

SIMMETRIE

Emmy Noether (1917):

A ogni simmetria corrisponde una legge di conservazione o di selezione. Simmetria? L'assunzione fisica che certe quantità non sono osservabili implica un'invarianza del sistema sotto la trasformazione matematica ad essa collegata.

<u>Non osservabile</u>	<u>Trasformazione di simmetria</u>	<u>Legge di conserv. o selezione</u>
Diff. tra particelle eguali	Permutazione	Statistica di BE o FD
Posizione spaz. assoluta	Traslazione spaziale	Impulso
Tempo assoluto	Traslazione temporale	Energia
Direzione spaz. assoluta	Rotazione	Momento angolare
Destra (sinistra) assolute	Inversione spaziale	Parità spaziale: P
Carica elettrica assoluta	$e \rightarrow -e$	Inversione di carica: C
Direzione temp. assoluta	$t \rightarrow -t$	Inversione temporale: T

In aggiunta alle simmetrie dello spazio-tempo ci sono anche le **simmetrie interne**, ex.

-Invarianza di gauge (QED, U(1)) \Leftrightarrow conservazione della carica elettrica

-Invarianza di gauge (Interazioni deboli, SU(2)) \Leftrightarrow Conservazione dell'isospin debole

Teorema di Noether

Data la Lagrangiana scalare di Lorentz funzione dei campi ϕ_i e delle sue derivate, $\partial_\mu \phi_i$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

Teorema di Noether: per ogni invarianza dell'azione sotto una trasformazione continua dei campi esiste:

-Una carica classica Q , indipendente dal tempo: $\dot{Q} = 0$

-Una corrente conservata J_μ : $\partial_\mu J^\mu = 0$

$$\text{ex. } \phi_i(x) \rightarrow \phi_i'(x) \equiv e^{-iq_i \mathcal{G}} \phi_i(x)$$

\mathcal{G} = numero reale

q_i = carica elettrica



Conservazione carica elettrica
Equazione di continuità:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

L'insieme delle operazioni di simmetria su un sistema deve soddisfare le proprietà:

- 1) **Chiusura:** se R_i e R_j sono nell'insieme, lo è anche $R_i R_j$;
 - 2) **Identità:** c'è un elemento I tale che $I R_i = R_i I = R_i$;
 - 3) **Inverso:** qualunque R_i esiste R_i^{-1} tale che $R_i R_i^{-1} = I$;
 - 4) **Associatività:** $R_i (R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$
- SONO
UN GRUPPO**

In generale $R_i R_j \neq R_j R_i$, se $R_i R_j = R_j R_i$ il gruppo è detto abeliano (ex. Le traslazioni spaziali sono abeliane, le rotazioni no.)

Sono gruppi: $U(1)$ (moltiplicazione per una fase), le trasformazioni di Lorentz, vedremo $SU(2)$...

Ciascun gruppo può essere rappresentato da un gruppo di matrici:

Per ciascun elemento a c'è una matrice M_a e tale che se

$$a b = c \quad \text{allora} \quad M_a M_b = M_c$$

Se ci sono più elementi del gruppo rappresentati dalla stessa matrice si dice omomorfo. Non necessariamente isomorfo. I gruppi possono essere rappresentati da matrici in differenti dimensioni ex. $SU(2)$ ha rappresentazioni in 1, 2 (fondamentale), 3, 4 dimensioni.

Simmetrie di sapore (interne)

Osserviamo che $m_p = 938.28 \text{ MeV} \sim m_n (939.57 \text{ MeV})$.

Heisenberg (1932): sono due stati di una singola particella: **il nucleone**:
“spegnendo” la carica elettrica p e n diventerebbero indistinguibili:

Le forze sperimentate dal protone sono le stesse di quelle del neutrone.

Organizzazione formale in un doppietto $N \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

p e n sono due stati dell'isospin forte I , $I=1/2$: $p=|1/2, 1/2\rangle$, $n=|1/2, -1/2\rangle$

Le interazioni forti di p e n sono invarianti per rotazioni nello spazio dell'isospin I . L'insieme di queste rotazioni costituisce il gruppo $SU(2)$: gruppo di matrici 2×2 unitarie e a determinante $=1$.

