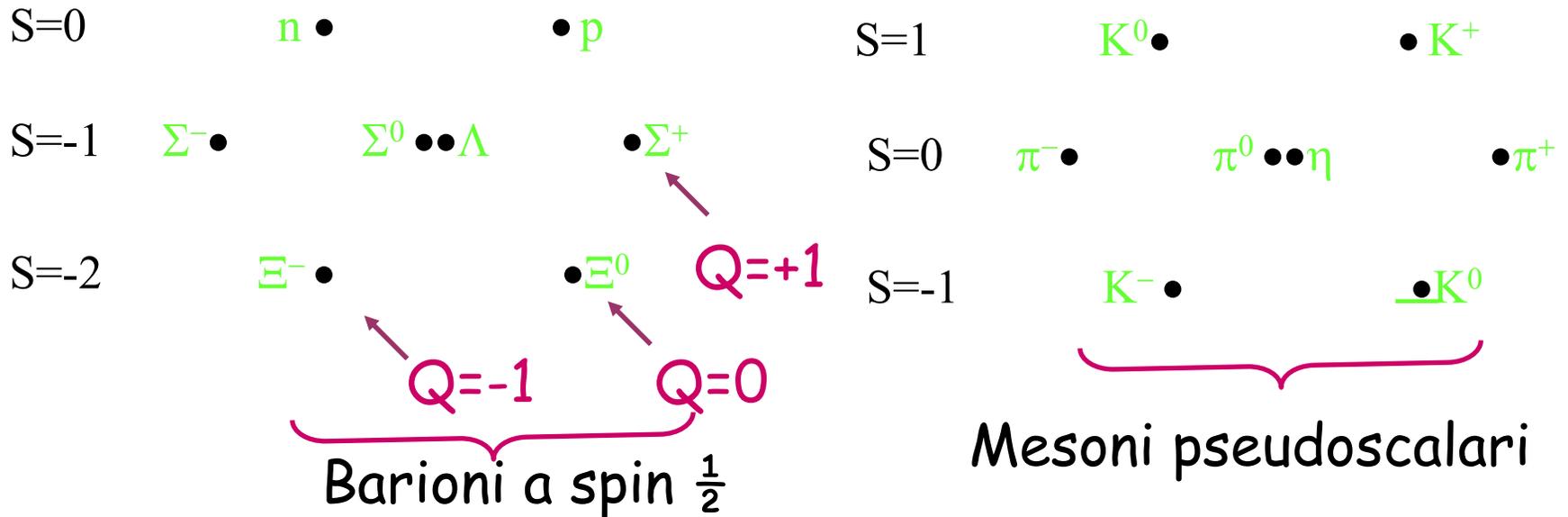


# Modello a quark (<1969)

Un modo per classificare gli adroni: mesoni e barioni.

1961 classificazione per carica, massa e stranezza

Gell-Mann (“The eightfold way”): i mesoni e barioni possono essere classificati ( massa, carica, stranezza) in ottetti e decupletti. Ad es. gli 8 mesoni e barioni più leggeri (spin  $\frac{1}{2}$ ) sono ottetti:



I barioni più pesanti hanno spin  $\frac{3}{2}$  e sono classificabili in decupletti con circa la stessa massa

S=0	$\Delta^- \bullet$	$\Delta^0 \bullet$	$\Delta^+ \bullet$	$\Delta^{++} \bullet$	m=1232
S=-1	$\Sigma^{*-} \bullet$	$\Sigma^{*0} \bullet$	$\Sigma^{*+} \bullet$		m=1384
S=-2		$\Xi^{*-} \bullet$	$\Xi^{*0} \bullet$		m=1533
S=-3		$\Omega^- \bullet$			m=1672

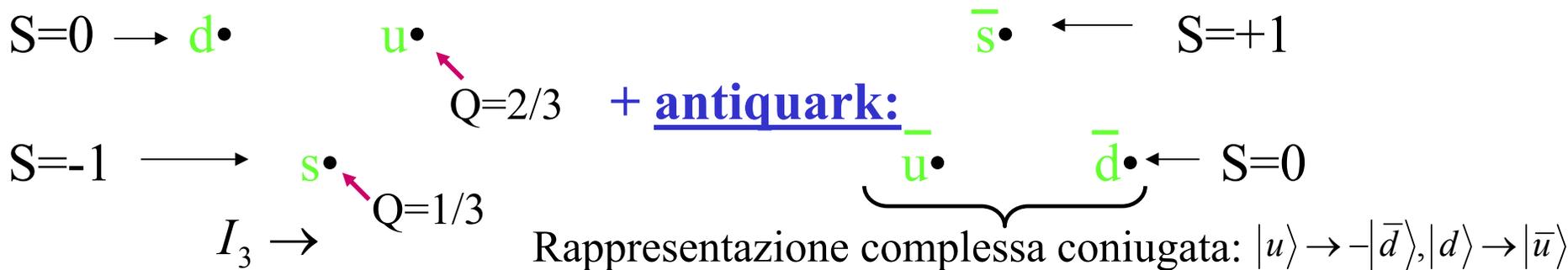
Con una differenza di massa  $\Delta m$  corrispondente a  $\Delta S=1$  di circa 150 MeV.

Esistono anche ottetti di altri mesoni: con notazione spettroscopica  $^{2S+1}L_J$ :

$$^1S_0 \quad ^3S_1 \quad ^3P_0 \quad ^3P_1 \quad ^3P_2 \quad ^3D_3 \quad \dots$$

Anche gli antibarioni sono organizzati in ottetti e decupletti. Per i mesoni invece le antiparticelle si trovano nella posizione diametralmente opposta nel multipletto

**Gell-Mann/Zweig (1964)**: la struttura in ottetti, decupletti (e singoletti) è una conseguenza del fatto che gli adroni sono composti di sottostrutture: i quark che hanno spin  $1/2$  e numero barionico  $1/3$ . I quark sono il doppietto (u,d) e il singoletto s.



Ai quark viene assegnato anche un numero barionico  $B=1/3$  ( $-1/3$  agli antiquark).

La carica elettrica  $Q=1/2(B+S)+I_3 = 1/2 Y + I_3$

Quark e antiquark sono distinti dalla ipercarica  $Y$

I barioni sono stati composti da 3 quark: (qqq);

I mesoni sono stati composti da quark-antiquark :(q $\bar{q}$ )

Nota che il fatto che esistano stati legati (qqq) e non qq e' indice che il mediatore non puo' essere l'equivalente del singolo fotone con  $C=-1$

Ci sono 9 possibili modi di combinare (u,d,s) con ( $\bar{u},\bar{d},\bar{s}$ ) creando i mesoni pseudo scalari, inoltre gli stati ( $u\bar{u}$ ), ( $d\bar{d}$ ), ( $s\bar{s}$ ) hanno tutti  $Q=0$ ,  $S=0$  e non sono distinguibili. Quindi gli stati fisici corrispondenti:  $\pi^0, \eta, \eta'$  sono un miscuglio di ( $u\bar{u}$ ), ( $d\bar{d}$ ), ( $s\bar{s}$ ).

Eventuali stati **non** del tipo (qqq) o (q $\bar{q}$ ) (stati esotici) (es. (qqqq) o (qq) avrebbero carica frazionaria) potrebbero anche esistere: recentemente c'è evidenza sperimentale per uno stato (uudds). Tali stati dovrebbero però anche essere compatibili con un'altra caratteristica dei quark: il colore e col fatto che le particelle fisiche sono senza colore.

Se  $L$  è il momento angolare orbitale la parità  $P$  dello stato  $(q\bar{q})$  è definita e, nel caso i quark siano eguali, sono anche autostati di  $C$ , abbiamo autovalori di  $P$  e di  $C$  pari a:

$$P = (-1)^{L+1}; C = (-1)^{L+S}$$

Ex.  $J/\Psi (c\bar{c})$ , con  $L=0$ ,  $S=1$  ha  $P=-1$  e  $C=-1$

I quark leggeri  $u$ ,  $d$  e  $s$  sono supposti avere una “massa” molto minore dell’energia tipica dell’interazione ( $m_q \ll \lambda_{\text{QCD}}$ ) come conseguenza **i moti sono altamente relativistici e le energie di interazione magnetica** (stati di spin), in analogia con la QED **sono rilevanti.**

Quark-antiquark, o quark,quark,quark possono combinarsi in modi diversi. di momento angolare  $L$ , livello di energia (tipo atomo di idrogeno), ma le differenze di energia (massa) risultano molto più grandi che nell’atomo di idrogeno. I tre quark,  $u,d,s$  dovrebbero comportarsi per le interazioni forti nello stesso modo:

**SU(3): simmetria sotto trasformazione unitaria tra  $u, d, s$**

# Simmetria SU(3) di sapore

L'invarianza delle interazioni forti nello spazio dell'isospin (2 componenti (p,n), (u,d) ) porta alla conservazione dell'isospin I e I<sub>3</sub> e alla simmetria SU(2).

