Prof.ssa Elisabetta Fortuna

Attività di ricerca

Negli ultimi anni ho svolto la mia attivita' di ricerca soprattutto nell'ambito della geometria algebrica e analitica reale.

Uno dei temi di cui mi sono occupata e' lo studio di proprieta' metriche e di problemi di approssimazione per insiemi semialgebrici o subanalitici. Un primo risultato ottenuto prova che ogni semialgebrico e` "localmente approssimato al primo ordine" in un intorno di una singolarita` dal suo cono tangente nel punto, ossia dall'unione delle rette limite di secanti uscenti da tale punto. Piu' in generale si prova che, per ogni numero reale s maggiore o uguale ad 1, ogni sottoinsieme semialgebrico chiuso di R^n di codimensione almeno 1 puo' essere s-approssimato localmente (cioe' approssimato di ordine s) con un algebrico di R^n. Allargando l'indagine dallo studio all'intorno di un punto a quello lungo una sottovarieta' liscia, si e' provato che e' possibile approssimare al primo ordine un subanalitico con il suo cono normale lungo uno strato di una stratificazione che soddisfa la condizione (w) di Verdier e che due subanalitici sono 1-equivalenti lungo uno strato comune di una stratificazione (w)-regolare se e solo se i loro coni normali lungo lo strato coincidono.

Uno degli aspetti rilevanti della geometria algebrica reale e' che moltissimi dei suoi risultati sono costruttivi e algoritmici; da un punto di vista effettivo sorgono pero' notevoli difficolta' aggiuntive derivanti dal fatto di lavorare su un campo non algebricamente chiuso. Una questione di cui mi sono occupata e' quella del riconoscimento effettivo di una superficie algebrica reale a partire da una sua equazione. Lo studio del tipo topologico di una superficie algebrica reale non-singolare S dello spazio proiettivo reale e la classificazione a meno di omeomorfismi delle coppie (RP^3, S) sono questioni classiche, inserite da Hilbert nel suo famoso ``XVI Problema''. La possibilita' di trovare soluzioni costruttive suscita interesse anche nell'ambito della Computer Aided Geometric Design (CAGD) e della Computer Graphics ed e' in tal senso un tema di ricerca attualmente in notevole sviluppo.

Usando la teoria di Morse, si e' individuata una procedura per calcolare il numero delle componenti connesse di una superficie S e la caratteristica di Eulero di ciascuna di esse, il che la determina a meno di omeomorfismo. L'elaborazione di tecniche ad hoc ha consentito anche di costruire esplicitamente il grafo pesato delle adiacenze, che e' un invariante di omeomorfismo della coppia (RP^3,S) e fornisce informazioni sulla posizione reciproca delle varie componenti connesse della superficie e sulla loro contraibilita'. Successivamente si e' estesa la procedura di riconoscimento al caso di superfici algebriche reali con singolarita' isolate.

Si e' anche proceduto a produrre una implementazione degli algoritmi teorici descritti, trovandoci ad affrontare tutta una serie di problemi "pratici", legati per esempio al calcolo dei punti critici e alla determinazione del loro indice. In particolare il calcolo di queste ed altre informazioni geometriche attraverso un'impostazione algebrica del problema richiede una gestione efficiente dei sistemi polinomiali risolventi, ad esempio per poter distinguere fra soluzioni reali e soluzioni complesse. Inoltre, anche se esistono molti metodi diversi disponibili (basi di Groebner, algebra lineare, dualita',..) per la risoluzione di tali sistemi, quando si vuole applicarli per ottenere soluzioni numeriche si presentano molti problemi di stabilita', che diventano particolarmente seri nel caso in cui il sistema sia definito da un ideale non radicale (ossia in presenza di radici multiple). Da cio' la necessita' di migliorare l'efficienza delle numerose procedure di calcolo utilizzate, sviluppando metodi che rendano piu' veloce e soprattutto numericamente stabile la risoluzione di un sistema polinomiale anche in presenza di radici multiple.