NOETHER: l'isospin I si conserva in tutte le interazioni forti:

dati $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_f\rangle$, l'ampiezza di scattering vale: $\langle \psi_f | S | \psi_i \rangle$ e

$$\left[\hat{S}, \hat{I} \right] = 0 \Rightarrow \Delta |I|^2 = 0, \Delta I_3 = 0$$

Esempi

I $\pi = 1$ (tre possibili stati di carica): $\pi^+ = |1, 1\rangle$ (m ~ 140 MeV), $\pi^0 = |1, 0\rangle$ (m ~ 135 MeV), $\pi^- = |1, -1\rangle$

I $\Lambda = 0$ (1 solo stato di carica) $\Lambda = |0, 0\rangle$ (m ~ 1115 MeV), così pure $\Omega^- = |0, 0\rangle$ (m ~ 1672 MeV)

I $\Delta = 3/2$ (4 stati di carica) (m ~ 1230 MeV): $\Delta^{++} = |3/2, 3/2\rangle$, $\Delta^+ = |3/2, 1/2\rangle$, $\Delta^0 = |3/2, -1/2\rangle$, $\Delta^- = |3/2, -3/2\rangle$,

La 3^a componente dell'isospin è determinata dalla carica elettrica: formula di Gell-Man Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(A + S) \longrightarrow \text{Con } S = \text{stranezza, } A = \text{numero barionico} \\ \text{Y} = \text{ipercarica forte}$$

Ogni interazione che conserva Q, A e I, I_3 conserva anche Y e S, ex.

p:	$I_3 = 1/2$,	A=1	S=0	Q=1	E' una scelta naturale assunto per i primi
n:	$I_3 = -1/2$,	A=1	S=0	Q=0	2 quark un doppietto:
Λ :	$I_3 = 0$,	A=1	S=-1	Q=0	u=[1/2, 1/2], d=[1/2, -1/2]
Δ^{++} :	$I_3 = 3/2$,	A=1	S=0	Q=2	e un singoletto per il terzo: s=[0, 0]

Ma l'isospin ha anche implicazioni dinamiche, ex

$$1) \text{ Combiniamo 2 nucleoni: } I=1 \left\{ \begin{array}{l} |1, 1\rangle = pp \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |pn + np\rangle \\ |1, -1\rangle = nn \end{array} \right. \quad I=0 \left\{ \begin{array}{l} |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |pn - np\rangle \end{array} \right.$$

L'unico stato legato di 2 nucleoni è il **deutone: d(pn)** è un **singoletto** o un **tripletto**?

Nel potenziale di interazione mi aspetto un termine di interazione tra isospin del tipo: $\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2$

$$\text{dato } \vec{I}_{tot} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \text{ e } |\vec{I}_{tot}|^2 = |\vec{I}_1|^2 + |\vec{I}_2|^2 + 2(\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2)$$

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2 = \frac{1}{4} \text{ per il tripletto } (|\vec{I}_{tot}| = 1)$$

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2 = -\frac{3}{4} \text{ per il singoletto } (|\vec{I}_{tot}| = 0) \text{ potenziale attrattivo !}$$

Ex. 2

$$a) pp(|1,1\rangle) \rightarrow d + \pi^+ (|1,1\rangle)$$

$$b) pn(|1,0\rangle) \rightarrow d + \pi^0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + |0,0\rangle) \right)$$

$$c) nn(|1,-1\rangle) \rightarrow d + \pi^- (|1,-1\rangle)$$

Interazioni forti con $I_d=0$

Ma nelle interazioni forti si conservano sia I che I_3 quindi le ampiezze M devono essere:

$$M_a : M_b : M_c = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \quad \text{E le sezioni d'urto: } \sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2$$

Verificato sperimentalmente (a) e b) misurate in laboratorio)

Ex 3) Scattering pione nucleone: $\pi N \rightarrow \pi N$;

$$a) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \quad b) \pi^0 p \rightarrow \pi^0 p$$

Elastici:

$$c) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \quad d) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n$$

$$e) \pi^0 n \rightarrow \pi^0 n \quad f) \pi^- n \rightarrow \pi^- n$$

Scambio carica

$$g) \pi^+ n \rightarrow \pi^0 p \quad h) \pi^0 p \rightarrow \pi^+ n$$

$$i) \pi^0 n \rightarrow \pi^- p \quad j) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n$$

