Relazione sulla attività scientifica di Pietro Majer nel triennio 2003-2005

In questo triennio ho proseguito un programma di ricerca in Analisi Nonlineare, in collaborazione con A.Abbondandolo (Univ.di Pisa). Il programma è volto alla costruzione e allo studio di invarianti topologici per funzionali su varietà hilbertiane, con particolare riguardo al caso fortemente indefinito.

Un potente strumento nello studio di molti problemi variazionali in Analisi Nonlineare è la Teoria di Morse nelle sue varie forme. L' applicazione della teoria classica però è resa molto difficile se non preclusa, in tutti quei problemi variazionali che si riconducono a funzionali di tipo fortemente indefinito, cioè aventi punti critici con indice di Morse infinito. Tuttavia, come appare già da esempi noti in letteratura, è spesso possibile assegnare in modo naturale un valore finito alla “differenza di indici di Morse” di due punti critici, anche in casi in cui questi abbiano effettivamente un indice di Morse infinito. In questi esempi la particolare nozione di “differenza di indici” più o meno esplicitamente usata si può sempre ricondurre ad una definizione astratta di “indice relativo”, data in termini di indice di coppie di Fredholm di certi sottospazi.

Sfruttando questo fatto si riesce ad associare ad ogni funzionale un complesso di moduli (il “complesso critico del funzionale”), costruito a partire dai suoi punti critici, mediante una costruzione che ricalca idee di Floer e, prima ancora, di Smale e di Thom nel caso delle funzioni di Morse su varietà compatte. In tale caso Smale ritrovava la omologia della varietà, dimostrando così per altra via le relazioni di Morse. La novità del caso non compatto è che la omologia del complesso (“l'omologia di Morse”) dipende ora dal funzionale, ma è invariante per perturbazioni limitate in norma uniforme: ciò segue dal fatto non banale che i complessi critici di funzionali con distanza uniforme finita risultano omotopi. Ne scende, tra l'altro, un argomento di confronto: informazioni su punti critici di un funzionale noto si mantengono per perturbazioni limitate (l'informazione essendo contenuta nella detta omologia di Morse del funzionale in forma di “disuguaglianze di Morse relative”).

Fare Teoria di Morse su varietà Hilbertiane ad un livello di generalità non ottenibile con argomenti di approssimazione finito-dimensionale richiede di affrontare problemi profondi di analisi e di geometria in dimensione infinita. È opportuno quindi separare alcuni temi principali collegati (che sono anche interessanti di per se stessi).

La teoria lineare necessaria è trattata nel lavoro [**1**], dove si studia la teoria di Fredholm degli operatori differenziali del tipo di quelli che derivano dalla linearizzazione del flusso gradiente lungo una linea eteroclina fra due punti critici. È infatti importante sapere quando un tale operatore riesca di Fredholm, come si calcoli il suo indice e quando questo dipenda effettivamente dalla linea di flusso o invece dipenda solamente dai suoi estremi.

La nozione di orientabilità di coppie di Fredholm gioca un ruolo essenziale quando si voglia definire l'omologia di Morse a coefficienti interi. Questioni collegate ad essa si traducono in problemi di teoria dell'omotopia delle varietà Grassmanniane negli spazi di Hilbert. Perciò nel lavoro [**6**] viene introdotto e studiato il fibrato Determinante sulla Grassmanniana delle coppie di Fredholm, generalizzazione non banale del fibrato Determinante per operatori di Fredholm introdotto da D.Quillen nel 1985. È importante studiare alcune operazioni di base sulle coppie di Fredholm - come l'azione del gruppo lineare o la somma di un sottospazio finito dimensionale - in particolare, sapere se e come queste possano sollevarsi al fibrato determinante.

La risposta a queste domande, completata da vari controesempi (si veda in particolare [**3**]) ha permesso di definire nel lavoro [**2**] una classe di funzionali ammissibili che per certi versi è ottimale rispetto alla costruzione del complesso critico. Questa classe si vorrebbe abbastanza ampia in vista delle applicazioni, ma al contempo stabile per alcune operazioni di base: l'ultima richiesta essendo dettata da motivazioni categoriali. Ad esempio, il principio di confronto menzionato sopra ammette la seguente generalizzazione: è possibile associare ad ogni coppia di funzionali ammissibili $f \leq g$ un omomorfismo di catene fra i rispettivi complessi critici, e la corrispondenza risulta funtoriale a livello di omologia.

Nel lavoro [**7**] i risultati astratti edscritti sopra vengono applicati a questioni di molteplicità per il problema di connessione geodetica Lorentziane fra due punti: la proprietà di funtorialità detta sopra risulta avere qui applicazione particolarmente felice. Per una ampia classe di metriche Lorentziane definite su una varietà prodotto $X \times \mathbf{R}$ risulta che il corrispondente funzionale di azione Lorentziana ammette una omologia, e che questa domina la omologia dell'analogo funzionale di azione Riemanniana sulla varietà Riemanniana X. Conseguentemente, le disuguaglianze di Morse "relative" prevedono una molteplicità di connessione geodetica Lorentziana su $X \times \mathbf{R}$ non inferiore a quella prevista dalle disuguaglianze di Morse classiche per l'analogo problema della connessione Riemanniana su X.

Il caso classico del complesso di Morse per funzionali su varietà hilbertiane e aventi indice finito, benchè ben noto, manca di una trattazione completa e rigorosa: il lavoro [**5**] si propone di colmare questo vuoto della letteratura.

Il lavoro [**4**] contiene una nuova dimostrazione e veloce del teorema della varietà stabile per punti fissi iperbolici di sistemi dinamici (le usuali dimostrazioni di questo teorema presenti in letteratura sono piuttosto lunghe e tecniche, specialmente per quello che riguarda la questione della regolarità). Inoltre, si trattano qui per la prima volta alcuni aspetti propri del caso di dimensione infinita.

Elenco delle pubblicazioni del triennio 2003 - 2005

Articoli su rivista con referee.

1. A. Abbondandolo - P. Majer. *Ordinary differential operators in Hilbert spaces and Fredholm pairs.* MATHEMATISCHE ZEITUNG, **243** (3) 2003.

2. A. Abbondandolo - P. Majer. *Morse Homology on Hilbert Manifolds, I.* ADVANCES IN MATHEMATICS, **197** 2005.

3. A. Abbondandolo - P. Majer. *When the Morse index is infinite.* INTERNATIONAL MATHEMATICS RESEARC NOTICES, 2004.

4. A. Abbondandolo - P. Majer. *On the global stable manifold.* STUDIA MATHEMATICA, *(to appear)* 2005.

Parti di libro.

5. A. ABBONDANDOLO - P. MAJER. *Lectures on the Morse complex for infinite dimensional manifolds.* "Morse theoretical methods in Nonlinear Analysis and Symplectic Topology", Montreal. Kluwert ed., 2004.

Preprints.

6. A. ABBONDANDOLO - P. MAJER. *Infinite dimensional Grassmannians.* ETH e-collection, 2003.

7. A. ABBONDANDOLO - P. MAJER. *A Morse complex for Lorentzian geodesics.* arxiv:math.DG/0605261, 2006.