerso in una regione di campo magnetico costante  $B$ , diretto orizzontalmente (perpendicolare al piano del circuito stesso). Calcolare la velocità limite della sbarra.
3. Sotto quali condizioni una buca di potenziale unidimensionale, di larghezza  $2a$  e di profondità  $V_0$  ammette  $n$  stati legati?  
(Suggerimento: si ricorda che la risposta segue non da una soluzione esatta ma da una rappresentazione grafica).
4. Un sistema, composto da due oscillatori armonici accoppiati, con operatori di creazione e distruzione rispettivamente  $a_1^\dagger, a_1$  e  $a_2^\dagger, a_2$ , che commutano gli uni con gli altri, è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \left( a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + g a_1^\dagger a_2 + \bar{g} a_2^\dagger a_1 \right)$$

dove  $\bar{g}$  è il complesso coniugato del parametro complesso  $g$ .  
Per quali valori di  $g$  l'Hamiltoniana è sempre positiva?  
Si determini lo spettro di  $H$ .

5. In un processo di moltiplicazione a cascata di cariche, ogni singola carica primaria di valore fisso  $q$  viene moltiplicata per un fattore stocastico  $A$ , distribuito con media  $\bar{A} = 10$  e deviazione standard  $\sigma_A = 5$ .  
In un dato evento si misura la quantità di carica totale con un errore statistico del 10%. Determinare il numero di cariche primarie presenti in tale evento.
6. Un interferometro di Michelson si basa sulla differenza di cammino ottico tra due bracci. Si scriva un'espressione per il potere risolvete in lunghezza d'onda di tale strumento, in presenza di una radiazione composta da due lunghezze d'onda molto prossime.
7. Un fotone viene diffuso da un elettrone libero ad un angolo di 90 gradi, e la sua energia finale è un terzo di quella iniziale.  
Determinare tale energia.
8. Si definisca un sistema di unità di misura nel quale  $\hbar = c = 1$  e l'unità di massa è la propria massa; si esprima la propria età in tale sistema di unità.

**Università di Pisa**  
**Scuola di dottorato in Scienze di base Galileo Galilei**  
**Fisica e Fisica Applicata**  
**Prova scritta di ammissione - 15/10/2010**

**Prova numero 2**

**Prima parte**

Negli ultimi 10 anni il Premio Nobel per la Fisica è stato assegnato per le seguenti ricerche:

- 2001: realizzazione e studio della condensazione di Bose-Einstein in gas rarefatti;
- 2002: rivelazione dei neutrini cosmici e scoperta delle sorgenti X cosmiche;
- 2003: teoria dei superconduttori e dei superfluidi;
- 2004: scoperta della libertà asintotica nella teoria delle interazioni forti;
- 2005: teoria quantistica della coerenza ottica e sviluppo della spettroscopia laser di precisione;
- 2006: spettro ed anisotropia della radiazione cosmica di fondo;
- 2007: scoperta della magnetoresistenza gigante;
- 2008: meccanismo di rottura spontanea di simmetria in fisica subatomica e origine della simmetria CP e suo legame con le famiglie di quark;
- 2009: trasmissione di luce in fibre ottiche ed invenzione del sensore CCD;
- 2010: esperimenti innovativi sul grafene bi-dimensionale.

Il candidato discuta, in modo sintetico e preciso, la rilevanza e l'innovazione teorica o sperimentale di una delle suddette ricerche.

**Seconda parte**

Il candidato risolva almeno quattro dei seguenti esercizi.

1. Un corpo sferico cade nell'aria per effetto della gravità, e viene frenato da una forza viscosa del tipo  $\propto Av^2$ , con  $A$  proporzionale alla sezione trasversale del corpo e  $v$  velocità.  
Esprimere la dipendenza della velocità limite dal raggio del corpo.

2. Un condensatore cilindrico (lunghezza  $L$ , raggi interno ed esterno  $r_1$  e  $r_2$ ) viene riempito completamente tra le armature con un materiale dielettrico (costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ ).

Si indichi in quale caso il dielettrico, quando viene estratto per un tratto piccolo rispetto alla lunghezza del cilindro, viene risucchiato all'interno del condensatore:

- (a) condensatore isolato;  
(b) condensatore mantenuto a potenziale costante.

Calcolare in tale caso la frequenza delle piccole oscillazioni.

3. Una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{per } x \in [-\bar{x}, \bar{x}] \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Qual è l'energia dello stato fondamentale?

4. Una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta al potenziale  $V(x) = -\lambda \delta(x)$ , dove  $\delta$  è la delta di Dirac e  $\lambda > 0$ . Calcolare i coefficienti di riflessione  $R$  e di trasmissione  $T$  all'energia  $E$ .

5. Per misurare la frequenza  $S$  di un segnale casuale in presenza di un fondo con frequenza ignota  $B$ , si dedica parte del tempo totale disponibile (costante) alla misura di segnale e fondo, e parte alla misura del solo fondo, avendo rimosso la sorgente di segnale.

Si determini il rapporto tra il tempo da dedicare alle due misure per minimizzare l'errore totale sulla misura di  $S$ , in funzione delle stime di  $S$  e  $B$ , assumendo distribuzione Poissoniana per segnale e fondo.

6. Una sorgente luminosa isotropa è immersa in un mezzo omogeneo ed isotropo non assorbente con indice di rifrazione  $n$ , e si trova a distanza  $d$  dall'interfaccia (piana) del mezzo con il vuoto.