L'isospin totale πN è $3/2$ o $1/2$ rispettivamente con ampiezze M_3 e M_1

$$\pi^+ p : |1,1\rangle |1/2, 1/2\rangle = 1 |3/2, 3/2\rangle$$

$$\pi^0 p : |1,0\rangle |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{2/3} |3/2, 1/2\rangle - 1/\sqrt{3} |1/2, 1/2\rangle$$

$$\pi^- p : |1,-1\rangle |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{1/3} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{2/3} |1/2, -1/2\rangle$$

$$\pi^+ n : |1,1\rangle |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{1/3} |3/2, 1/2\rangle - \sqrt{2/3} |1/2, 1/2\rangle$$

$$\pi^0 n : |1,0\rangle |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{2/3} |3/2, -1/2\rangle + 1/\sqrt{3} |1/2, -1/2\rangle$$

$$\pi^- n : |1,-1\rangle |1/2, -1/2\rangle = 1 |3/2, -3/2\rangle$$

La a) e la f) sono pure $I=3/2$: $M_a=M_f=M_3$

La b): $M_b=2/3 M_3+1/3 M_1$

La c): $M_c=1/3 M_3 + 2/3 M_1$

La d) $M_d=1/3 M_3+2/3 M_1$

⋮

La j): $M_j=\sqrt{2/3} M_3 - \sqrt{2/3} M_1$

⋮

Quindi le sezioni d'urto saranno:

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9|M_3|^2 : |M_3 + 2M_1|^2 : 2|M_3 - M_1|^2$$

M_3 e M_1 si possono estrarre dallo scattering risonante πN all'energia c.m. $E=1232$ MeV:
Risonanza Δ di $I=3/2$; a questa energia $M_3 \gg M_1$ e vale:

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$$

Sommando i processi c) e j) (elastico + scambio carica) e ancora trascurando M_1

$$\frac{\sigma_T(\pi^+ p)}{\sigma_T(\pi^- p)} = 3 \quad \underline{\text{Verificato sperimentalmente}}$$

La simmetria di isospin degli adroni sottointende la simmetria di isospin dei costituenti quark:

I quark hanno tutti la stessa interazione forte!

In effetti la differenza di massa tra $p(uud)$ e $n(udd)$ e $\pi^+(u\bar{d})$, $\pi^-(\bar{u}d)$ e $\pi^0(u\bar{u}-d\bar{d})$ è solo qualche %.

Ci sono altri barioni a spin $1/2$: (8 barioni): Λ Σ Ξ (uds, uus, uss)

Con massa simile: 940 - 1320 MeV.

Appartengono a supermultipletti di gruppi più grandi?: $SU(3) \supset SU(2)$ (quark u, d, s)

Con gli altri quark: $SU(4)$ (c), $SU(5)$ (b), $SU(6)$ (t)....

Ma mentre $SU(2)$ è una buona simmetria, quelle di dimensioni maggiori sono sempre peggiori: massa dei quark?

Il numero barionico

Stuckelberg 1938: perchè **non esiste** $p \rightarrow e^+ \gamma$?

Regola di selezione: associamo ai fermioni con $m \geq m_p$ una qualità chiamata **numero barionico che si conserva nelle interazioni. Ex.**

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ Ai barioni è associato un numero barionico +1
agli antibarioni -1

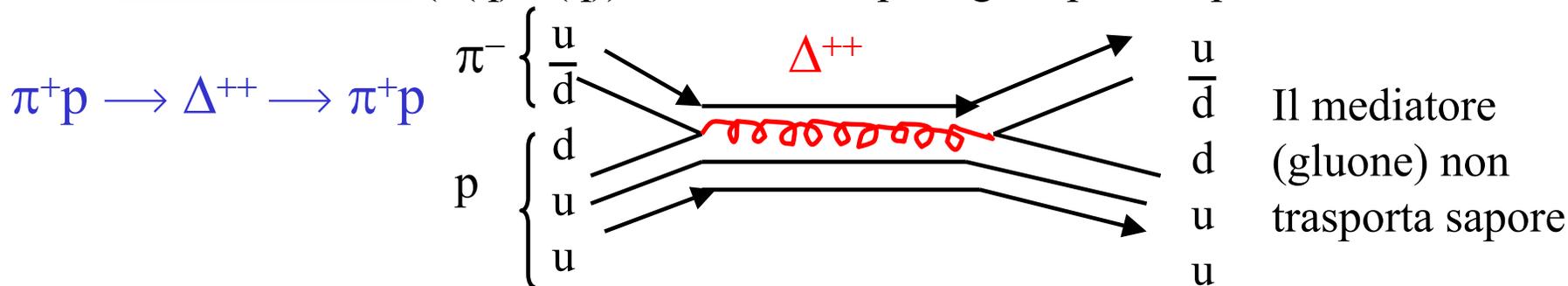
$pp \rightarrow pp + p\bar{p}$

N.B. $\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) > 10^{34}$ anni

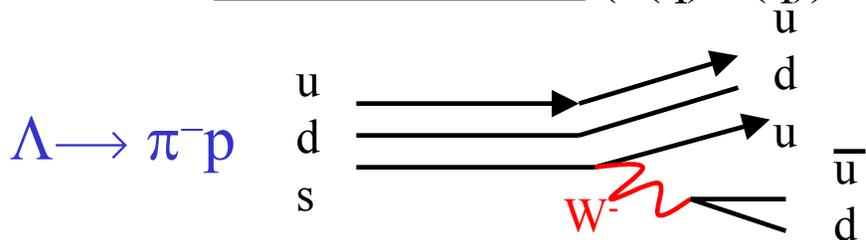
Il numero barionico è assegnato anche ai quark: 1/3, -1/3