I quark sono ora 3: u,d,s (sapori) e la generalizzazione di SU(2) è SU(3) i.e.

**Insieme delle rotazioni nello spazio dei 3 sapori (u,d,s) unitarie e a determinante =1 che lasciano invariati isospin e stranezza (ipercarica).**

Gli stati si trasformano come:  $\psi \rightarrow \psi' = U\psi = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{G})\psi = \exp(i\sum_j \alpha_j G_j)\psi$

$\alpha_j$  = insieme di parametri reali

$G_j$  = insieme di operatori hermitiani (generatori).

Il numero dei generatori definisce l'**ordine del gruppo**. Il numero di generatori mutualmente commutanti definisce il **rango del gruppo**.

Torniamo a SU(2): agisce su vettori a 2 componenti (spinori) sia di spin ordinario, che di isospin forte o di isospin debole. Per rotazioni nello spazio di isospin le due componenti dello spinore si trasformano come:

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = U(\theta) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ ex. } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$$

$U(\theta)$  è una matrice 2x2 che si scrive:  $U(\theta) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} / 2)$

$\vec{\theta}$  È un vettore che punta lungo l'asse di rotazione e ha modulo  $\theta$  che è l'angolo di rotazione.

$\vec{\sigma}$  Sono le matrici di Pauli:  $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$U(\theta)$  è una matrice unitaria (inverso= trasposto coniugato:  $U^{-1}=U^{t*}$ ) a determinante =1. L'unitarietà implica che:  $|\det U|^2 = 1 \rightarrow \det U = e^{i\alpha} \rightarrow U = e^{i\alpha} S, \text{ con } \det S = 1.$

L'insieme delle rotazioni  $U(\theta)$  formano un gruppo: **SU(2)**. Le matrici di Pauli sono una rappresentazione bidimensionale (fondamentale) di SU(2). Ci sono rappresentazioni di SU(2) anche a una dimensione (banale) o a 3 dimensioni secondo cui si trasformano le particelle a spin 1 (vettoriali).

Le interazioni forti sono indipendenti dalla carica elettrica: p e n (u e d) sono intercambiabili: cioè sono un doppietto di isospin forte: l'invarianza per rotazioni nello spazio dell'isospin forte si scrive matematicamente come invarianza sotto SU(2)

Osservazione sperimentale: Le interazioni forti conservano anche

la stranezza S ex.  $\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 (S = -1) + K^0 (S = +1)$

e il numero barionico B ex.  $\pi^- p (B = +1) \rightarrow \pi^0 + n (B = +1)$

Combiniamo B e S in una nuova quantità: l'ipercarica forte Y:

$$Y = B + S = 2(Q - I_3)$$

Incorporiamo la conservazione di isospin e ipercarica in una singola struttura di gruppo

Il vettore minimale in questo spazio deve avere 3 componenti (u,d,s) e il gruppo relativo: insieme delle trasformazioni unitarie, unimodulari in questo spazio è **SU(3)**.

In SU(3) la più semplice rappresentazione dei generatori (oltre l'unità) sono 8 matrici linearmente indipendenti (a traccia nulla):  $G_j$ , equivalenti alle matrici di Pauli in SU(2). Le regole di commutazione tra tali matrici sono (algebra di Lie):

$$[G_i, G_j] = 2i \cdot f_{ijl} G_l \quad \begin{array}{c|cccccccc} ij & 123 & 147 & 156 & 246 & 257 & 345 & 367 & 458 & 678 \\ \hline f_{ijl} & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{array}$$

$f_{ijl}$  sono antisimmetrici e sono chiamati costanti di struttura del gruppo.

Possibile rappresentazione dei generatori G (Gell Mann 1964) a traccia nulla e lin indep.:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{bmatrix}, G_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

L'ordine del gruppo è 8  
e il rango è 2  
N.B.  $G_1, G_2, G_3$  hanno  
la stessa algebra di  
SU(2)

Nota che le matrici  $G$  operano uno scambio tra i quark (simmetria dell'interazione):  
 $G_1 : 1 \leftrightarrow 2$ ,  $G_4 : 1 \leftrightarrow 3$ ,  $G_6 : 2 \leftrightarrow 3$ ,  $G_2, G_5, G_7$  lo stesso ma con una fase, le rimanenti:  
 $G_3$  e  $G_8$  sono diagonali.  $G_1 G_2 G_3$  sono gli operatori di isospin e  $G_8$  quello di ipercarica.

Esiste anche un'altra rappresentazione di  $SU(3)$  (necessaria per definire un prodotto scalare invariante:  $\Psi^*$ ):  $\psi^* \rightarrow \psi'^* = U^* \psi^* = \exp(i\bar{\alpha} \cdot (-\vec{G}^*)) \psi^*$

In  $SU(2)$   $G \equiv -G^*$ , in  $SU(3)$   $G$  non è equivalente a  $G^*$ . In particolare  $3 \neq 3^*$  ( $2=2^*$ )

Infatti per  $-G_1^*, -G_2^*$  e  $-G_3^*$  esiste una trasformazione unitaria  $R$  che cambia  $-G_i^* \rightarrow G_i$

da notare che  $G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  già soddisfa  $-G_2^* = G_2$

Cioè  $R$  deve commutare con  $G_2$ :  $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cioè se usiamo come rappresentazione per gli antiquark  $R|\bar{q}\rangle$  si possono usare come generatori di rotazione nello spazio dell'isospin  $G_1 G_2 G_3$  sia per i quark che per gli antiquark

quindi i quark sono  $u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , gli antiquark  $\bar{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $-\bar{d} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Possiamo quindi costruire stati di quark e antiquark, prendendo gli stati quark-quark  
 Con algebra dello spin  $\frac{1}{2}$ , ad es nucleone-nucleone, con la sostituzione:

$$u \rightarrow -\bar{d}, d \rightarrow u$$

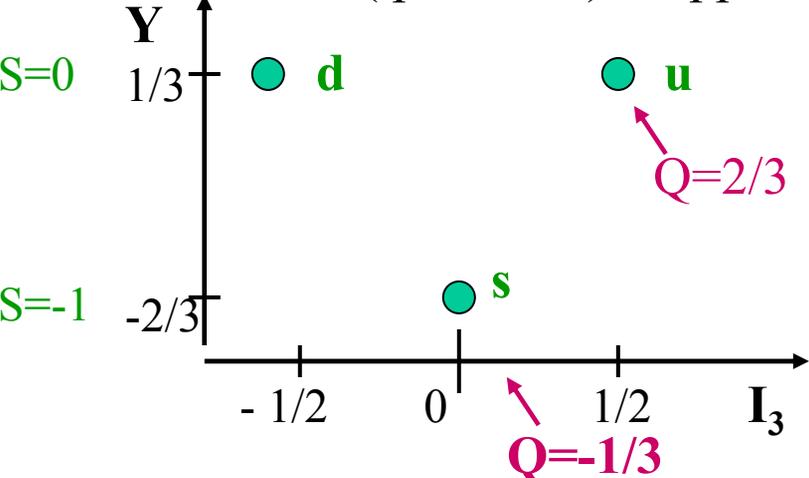
Stati di isospin I di quark-quark e di quark-antiquark: tripletto I=1 e singoletto I=0

$I = 1$	$I = 1$	$I = 0$	$I = 0$
$ uu\rangle$	$- u\bar{d}\rangle$	$\frac{ ud\rangle -  du\rangle}{\sqrt{2}}$	$\frac{ u\bar{u}\rangle -  d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$
$\frac{ ud\rangle +  du\rangle}{\sqrt{2}}$	$\frac{ u\bar{u}\rangle -  d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$		
$ dd\rangle$	$ d\bar{u}\rangle$		

Lo stato di tripletto I=1, descrive i pioni carichi e il  $\pi^0 = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$

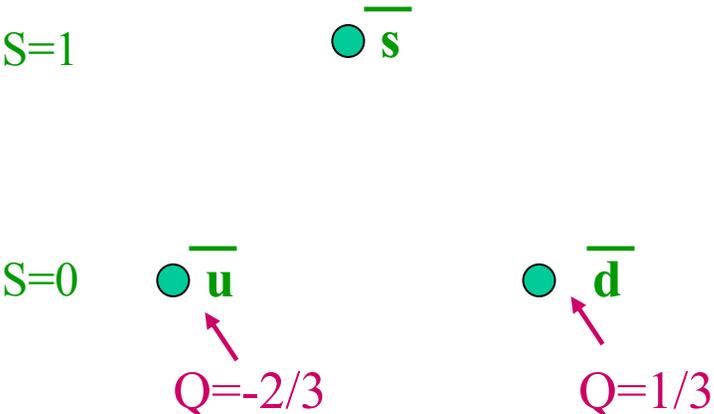
Per l'ipercarica notiamo che la trasformazione R lascia la matrice  $-G^*_8$  invariata

Rappresentazione grafica degli autovettori di  $G_3$  e  $G_8$  (autostati dello spin isotopico e della stranezza (ipercarica)). Rappresentazione fondamentale 3dim di  $SU(3)$ .



