

# Esercizi di computazione quantistica

O. Morsch

Alcuni esercizi su vari argomenti trattati nel corso. Le soluzioni saranno disponibili dopo la fine delle lezioni a giugno.

1. (concetti di base) Data la funzione d'onda di due qubits

$$|\psi\rangle = a\{|0\rangle + b_1 e^{i\phi_1}\} \otimes \{|0\rangle + b_0 e^{i\phi_0}\}, \quad (1)$$

trovare le condizioni su  $b_0, b_1, \phi_0, \phi_1$  perché  $\text{CNOT}|\psi\rangle$  sia entangled.

2. (crittografia quantistica) Dimostrare che se Eve (nel protocollo BB84) intercetta i qubits (fotoni) mandati da Alice, li misura in una base casuale e poi li rimanda a Bob, introduce un errore del 25 per cento.

- 3.) (Teleportazione quantistica) Dimostrare che

$$|\psi\rangle|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{2} [|\beta_{00}\rangle|\psi\rangle + |\beta_{01}\rangle(X|\psi\rangle) + |\beta_{10}\rangle(Z|\psi\rangle) + |\beta_{11}\rangle(XZ|\psi\rangle)] \quad (2)$$

dove  $|\beta_{ij}\rangle$  sono gli stati di Bell (come definiti nel corso) e  $X, Z$  sono le matrici di Pauli  $\sigma_x, \sigma_z$ .

- 4.) (algoritmo di Shor) Dimostrare che l'operatore  $\hat{F} = \sum_{j,k=0}^{N-1} \frac{\exp(2\pi i j k / N)}{\sqrt{N}} |k\rangle\langle j|$  che effettua la trasformazione di Fourier quantistica è unitario.

- 5.) (ioni intrappolati) Data l'energia potenziale

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} M \omega_z^2 (z_1^2 + z_2^2) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 |z_1 - z_2|} \quad (3)$$

di due ioni di massa  $M$  e carica  $q$  in una trappola di Paul lineare, trovare le posizioni di equilibrio dei due ioni e le autofrequenze del moto comune.