$\Lambda \rightarrow p \pi^-$

Nelle interazioni forti ($n(q) - n(\bar{q})$) è conservato per ogni tipo di sapore, ex:



Nelle interazioni deboli ($n(q) - n(\bar{q})$) è conservato solo globalmente: ex:



La simmetria di isospin forte degli adroni riflette quella dei costituenti:

i quark u e d sono indistinguibili per la QCD (doppietto), gli altri: s,c,b,t sono singoletti.

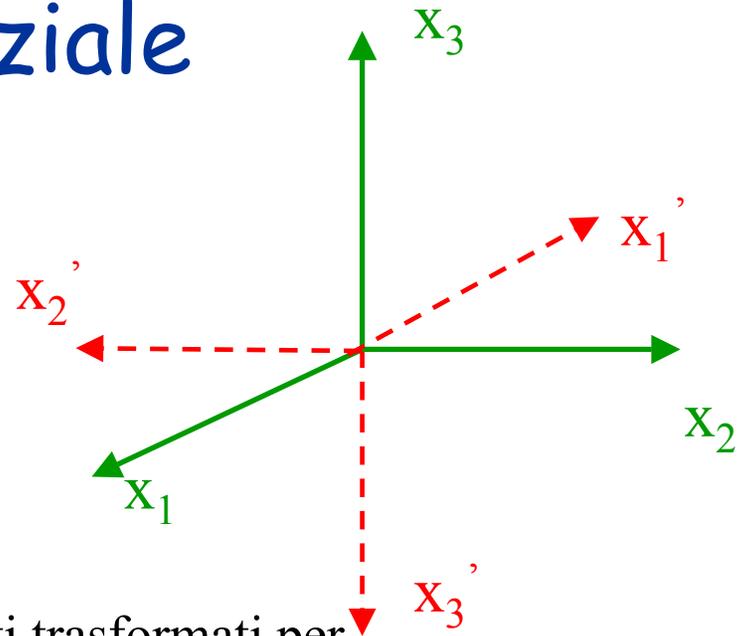
Parità spaziale

Operatore inversione spaziale: **P**:

$$P(x_0, \vec{x}) = (x_0, \vec{x}') = (x_0, -\vec{x})$$

left-handed \leftrightarrow *right-handed*

P equivale a una rotazione di 180° attorno a un asse e a un' inversione speculare (discreta)



Principio di invarianza: se α' e β' sono gli stati trasformati per P dagli stati α e β e ω è la probabilità di transizione tra i due stati vale:

$$\omega(\alpha, \beta) = \omega(\alpha', \beta')$$

Se in un'interazione lo stato fisico iniziale e finale hanno la stessa parità (gli autovalori sono +1 o -1 essendo P unitario), l'hamiltoniana dell'interazione H commuta con P:

$[H, P] = 0$ (ottengo lo stesso stato fisico misurando l'energia e poi invertendo gli assi o viceversa $\implies H$ è uno scalare ex:

$$\vec{L} \cdot \vec{\sigma} (\text{spin-orbita}), \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 (\text{spin-spin}), \frac{[3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})]}{r^2} - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\text{forza tensoriale})$$

Ex. Scattering pione nucleo:

$$\vec{p}_\pi \quad \vec{\sigma}_p \uparrow \quad \vec{p}'_\pi \quad \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}'_\pi; (\vec{p}_\pi \times \vec{p}'_\pi) \cdot \vec{\sigma}_p$$