Weight diagram:  
l'autovettore è un punto nel piano  
e la posizione è l'autovalore

In  $SU(2)$   $G \equiv -G^*$ , in  $SU(3)$   $G$  non è equivalente a  $G^*$ . In particolare  $3 \neq 3^*$  ( $2=2^*$ )



Rappresentazione  $3^*$  (coniugata)  
fondamentale

Nel momento angolare e spin isotopico le rappresentazioni a più alta dimensione si possono generare sommando 2 o più rappresentazioni fondamentali, tableaux di Young, ex:

Somma di 2 spin  $\frac{1}{2}$ :  $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$  pesati con coefficienti CG

In SU(3):  $3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$  i mesoni!  
 $3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$  ????

$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$  i barioni

$3^* \otimes 3^* \otimes 3^*$  gli antibarioni

$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 27$  ?????

All'interno di ciascun multipletto le particelle hanno lo stesso spin, parità, massa (ma non la stessa stranezza e carica elettriche che sono le qualità cui le interazioni forti sono insensibili). Le interazioni elettromagnetiche provocano piccole differenze di massa.

Novembre 1974: scoperta la  $J/\Psi \rightarrow e^+e^-$  ( $m \sim 3\text{GeV}$ ) e con vita media

“lunga” :  $\tau \sim 10^{-20}$  s (adroni  $\tau \sim 10^{-23}$  s): Interpretazione:

**è uno stato costituito da nuovi quark c:  $J/\Psi(c\bar{c})$ .**

**(previsto anche teoricamente: meccanismo GIM)**

Con la scoperta del quarto quark c il numero dei mesoni e barioni aumenta, e il gruppo di simmetria diventa **SU(4) di rango 3 e ordine  $n^2-1=15$**   
 Supermultipletti di SU(4):

Mesoni:

$$4 \otimes \bar{4} = 1 \oplus 15$$

Barioni:

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 4 \oplus 20 \oplus 20 \oplus 20$$

pseudoscalari

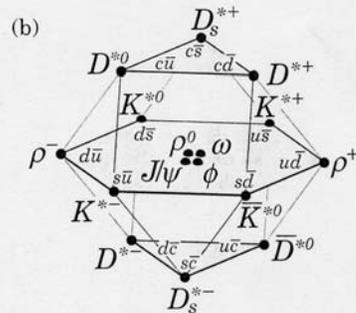
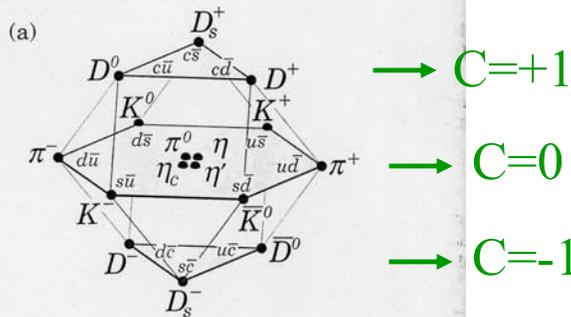


Figure 13.1: SU(4) 16-plets for the (a) pseudoscalar and (b) vector mesons made of u, d, s, and c quarks. The nonets of light mesons occupy the central planes, to which the  $c\bar{c}$  states have been added. The neutral mesons at the centers of these planes are mixtures of  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$ , and  $c\bar{c}$  states.

vettori

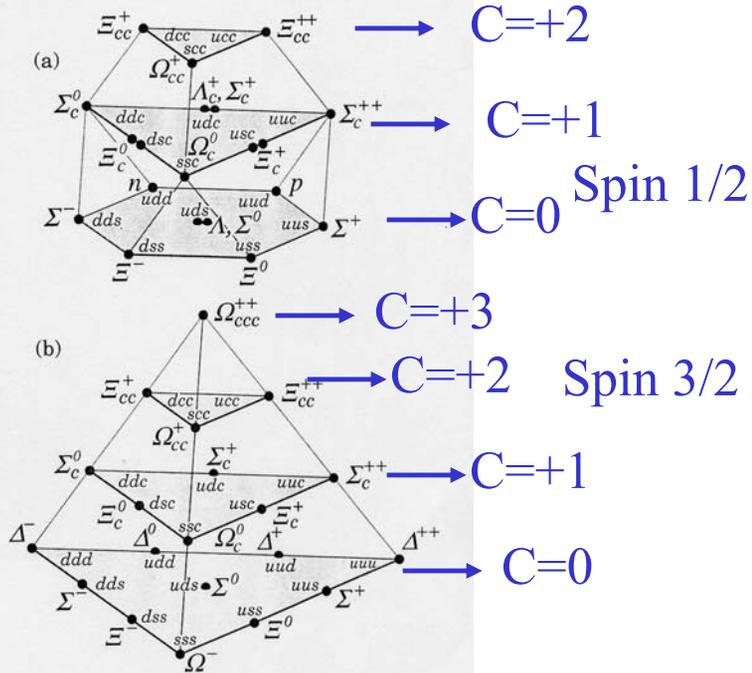


Figure 13.2: SU(4) multiplets of baryons made of u, d, s, and c quarks. (a) The 20-plet with an SU(3) octet. (b) The 20-plet with an SU(3) decuplet.

Torniamo ai barioni  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ , consideriamo il decupletto ( $S=3/2$ ):

<b>ddd</b>	<b>dud</b>	<b>duu</b>	<b>uuu</b>	← “ $\Delta$ ”
<b>dds</b>	<b>dus</b>	<b>uus</b>		← “ $\Sigma$ ”
	<b>dss</b>	<b>uss</b>		← “ $\Xi$ ”
	<b>sss</b>			← “ $\Omega$ ”

N.B. Gli stati nei tre angoli sono simmetrici per lo scambio: anche gli altri dovrebbero esserlo. Ma problema per la simmetria BE!

Dei barioni il singoletto è antisimmetrico, il decupletto simmetrico  $8 \oplus 8$  misto

Se aggiungiamo anche lo spin  $SU(3) \rightarrow SU(6)$ , **stati di base:  $u\uparrow u\downarrow, d\uparrow d\downarrow, s\uparrow s\downarrow$  e:**

$$6 \otimes \bar{6} = 35 \oplus 1 \quad 36 : [(3,2) \otimes (\bar{3},2)] = (8,3) \oplus (1,3) \text{ (nonetto vettoriale)} \oplus (8,1) \text{ (ottetto pseudoscalare)} \oplus (1,1) \text{ (singoletto pseudoscalare)}$$

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = 20 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 56$$

A            misto            S

ex. Il 56 sono i multipletti di  $SU(3)$ :  
56 = (8,2) + (10,4)

Anche l’ottetto barionico è simmetrico sia per scambio di sapore che di spin, ad esempio lo stato del protone (uud):

$$\Phi(p, S_z=+1/2) = 1/\sqrt{18} [ 2u\uparrow u\uparrow d\downarrow + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow + 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow ]$$

# Particle data group

**Table 13.2:** Suggested  $q\bar{q}$  quark-model assignments for most of the known mesons. Some assignments, especially for the  $0^{++}$  multiplet and for some of the higher multiplets, are controversial. Mesons in bold face are included in the Meson Summary Table. Of the light mesons in the Summary Table, the  $f_0(1500)$ ,  $f_1(1510)$ ,  $f_2(1950)$ ,  $f_2(2300)$ ,  $f_2(2340)$ , and one of the two peaks in the  $\eta(1440)$  entry are not in this table. Within the  $q\bar{q}$  model, it is especially hard to find a place for the first two of these  $f$  mesons and for one of the  $\eta(1440)$  peaks. See the “Note on Non- $q\bar{q}$  Mesons” at the end of the Meson Listings.