Trovare la frazione dell'energia emessa che attraversa l'interfaccia, e la sua dipendenza da  $d$ .

7. Dei pioni neutri ( $mc^2 = 135$  MeV) di energie comprese tra 1 e 10 GeV decadono in due fotoni, i quali colpiscono un rivelatore distante 1 m dal punto di decadimento, ortogonale alla direzione di volo dei pioni.

Indicare la risoluzione spaziale minima che il rivelatore deve avere per poter sempre distinguere i due fotoni.

8. Un segnale composto da tre sinusoidi di frequenze 100 Hz, 300 Hz e 500 Hz viene campionato digitalmente.

Indicare la frequenza minima di campionamento per permettere la ricostruzione esatta del segnale a partire dai campioni.

Se la frequenza di campionamento usata è metà di tale frequenza minima, indicare le frequenze presenti nello spettro ricostruito.

**Università di Pisa**  
**Scuola di dottorato in Scienze di base Galileo Galilei**  
**Fisica e Fisica Applicata**  
**Prova scritta di ammissione - 15/10/2010**

**Prova numero 3**

**Prima parte**

Negli ultimi 10 anni il Premio Nobel per la Fisica è stato assegnato per le seguenti ricerche:

- 2001: realizzazione e studio della condensazione di Bose-Einstein in gas rarefatti;
- 2002: rivelazione dei neutrini cosmici e scoperta delle sorgenti X cosmiche;
- 2003: teoria dei superconduttori e dei superfluidi;
- 2004: scoperta della libertà asintotica nella teoria delle interazioni forti;
- 2005: teoria quantistica della coerenza ottica e sviluppo della spettroscopia laser di precisione;
- 2006: spettro ed anisotropia della radiazione cosmica di fondo;
- 2007: scoperta della magnetoresistenza gigante;
- 2008: meccanismo di rottura spontanea di simmetria in fisica subatomica e origine della simmetria CP e suo legame con le famiglie di quark;
- 2009: trasmissione di luce in fibre ottiche ed invenzione del sensore CCD;
- 2010: esperimenti innovativi sul grafene bi-dimensionale.

Il candidato discuta, in modo sintetico e preciso la rilevanza e l'innovazione teorica o sperimentale di una delle suddette ricerche.

**Seconda parte**

Il candidato risolva almeno quattro dei seguenti esercizi.

1. Un corpo di massa  $m_1$  scivola senza attrito su un piano inclinato, partendo da altezza  $H$ , poi prosegue su un tratto piano e urta elasticamente con un corpo fermo di massa  $m_2$ , il quale prosegue internamente ad una guida sagomata come una semicirconferenza di raggio  $R$  posta nel piano verticale.  
Calcolare il valore minimo di  $H/R$  affinché il corpo di massa  $m_2$  arrivi nel punto superiore della semicirconferenza, esprimendolo in funzione di  $\delta = m_1/m_2$ , nell'ipotesi che  $\delta \ll 1$ .

2. Un segnale in tensione si propaga lungo una linea di trasmissione ideale di impedenza caratteristica  $R_0$ , e deve essere inviato a due circuiti identici con impedenza di ingresso  $R_0$ , senza generare riflessioni.  
Si indichi come realizzare un circuito adeguato mediante resistenze, e l'ampiezza del segnale all'ingresso dei due circuiti rispetto a quella del segnale originario.
3. Una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta ad una forza costante  $F$ .  
Lo spettro degli autovalori dell'energia è continuo o discreto? Spiegare.  
L'Hamiltoniana è degenere? Spiegare.  
Determinare l'andamento asintotico degli autostati dell'energia nella regione classicamente non accessibile (che dipende dal segno di  $F$ ).
4. Due particelle di massa  $m$  interagiscono tramite il potenziale armonico

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} k (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 \quad k > 0.$$

Scrivere la soluzione generale dell'equazione di Schrödinger nei seguenti casi:

- le due particelle hanno spin 0 e sono distinguibili;
  - le due particelle hanno spin 0 e sono indistinguibili;
  - le due particelle hanno spin 1/2 e sono indistinguibili.
5. Due rivelatori A e B contano contemporaneamente degli eventi casuali, e dopo ciascun evento misurato rimangono completamente inattivi per un tempo  $\tau_A = 30 \mu\text{s}$  e  $\tau_B = 100 \mu\text{s}$  rispettivamente, durante il quale ignorano qualsiasi evento.  
Per quale frequenza di eventi casuali gli eventi non rivelati dal rivelatore B sono il doppio di quelli non rivelati dal rivelatore A?
  6. Uno specchio piano è segmentato in strisce di larghezza uniforme  $d$ , e ciascuna striscia viene sfalsata rispetto alla precedente di una distanza  $p$  nella direzione ortogonale al piano stesso.  
Si determini la relazione tra  $d$  e  $p$  che rende massima l'intensità della luce riflessa per illuminazione con luce di lunghezza d'onda  $\lambda$ .
  7. Dei protoni relativistici di energia cinetica 100 GeV colpiscono un nucleo a riposo, in cui per moto di Fermi l'energia cinetica dei nucleoni può raggiungere i 20 MeV.  
Si determinino i valori massimo e minimo dell'energia nel centro di massa di due protoni.
  8. Si definisca un sistema di unità di misura nel quale  $\hbar = c = 1$  e l'unità di massa è la propria massa; si esprima la propria età in tale sistema di unità.