Parità singola particella

Ex. 1: il fotone. La corrente $\mathbf{J}^\mu = (\rho, \vec{j}) \rightarrow (\rho, -\vec{j})$ ($\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$)

se vogliamo che anche l'interazione $\mathbf{J}_\mu \mathbf{A}^\mu$ sia invariante per P allora $\mathbf{A}^\mu = (A_0, \vec{A})$ dovrà trasformarsi come:

$$A_0(-\vec{x}) = A_0(\vec{x})$$

$$\vec{A}(-\vec{x}) = -\vec{A}(\vec{x})$$

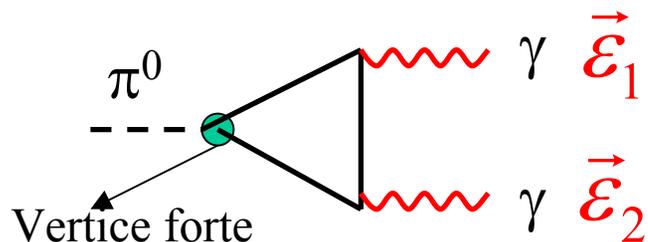
$$\vec{E}(-\vec{x}) = -\vec{\nabla} A_0(-\vec{x}) + \frac{\partial(\vec{A}(-\vec{x}))}{\partial t} = -\vec{E}(\vec{x}) \text{ vettore polare;}$$

$$\vec{B}(-\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(-\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) \text{ vettore assiale}$$

Definiamo $\vec{A} = \vec{\varepsilon} \cdot f(x)$, $\vec{\varepsilon} \xrightarrow{P} -\vec{\varepsilon}$ (parità del fotone negativa)

La parità del campo è definita dalla parità del vettore polarizzazione

Ex. 2: il π^0



$$\tau \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$\vec{J} = 0$$

La funzione d'onda dei due fotoni nello stato finale si deve trasformare con $\vec{J} = 0$, deve essere simmetrica nello scambio dei due fotoni e lineare nelle due polarizzazioni ϵ_1, ϵ_2 . Ci sono due possibilità (dalla conservazione di P e di \vec{J}):

$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2$ con parità $P = +1$

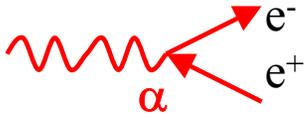
Se P è conservata:

$(\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2) \cdot \vec{k}$ con parità $P = -1$ (\vec{k} vettore impulso relativo $\gamma_1 \gamma_2$) **$P(\pi^0) = P(\gamma\gamma) = +1$ o -1**

N.B. Confronta con gli invarianti del campo elettromagnetico:

$$F_{ik} F^{ik} = (\vec{B}^2 - \vec{E}^2); \quad \epsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = (\vec{E} \cdot \vec{B}) \quad \text{con} \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

Sperimentalmente ci aspettiamo che se la parità è -1 le due polarizzazioni $\epsilon_1 \epsilon_2$ sono perpendicolari nel sistema in cui il π^0 è a riposo (difficile perchè $E_\gamma \approx 70$ MeV)

Si studia la conversione interna: $\pi^0 \rightarrow e^+e^- e^+e^-$:  (probabilità $\sim 1/30000$ QED)

Esperimento in camera a bolle $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ (Plano et al. Phys. Rev. Lett. 3, 525 (1959))

Dopo i tagli sopravvivono 64 eventi.

Si sfrutta la correlazione tra la polarizzazione dei fotoni e il piano di decadimento della coppia e^+e^-

B=5500 G

nota l'ambiguità
dell'accoppiamento
 e^+e^- , ma l'angolo tra le
coppie è piccolo $\theta \sim 10^0$

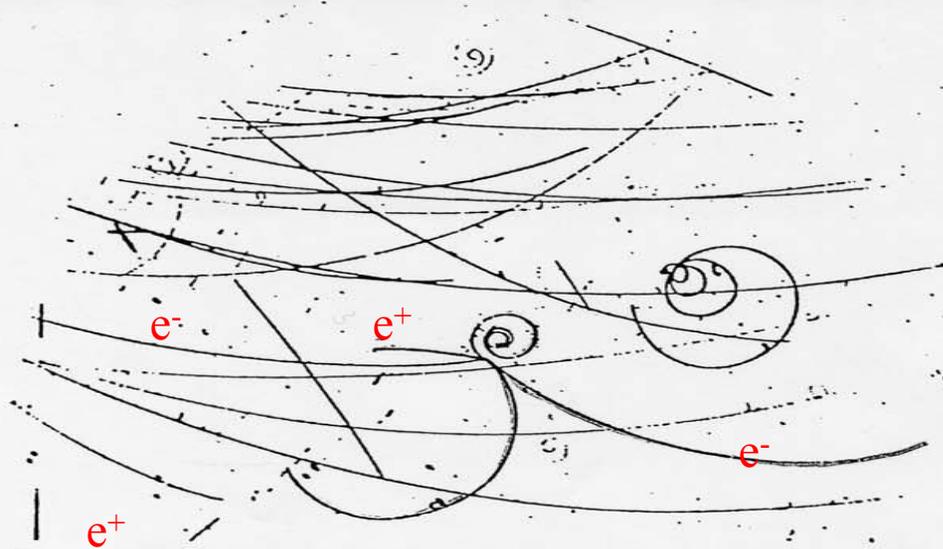


FIG. 1. A photograph of a typical double internal conversion.