$N^{2S+1}L_J$	$J^{PC}$	$u\bar{d}, u\bar{u}, d\bar{d}$ $I = 1$	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ $I = 0$	$c\bar{c}$ $I = 0$	$b\bar{b}$ $I = 0$	$\bar{s}u, \bar{s}d$ $I = 1/2$	$c\bar{u}, c\bar{d}$ $I = 1/2$	$c\bar{s}$ $I = 0$	$\bar{b}u, \bar{b}d$ $I = 1/2$	$\bar{b}s$ $I = 0$	$\bar{b}c$ $I = 0$
$1^1S_0$	$0^{-+}$	$\pi$	$\eta, \eta'$	$\eta_c(1S)$	$\eta_b(1S)$	$K$	$D$	$D_s$	$B$	$B_s$	$B_c$
$1^3S_1$	$1^{--}$	$\rho$	$\omega, \phi$	$J/\psi(1S)$	$\Upsilon(1S)$	$K^*(892)$	$D^*(2010)$	$D_s^*$	$B^*$	$B_s^*$	
$1^1P_1$	$1^{+-}$	$b_1(1235)$	$h_1(1170), h_1(1380)$	$h_c(1P)$		$K_{1B}^\dagger$	$D_1(2420)$	$D_{s1}(2536)$			
$1^3P_0$	$0^{++}$	$a_0(1450)^*$	$f_0(1370)^*, f_0(1710)^*$	$\chi_{c0}(1P)$	$\chi_{b0}(1P)$	$K_0^*(1430)$					
$1^3P_1$	$1^{++}$	$a_1(1260)$	$f_1(1285), f_1(1420)$	$\chi_{c1}(1P)$	$\chi_{b1}(1P)$	$K_{1A}^\dagger$					
$1^3P_2$	$2^{++}$	$a_2(1320)$	$f_2(1270), f_2'(1525)$	$\chi_{c2}(1P)$	$\chi_{b2}(1P)$	$K_2^*(1430)$	$D_2^*(2460)$				
$1^1D_2$	$2^{-+}$	$\pi_2(1670)$	$\eta_2(1645), \eta_2(1870)$			$K_2(1770)$					
$1^3D_1$	$1^{--}$	$\rho(1700)$	$\omega(1650)$	$\psi(3770)$		$K^*(1680)^\ddagger$					
$1^3D_2$	$2^{--}$					$K_2(1820)$					
$1^3D_3$	$3^{+-}$	$\rho_3(1690)$	$\omega_3(1670), \phi_3(1850)$			$K_3^*(1780)$					
$1^3F_4$	$4^{++}$	$a_4(2040)$	$f_4(2050), f_4(2220)$			$K_4^*(2045)$					
$2^1S_0$	$0^{-+}$	$\pi(1300)$	$\eta(1295), \eta(1440)$	$\eta_c(2S)$		$K(1460)$					
$2^3S_1$	$1^{--}$	$\rho(1450)$	$\omega(1420), \phi(1680)$	$\psi(2S)$	$\Upsilon(2S)$	$K^*(1410)^\ddagger$					
$2^3P_2$	$2^{++}$	$a_2(1700)$	$f_2(1950), f_2(2010)$		$\chi_{b2}(2P)$	$K_2^*(1980)$					
$3^1S_0$	$0^{-+}$	$\pi(1800)$	$\eta(1760)$			$K(1830)$					

\* See our scalar minireview in the Particle Listings. The candidates for the  $I = 1$  states are  $a_0(980)$  and  $a_0(1450)$ , while for  $I = 0$  they are:  $f_0(600)$ ,  $f_0(980)$ ,  $f_0(1370)$ , and  $f_0(1710)$ . The light scalars are problematic, since there may be two poles for one  $q\bar{q}$  state and  $a_0(980)$ ,  $f_0(980)$  may be  $K\bar{K}$  bound states.

† The  $K_{1A}$  and  $K_{1B}$  are nearly equal ( $45^\circ$ ) mixes of the  $K_1(1270)$  and  $K_1(1400)$ .

‡ The  $K^*(1410)$  could be replaced by the  $K^*(1680)$  as the  $2^3S_1$  state.

$n^{2S+1}L_J$

# Il charmonio

SLAC 1974:  
 $e^+e^- \rightarrow \Psi$   
 $\rightarrow e^+e^-$   
 $\rightarrow \mu^+\mu^-$   
 $\rightarrow \text{adroni}$

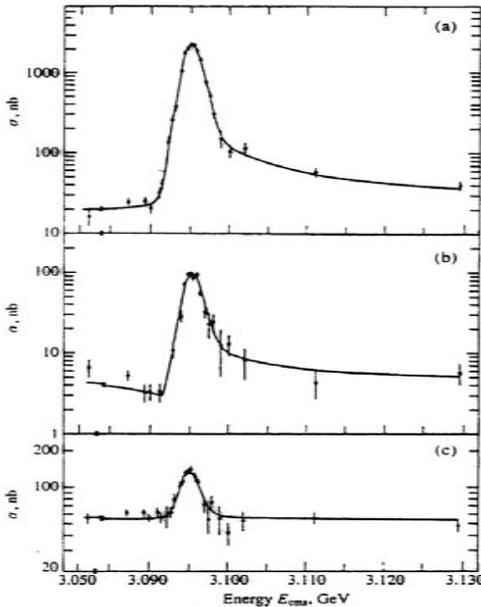


Fig. 4.1. Results of Augustin *et al.* (1974) showing the observation of the  $J/\psi$  resonance of mass 3.1 GeV, produced in  $e^+e^-$  annihilation at the SPEAR storage ring, SLAC. (a)  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ ; (b)  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ,  $|\cos\theta| \leq 0.6$ ; (c)  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ,  $|\cos\theta| \leq 0.6$ .

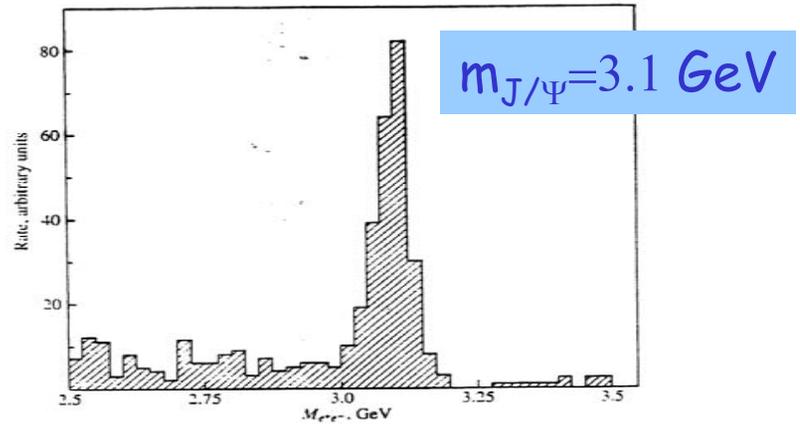


Fig. 4.2. Results of Aubert *et al.* (1974) indicating the narrow resonance  $J/\psi$  in the invariant-mass distribution of  $e^+e^-$  pairs produced in inclusive reactions of protons with a beryllium target.  $p + \text{Be} \rightarrow e^+e^- + X$ . The experiment was carried out with the 28 GeV AGS at Brookhaven National Laboratory.

BNL 1974:  $p + \text{Be} \rightarrow J/\Psi + X$   
 $\downarrow$   
 $e^+e^-$

La larghezza dei picchi è dominata dalla risoluzione sperimentale. La sezione d'urto per la produzione della risonanza (Breit Wigner)

$$\sigma(E)_{(e^+e^- \rightarrow \Psi \rightarrow e^+e^-)} = \frac{4\pi\tilde{\lambda}^2(2J+1)\Gamma_{e^+e^-}^2/4}{(2s_1+1)(2s_2+1)[(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4]}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{p_e}$$

Con  $s_1=s_2=1/2$   
 $J=1$

Integrando su E:

$$\int_0^\infty \sigma(E)dE = \frac{3}{2}\pi^2\tilde{\lambda}^2 \left[ \frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma} \right]^2 \Gamma \rightarrow \text{sperimentale}$$

$$\int_0^\infty \sigma(E)dE = 800 \text{ nb} \cdot \text{MeV}, \text{ sapendo } \frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma} = .6\%, p = 1500 \text{ MeV}$$

**$\Gamma=0.087 \text{ MeV}$**   
**molto più piccola**  
**della risol. sperim.**

La larghezza totale della  $J/\Psi$  è molto minore della risoluzione sperimentale e anche molto minore di quella delle risonanze precedenti. Ad esempio:  
Per la  $\rho(776 \text{ MeV})$ ,  $\Gamma_\rho = 150 \text{ MeV}$ ; per la  $\omega(782)$ ,  $\Gamma_\omega = 8.4 \text{ MeV}$ ,  
per la  $\Phi(1020)$ ,  $\Gamma_\Phi = 4.26 \text{ MeV}$ .