$$1 + \alpha \cos 2\phi$$

Probabilità di misurare due piani di decadimento
ad un angolo Φ (teorica):

$$E_s = 1 + \alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot \cos(2\phi)$$

$$E_{ps} = 1 - \alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot \cos(2\phi)$$

con x_1, y_1, x_2, y_2

che dipendono dalla cinematica del decadimento

Il segno di α determina la parità'

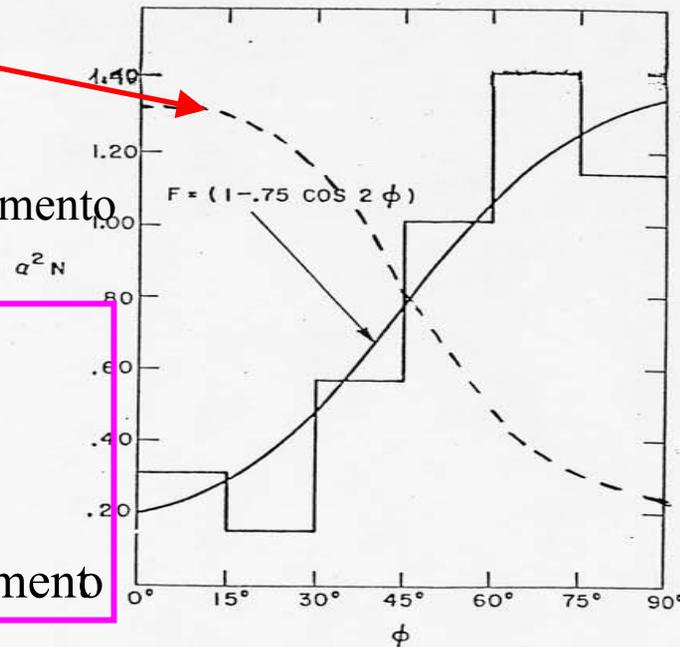


FIG. 2. Plot of weighted frequency distribution of angle between planes of polarization.

Parità intrinseca

Nel caso del fotone il comportamento del vettore polarizzazione $\vec{\varepsilon}$ determina la parità; questo è estensibile a ogni particella $|a, \vec{p}\rangle$:

$$\hat{P}|a, \vec{p}\rangle = \eta|a, \vec{p}\rangle, \text{ con } \eta = \text{parità intrinseca}$$

Ma η può essere definita in maniera assoluta (riferita al vuoto che viene assunto con $\eta=1$) solo per i bosoni. Infatti:

$$\hat{P}'(n) = \hat{P}(n) + n \cdot 2\pi \text{ se } |a, \vec{p}\rangle \text{ è autostato di } \hat{P} \text{ (con autovalori } \pm 1)$$

$$\text{Per i bosoni} \quad \hat{P}'(n) |a, \vec{p}\rangle = \eta |a, \vec{p}\rangle$$

$$\text{Per i fermioni} \quad \hat{P}'(n) |a, \vec{p}\rangle = \eta (-1)^n |a, \vec{p}\rangle$$

La funzione d'onda per i fermioni è soluzione dell'equazione di Dirac (spinore) e cambia segno a ogni rotazione di 2π . Per i fermioni è solo definibile una parità relativa f/\bar{f} . Dirac:

La parità relativa $f/\bar{f} = -1$

$$\text{Fermioni: } \hat{P}(f/\bar{f}) = -(-1)^l \text{ (} l \text{ è il momento angolare orbitale)}$$

$$\text{Bosoni } \hat{P}(f/\bar{f}) = (-1)^l$$

Exp: parità relativa e^+e^- (C.S. Wu, Phys. Rev 77, 136 (1949))

Stato 1S_0 del positronio , stato legato e^+e^- che decade in due fotoni (vita media $\sim 10^{-10}$ s)

Due funzioni d'onda possibili per i due fotoni:

$$\varphi(\gamma\gamma) = a(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2) \quad \text{scalare}$$

$$\varphi(\gamma\gamma) = b(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \vec{k} \quad \text{pseudoscalare}$$

Si distinguono attraverso una misura della polarizzazione relativa

Si sfrutta lo scattering Compton dei fotoni: la direzione del fotone dopo lo scattering dipende fortemente dalla sua polarizzazione, tende a essere perpendicolare (cfr radiazione di dipolo \perp al campo elettrico incidente che stabilisce anche la direzione di oscillazione del dipolo).

Il positronio viene creato con un flusso di e^+ da una sorgente $\text{Cu}^{64} \rightarrow \text{Ni}^{64} + e^+$ (vita media circa 12 ore).

Cristalli di antracene con 7/8 % efficienza

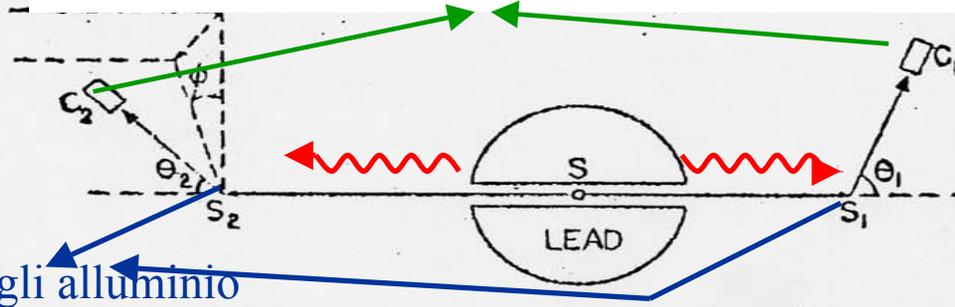
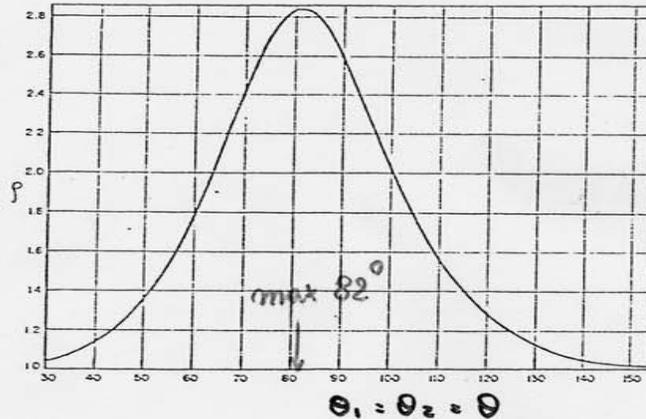


FIG. 1. Schematic diagram of experimental arrangement

asimmetria :

$$\rho = \frac{\text{Rate}(\Delta\phi = 90^\circ)}{\text{Rate}(\Delta\phi = 0^\circ)}$$

FIG. 2. Asymmetry of coincidence counting rate, ρ , for ideal geometry, as a function of the scattering angle θ .



$$\rho_{teoria} \text{ (pseudoscalare)} = 1 + \frac{2 \sin^4 \vartheta}{\gamma^2 - 2\gamma \sin^2 \vartheta}, \gamma = 2 - \cos \vartheta + \frac{1}{2 - \cos \vartheta}$$

Asimmetria misurata $\rho = 2.04 \pm 0.08$, teorica = 2.0

Conclusione: i due fotoni sono emessi preferenzialmente ortogonalmente ($\Delta\phi=90^\circ$)

$\Rightarrow f(\gamma_1, \gamma_2)$ è pseudoscalare \Rightarrow se la parità è conservata nel decadimento

\Rightarrow la parità del sistema (e^+e^-) (fermione/antifermione) è negativa

Conservazione della parità?

θ, τ puzzle: due particelle con la stessa massa, ma diversi modi di decadimento:

$$\text{a) } \theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0, \quad \text{b) } \tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$$

Spin = 0, $l=0$: la parità del θ vale: $\eta_\theta = \eta(\pi^0) \eta(\pi^+) (-1)^0 = +1$

Nel caso del τ definiamo:

$$\vec{l} = \text{momento angolare } \pi^+ \pi^+, \quad \vec{L} = \text{momento angolare } \pi^- (\pi^+ \pi^+)$$

$$\text{Spin} = 0 \Rightarrow \vec{l} + \vec{L} = 0 \Rightarrow l = L \Rightarrow \eta_\tau = (-1)^3 (-1)^{l+L} = -1$$

Se la parità è conservata nel decadimento, θ e τ hanno parità opposta

Vero anche per particelle di spin $\neq 0$ (Dalitz) ($\theta^+ = K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0, \tau^+ = K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$).