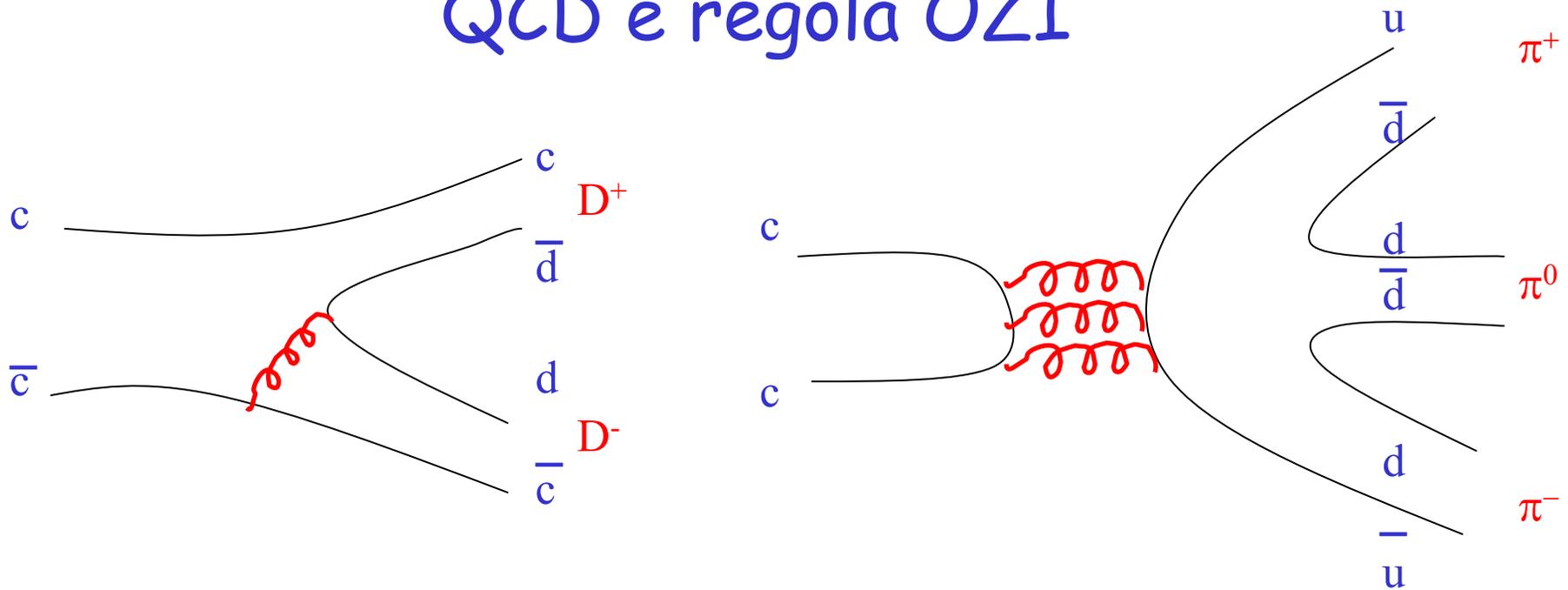
Da notare anche che la larghezza parziale in coppie leptoniche:  $\Gamma(J/\Psi \rightarrow e^+e^-) = 5 \text{ KeV}$  non molto diversa dalle altre risonanze. Quindi è larghezza adronica ad essere molto minore. Decadimenti adronici significano stati finali con quark: regola di OZI: i decadimenti di quark con linee disconnesse (in sistemi di quark di tipo diverso) sono soppressi



**La  $J/\Psi$  è costituita da una coppia di nuovi quark ( $c\bar{c}$ ) e il decadimento in mesoni contenenti questi quark (ex  $J/\Psi \rightarrow D^+(c\bar{d})D^-(\bar{c}d)$ ) è cinematicamente vietato. Sarà possibile per eccitazioni a massa più alta della  $J/\Psi$ , ex la  $\Psi(3770)$  che in effetti ha larghezza molto maggiore:  $24 \text{ MeV}$**

Per i decadimenti leptonici si passa sempre attraverso un accoppiamento elettromagnetico, fotoni, mentre per quelli adronici l'accoppiamento è di tipo forte (QCD) mediato da gluoni.

# QCD e regola OZI



L'interazione responsabile del decadimento e l'interazione di colore (QCD)  
 Lo stato iniziale non ha colore e cosi deve essere lo stato intermedio (gluoni) e quello  
 Finale. Ma nell'anichilazione un singolo gluone non e' sufficiente:  
 Il gluone e' colorato! Almeno due gluoni (cfr  $8 \otimes 8 = 1 \oplus \dots$ ). Ma il gluone si comporta  
 Per C come il fotone, quindi da uno stato a spin 1 fermione/antifermione, come  
 L'ortopositronio, se C e' conservato dovro' avere un numero dispari di gluoni.  
 La  $J/\Psi$  e' uno stato vettoriale.

Conseguenza: la mediazione con 3 gluoni e' fortemente soppressa ( $\alpha_s^6$ )

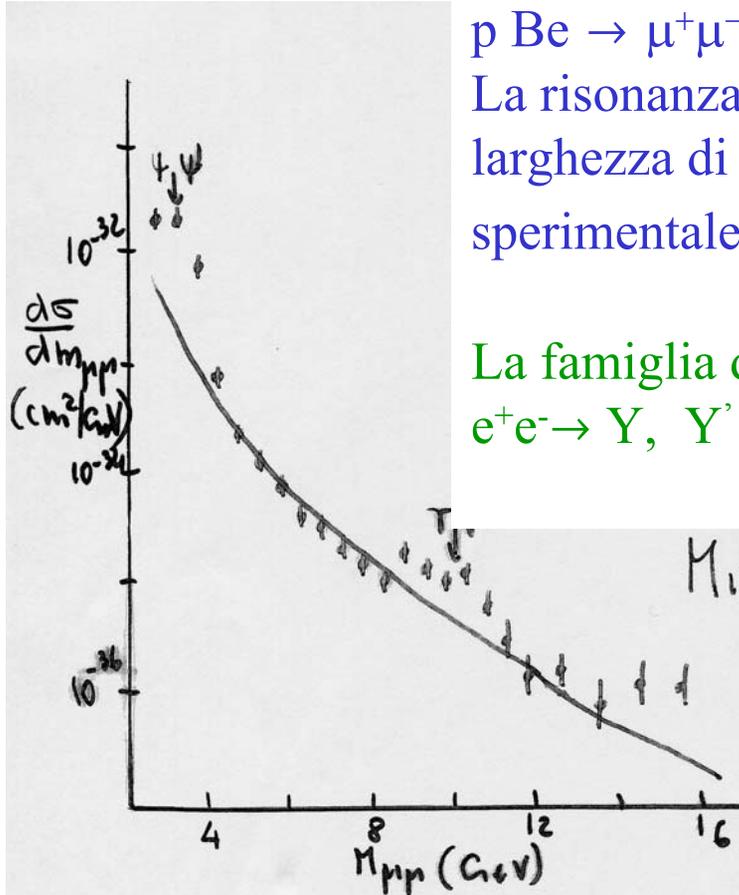
# Ulteriore tipo di quark: il b

Il fenomeno si ripete a energie più elevate (1977):

$p \text{ Be} \rightarrow \mu^+ \mu^- + X$  (si studia  $M(\mu^+ \mu^-)$ ).

La risonanza osservata (Y) ha una massa di  $\sim 10 \text{ GeV}$  e una larghezza di  $\sim 1.2 \text{ GeV}$  che è maggiore della risoluzione sperimentale: ci sono 2 o tre risonanze Y.

La famiglia delle Y viene studiata con cura nelle macchine  $e^+e^- \rightarrow Y, Y', Y'', Y''', Y^4 \dots$



N.B. La  $Y(4S)$  che è uno stato  $(B\bar{B})$  con massa  $10.58 \text{ GeV}$  può decadere in coppie di mesoni che contengono il nuovo quark B:  $Y(4S) \rightarrow B\bar{B}$

Anche in questo caso la larghezza totale è piccola per la risonanza sotto soglia:

Ex.  $\Gamma(Y(1S)) = 0.053 \text{ MeV}$

Ma  $\Gamma(Y(4S)) = 10 \text{ MeV}$  (sopra soglia per la produzione di coppie  $B\bar{B}$ )

# Il quarkonio

Atomo di idrogeno: **ep**

$$V(r) = \frac{-e^2}{r} \rightarrow \text{equazione di Schroedinger non relativistica} \rightarrow$$

$$\text{livelli di energia quantizzati } E_n: E_n = -\alpha^2 m_e \left[ \frac{1}{n^2} \right] = 13.6 \text{ eV}/n^2 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$r_0 = \frac{1}{\alpha \cdot m_e} = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{ cm (raggio di Bohr)}$$

Positronio: **e<sup>+</sup>e<sup>-</sup>**

Come in meccanica classica si introduce la massa ridotta :  $m_{red} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_e / 2$

$$\text{con } H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_e} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_e} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \rightarrow \frac{p^2}{2m_{red}} + V(r) \quad E_n^{pos} = \frac{1}{2} E_n = -\alpha^2 m_e \frac{1}{4n^2} (n = 1, 2, 3, \dots), r_0^{pos} = \frac{2}{\alpha m_e}$$

Atomo **q $\bar{q}$**

Forza di legame forte (mediata da gluoni)  $\implies \underline{\alpha \rightarrow \alpha_s}$

A piccole distanze potenziale tipo Coulombiano  $V(r) \sim 1/r$ ,

A grandi distanze confinamento dei quark:

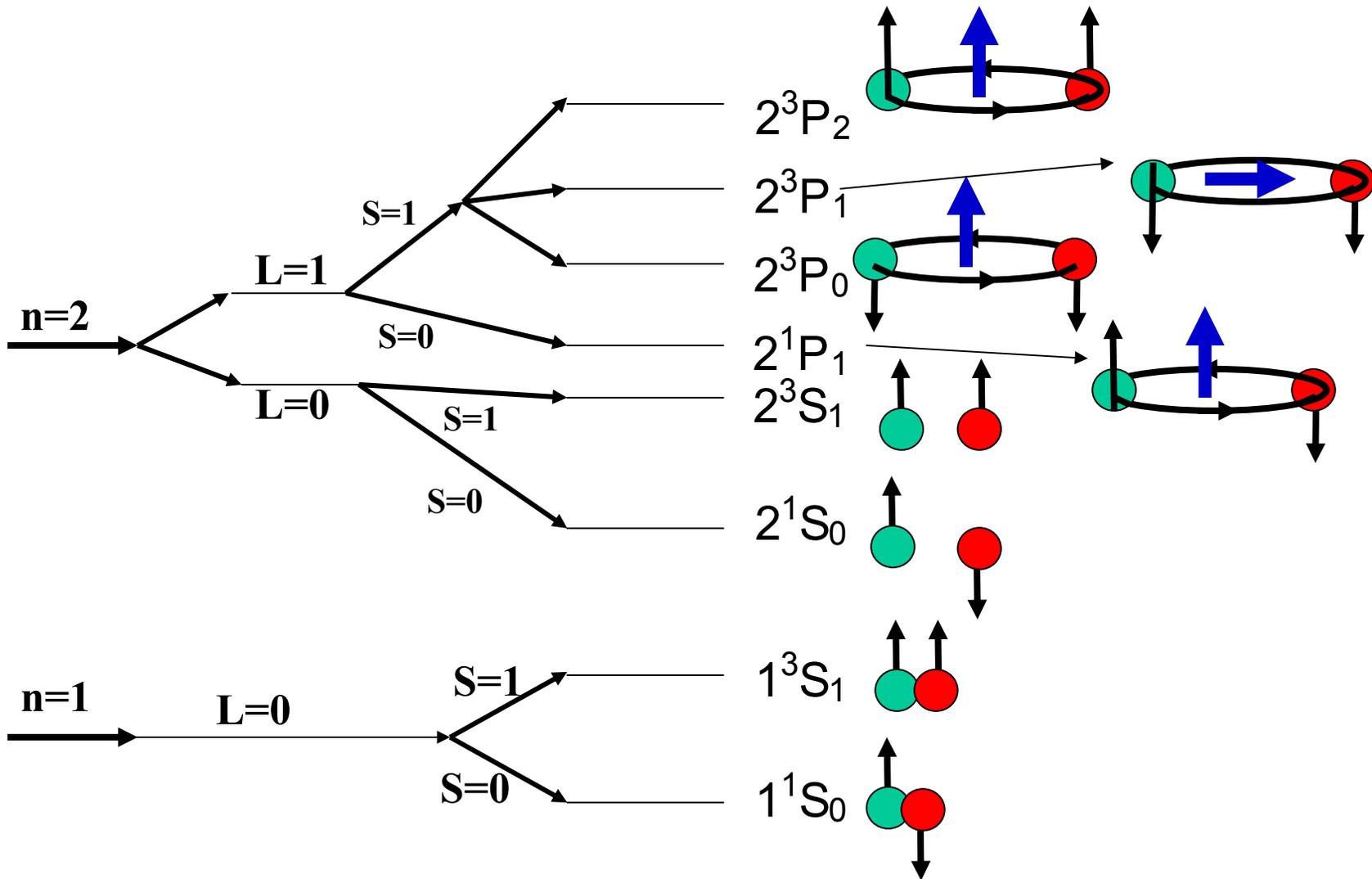
$$V(r) = -\frac{4}{3} \alpha_s / r + F_0 r$$

# Correzioni relativistiche

- Accoppiamento spin/orbita  
-struttura fine  $V \sim \vec{L} \cdot \vec{S}$
- Accoppiamento spin/spin  
-struttura iperfine  $V \sim \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 \sim \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$
- Queste interazioni separano i livelli:
  - Tripletto ( $^3S_1$ ) (ortopositronio)
  - Singoletto ( $^1S_0$ ) (parapositronio)

$$\Delta E_{fine} \sim \frac{\alpha^4 mc^2}{n^3}$$

# Livelli del positronio

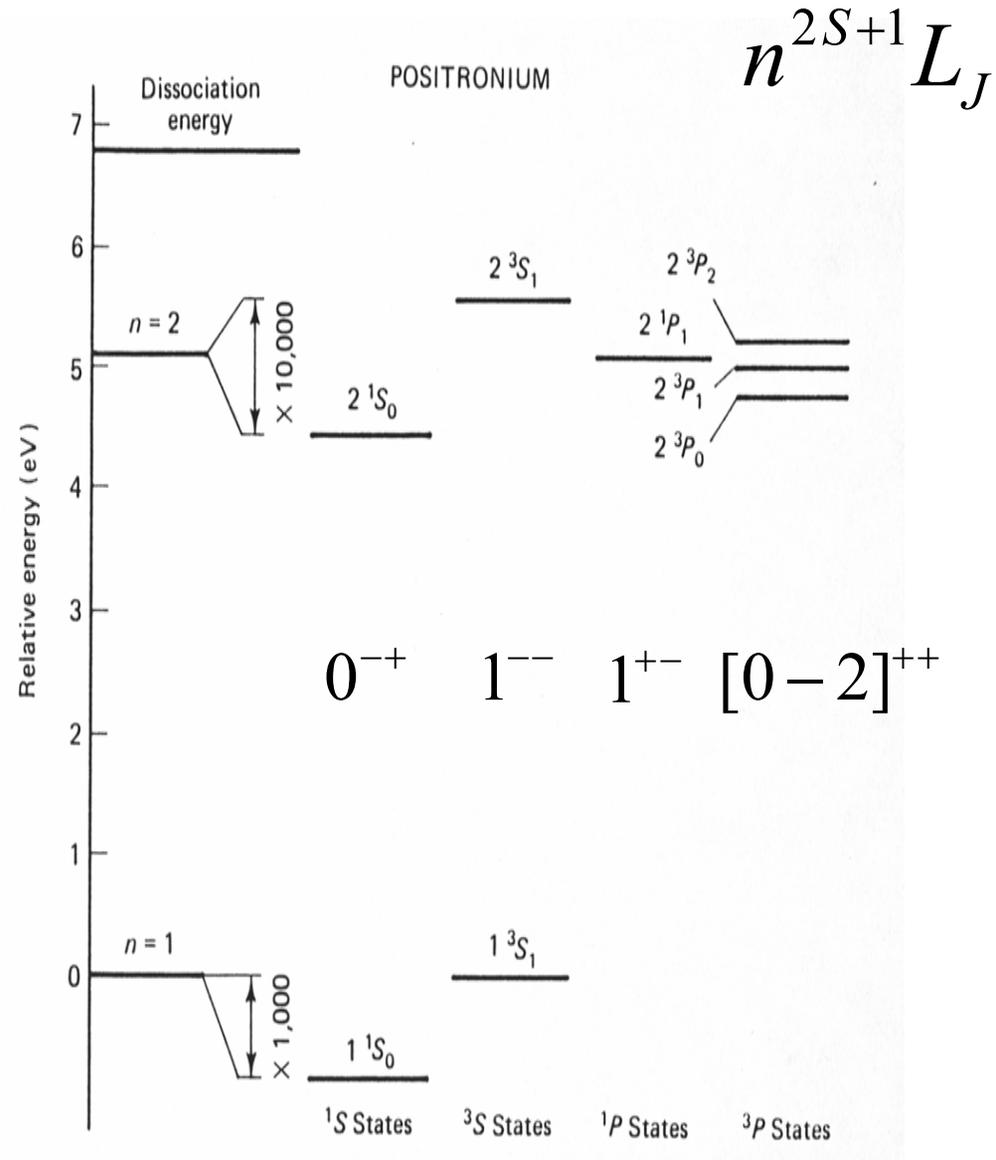


# Livelli effettivi

$$E_2 - E_1 = \frac{-\alpha^2 m}{4} \left[ \frac{1}{4} - 1 \right] = \frac{3\alpha^2 m}{16} = 5.1 eV$$

$$E_{2^3S_1} - E_{2^1P_1} = \frac{23\alpha^4 m}{960} = 3.5 \times 10^{-5} eV$$

$$E_{1^3S_1} - E_{1^1S_0} = \frac{7\alpha^4 m}{12} = 8.4 \times 10^{-4} eV$$



# Vita media del $1^1S_0$

- Stimiamo la vita media:

- Due fotoni  $\rightarrow \alpha^2$

- Proporzionale alla funzione d'onda all'origine:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3} \sim \frac{1}{V} \quad a = \frac{2\hbar}{m c \alpha} \sim \frac{1}{\alpha m}$$

- Mettiamole insieme e stimiamo la larghezza del positronio  
argomento dimensionale:

$$\Gamma = \frac{\alpha^2 |\psi|^2 [M^3]}{m^2 [M^2]} \sim \alpha^5 m$$

## Calcolo in QED del positronio

- Il calcolo teorico produce come risultato

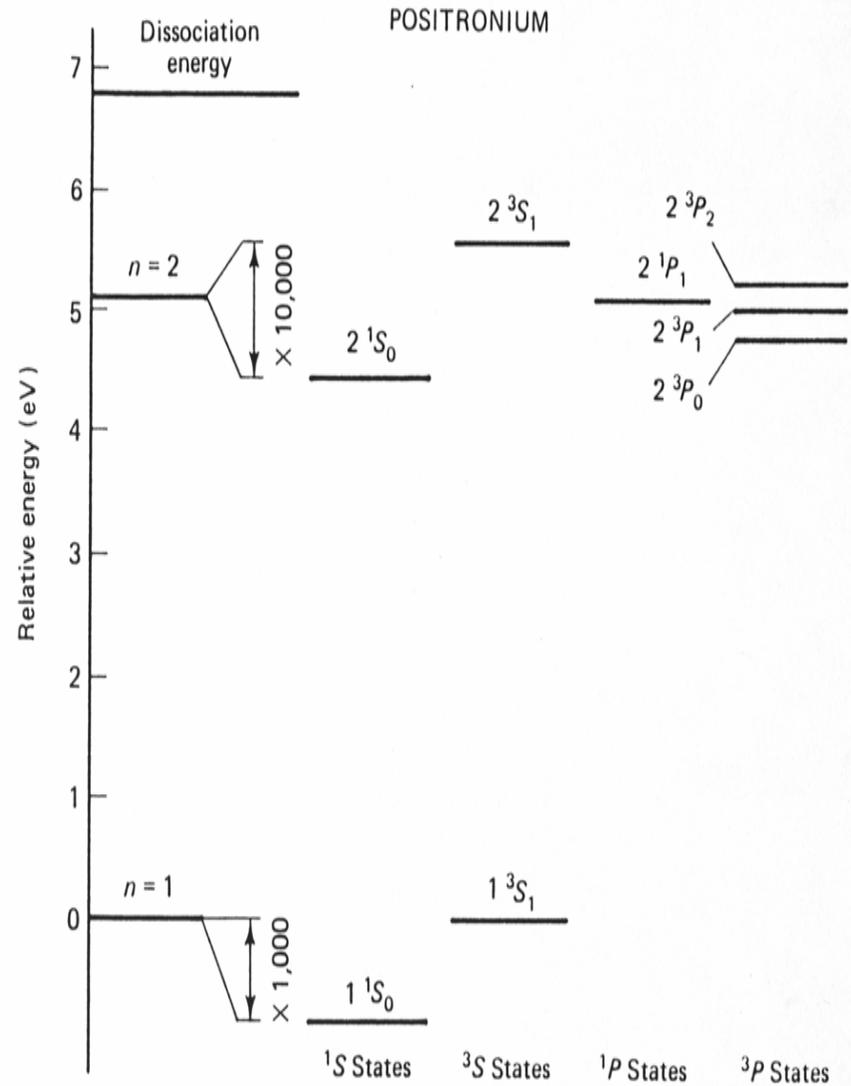
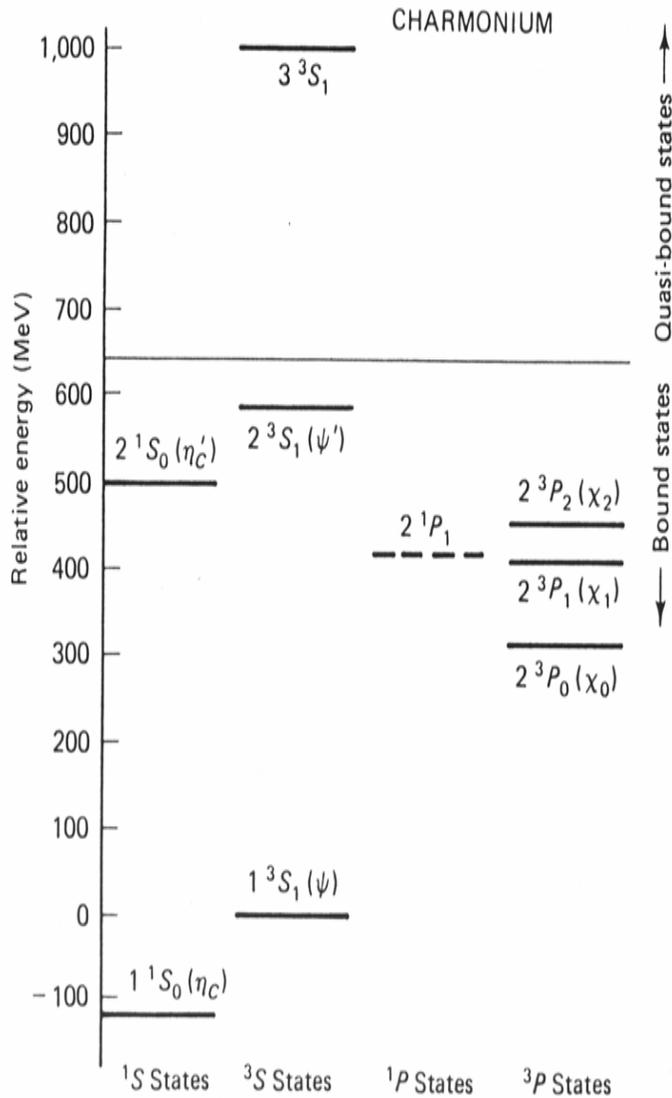
$$\Gamma(2\gamma) = \frac{\alpha^5 m}{2}$$

- Nel caso dell'ortopositronio abbiamo un ulteriore  $\alpha$  (tre fotoni) ma il risultato dimensionale è simile:

$$\Gamma(3\gamma) = \frac{2(\pi^2 - 9)}{9\pi} \alpha^6 m$$

Entrambi i valori sono in buon accordo con i dati sperimentali e anche le separazioni fine e iperfine (**trionfo della QED**).

# Paragone con il charmonio



# Perchè dovrebbero essere simili?

- Il potenziale Coulombiano è mediato da fotoni senza massa

$$V_{em} = -\frac{\alpha}{r}$$

- Il “potenziale” QCD ha una forma simile:

$$V_{QCD} = -\frac{4\alpha_s}{3r} + kr$$

Il termine Coulombiano è indicato dalla distribuzione angolare di 2 jet in collisioni adroniche  $\sim \underline{(1+\cos\theta^2)}$  come nelle interazioni  $e^+e^-$ . Tale andamento è testimone di uno **scambio di un mediatore a massa nulla e spin 1**.  
Il termine lineare è suggerito dalla linearità tra momento angolare e il quadrato della massa di mesoni e barioni.

# Valutazioni

- Consideriamo il raggio di Bohr

$$a(n) = \frac{2\hbar n^2}{m c \alpha} \sim \frac{n^2}{\alpha m} \quad \text{Molto piccolo per quark pesanti}$$

- Quantizziamo il momento angolare

$$p a = n \hbar$$

- Otteniamo una relazione interessante per l'impulso dell'elettrone (quark):

$$p a = \frac{2 p \hbar n^2}{m c \alpha} = n \hbar \Rightarrow \frac{p}{m c} = \frac{\alpha}{2 n} \quad \alpha : p \ll m c$$
$$\alpha_s : p / m c \sim .1$$

- Così non è irragionevole che un modello a potenziale (perturbativo)
  - e non relativistico funzioni con quark pesanti!

I quark leggeri (u,d,s) sono intrinsecamente relativistici: l'energia di legame è di centinaia di MeV (paragonabile alla loro massa) quindi l'equazione di Schroedinger non è applicabile. Con i quark pesanti (c,b,(t)) la teoria con il potenziale è più fondata: Correlazioni tra gli stati del positronio e quelli del charmonio e bottonio.

**Ma grande differenza tra le scale! Ex. La struttura iperfina (interazione spin/spin)  $1^1S_0$  e  $1^3S_1$  del positronio è  $10^{-11}$  volte più piccola che nel charmonio ( $\eta_c$ - $\psi$ ).**

Altri quarkoni possibili?  
 $cb, \overline{ct}, \overline{bt}, \dots$  ?  
 Simili a  $\mu^+e^-$ ...

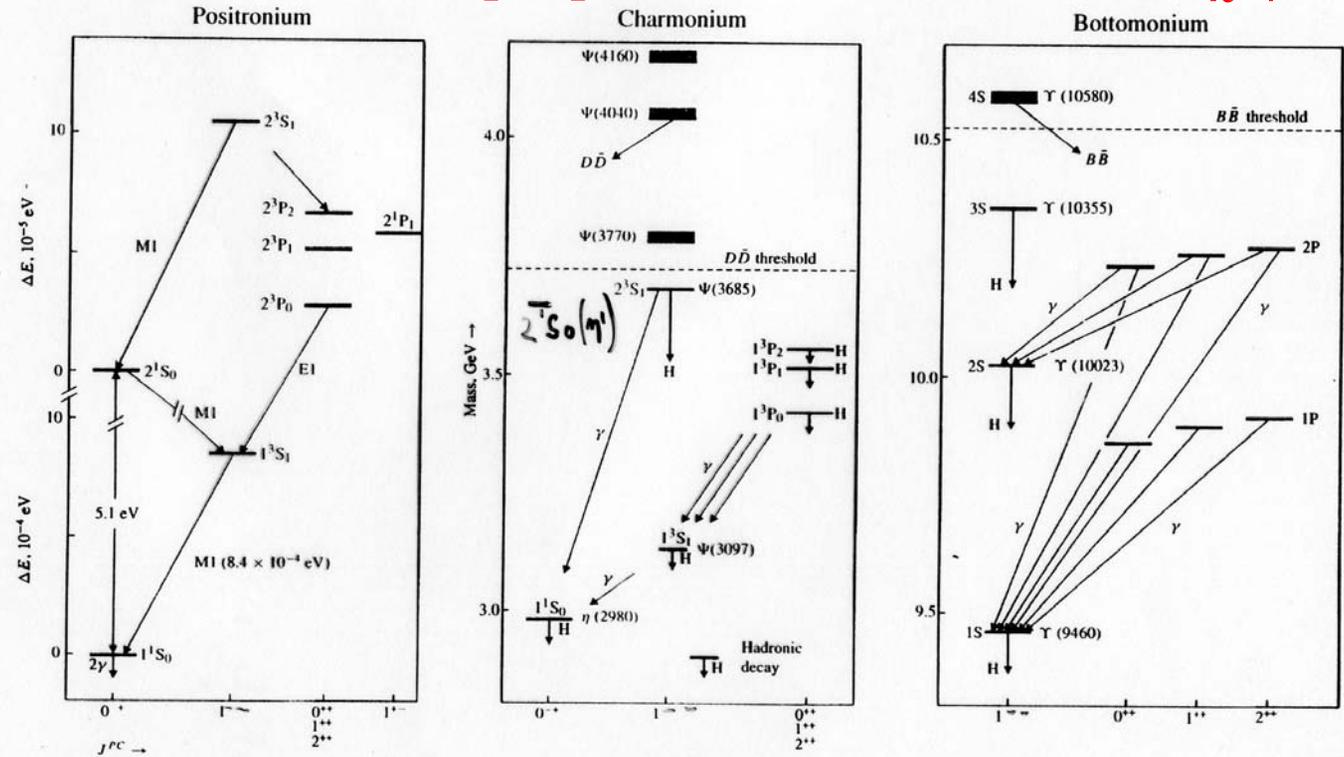
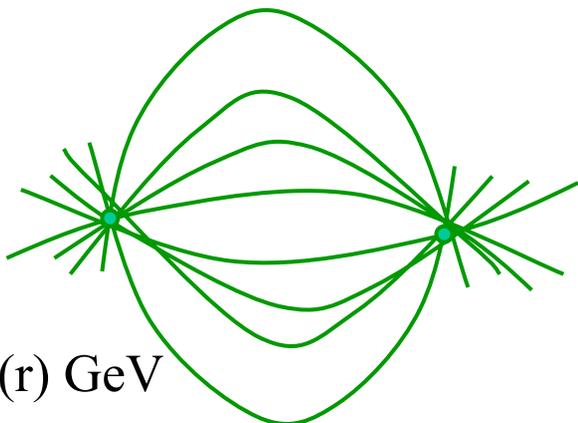


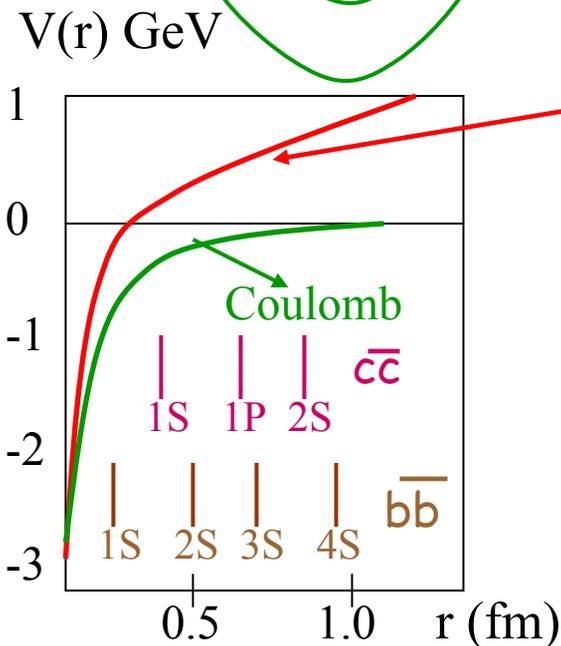
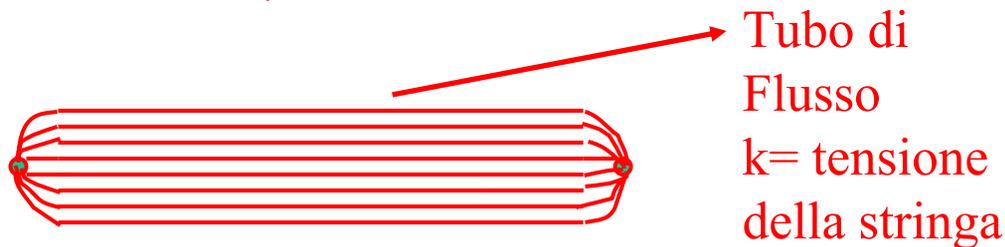
Fig. 4.8. The energy-level diagrams for positronium, charmonium and bottomonium. Note the changes in scale for positronium. Only states with  $J^{PC} = 1^{--}$  can be accessed in  $e^+e^-$  annihilation experiments. Note that the atomic physics convention is to label the lowest-lying P states of positronium as 2P, while for the charmonium and bottomonium states the nuclear physics nomenclature 1P is employed. The shading indicates broad states.

La parte di potenziale  $V(r)=kr$  determina il confinamento: infatti  $k=0.18 \text{ GeV}^2$  e a distanza di  $\sim 2 \text{ GeV}^{-1}$  ( $\sim 0.4 \text{ fm}$ )  $V \sim 0.36 \text{ GeV} > m(2\pi)$

Campo di potenziale Coul.



Campo di potenziale  $kr$

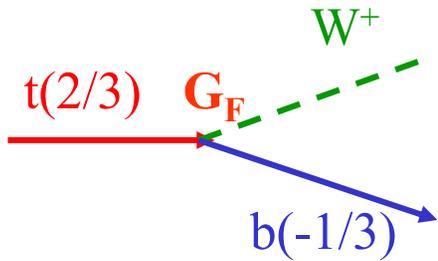


Potenziale forte in funzione della separazione  $r$ .  
Si prevedono anche i raggi di charmonio e bottonio

N.B. Raggio  $1^3S_1$  ( $\psi$ ) è circa  $0.4 \text{ fm}$   
 $\ll r(\text{positronio})$  ( $r \propto 1/m\alpha$ )

I livelli del charmonio e del bottonio dipendono da  $V(r)$  ma anche da termini cinetici che contengono le masse  $m_c$  e  $m_b$  per cui da un fit con l'eq. di Schroedinger si ottengono  $\alpha_s$ ,  $k$ ,  $m_C$ ,  $m_B$ .

# Stati legati con il top



Supponiamo che  $m_{\text{top}} \gg m_b, m_W$

$$\Gamma_t \propto G_F \cdot m_t^3 \quad (\text{esatto: } \Gamma_t \propto \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} G_F \cdot m_t^3)$$

Ex. Se  $m_t = 200 \text{ GeV}$ ,  $\Gamma_t = 2.4 \text{ GeV}$  ( $\tau_t = 1/\Gamma_t = 3 \cdot 10^{-25} \text{ s}$ )

Stato legato  $t\bar{t}$ ?

$t\bar{t}$ : sistema non relativistico in campo Coulombiano  $V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r}$

Stimiamo velocità dei quark e raggio del sistema:

$$m_t v r_0 = 1; \quad \frac{m_t v^2}{r_0} = \frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r_0^2} \Rightarrow$$

$$v = \frac{4}{3} \alpha_S; \quad r_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha_S m_t}, \quad (\text{viriale } m_t \overline{v^2} = \frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r_0}, \text{ se } V \sim r^{-n} : 2\langle T \rangle = n\langle V \rangle)$$

$$\Rightarrow \text{periodo orbitale } T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{9\pi}{8\alpha_S^2 m_t}$$

se  $\alpha_S = 0.12$ ,  $m_t = 200 \text{ GeV}$ ,

$$\Rightarrow T = 8 \cdot 10^{-25} \text{ s} > \tau_{t\bar{t}} = 1/2 \tau_t$$

Il top decade prima di formare lo stato legato!

# Bibliografia

-D.H. Perkins, “Introduction to high energy Physics” 4th edition 1999, Cambridge University Press.

-Quang Ho-Kim, P.Xuan Yem, “Elementary particles and their interactions, concepts and phenomena” Springer 1998.