Lee & Yang (Phys Rev. 104, 254 (1956)): analisi dei dati sperimentali:

Le interazioni forti e elettromagnetiche conservano la parità

**Per le interazioni deboli (decadimento β e di alcune particelle instabili)
la conservazione della parità era solo un'estrapolazione.**

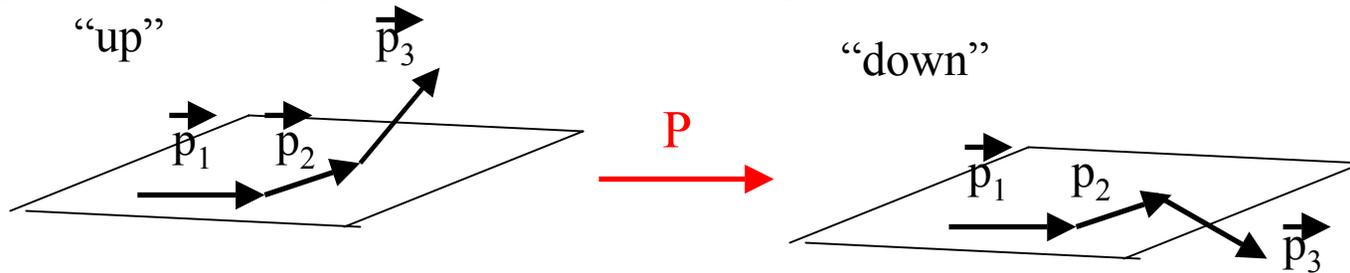
Metodi per la verifica della conservazione della parità

1) Se il valore di aspettazione di quantità pseudoscalari è $\neq 0$, la parità è violata

ex. 1)

$$(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3, \vec{J} \cdot \vec{p}$$

Doppio scattering di protoni su targhetta non polarizzata:

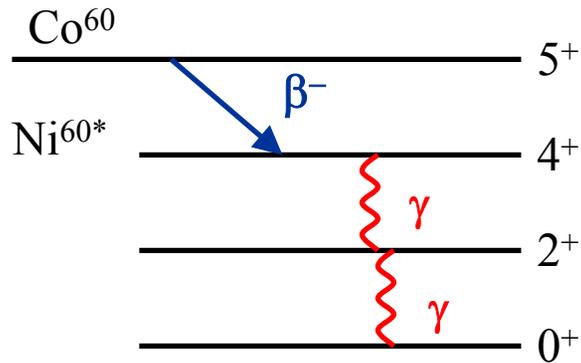


Per i decadimenti "up": $(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 > 0$
 Per i decadimenti "down": $(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 < 0$
 se $\langle (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 \rangle \neq 0 \Rightarrow$ *asimmetria "up" - "down"*
 \Rightarrow *violazione della parità*

Argomento analogo per il processo $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0 \rightarrow K^0 \pi^- p$ ($\pi^0 n$)

- 2) $\langle \vec{J} \cdot \vec{p} \rangle \neq 0$ -Il sistema genitore polarizzato e la distribuzione delle particelle dipende
- da $\cos\theta$ ($\sin\theta$), $\cos^3\theta$, ... (θ angolo rispetto alla polarizzazione \mathbf{J})
 - Genitore non polarizzato, elicità dei decadimenti: $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \rangle \neq 0$

Esperimento di tipo 2) (C.S.Wu et al., Phys.Rev. 105, 1413 (1957))



Decadimento beta del tipo $\Delta J=1$ (Gamow-Teller)

$$E_{\beta} < 0.316 \text{ MeV}$$

$$E_{\gamma 1} = 1.17 \text{ MeV}$$

$$E_{\gamma 2} = 1.33 \text{ MeV}$$

Rispetto alla direzione di polarizzazione dei nuclei la parità è conservata se la distribuzione angolare è pari in $\cos\theta$ (θ angolo del β^- rispetto alla polarizzazione del Cobalto) i.e.:

$$W(\theta) = A + B \cos^2 \theta + C \cos^4 \theta + \dots$$

Il campione di Co viene raffreddato a 0.01 K e orientato per mezzo del campo magnetico di un solenoide. Mano a mano che il campione di Co si riscalda il suo grado di polarizzazione è misurato dalla asimmetria di produzione dei 2 fotoni:

$$\alpha(\theta) = \frac{W_{\gamma}(\theta = \pi/2) - W_{\gamma}(\theta = 0)}{W_{\gamma}(\theta = \pi/2)}$$

Risultati:

$$W_e(\theta) = 1 + \alpha \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{\vec{p}_e \cdot \langle \vec{J}_{Co} \rangle}{J_{Co} p_e}$$

$$\alpha = -0.4 \approx \frac{v_e}{c}$$

α negativo: gli elettroni sono emessi prevalentemente opposti a \vec{J}

L'esperimento di M.me Wu

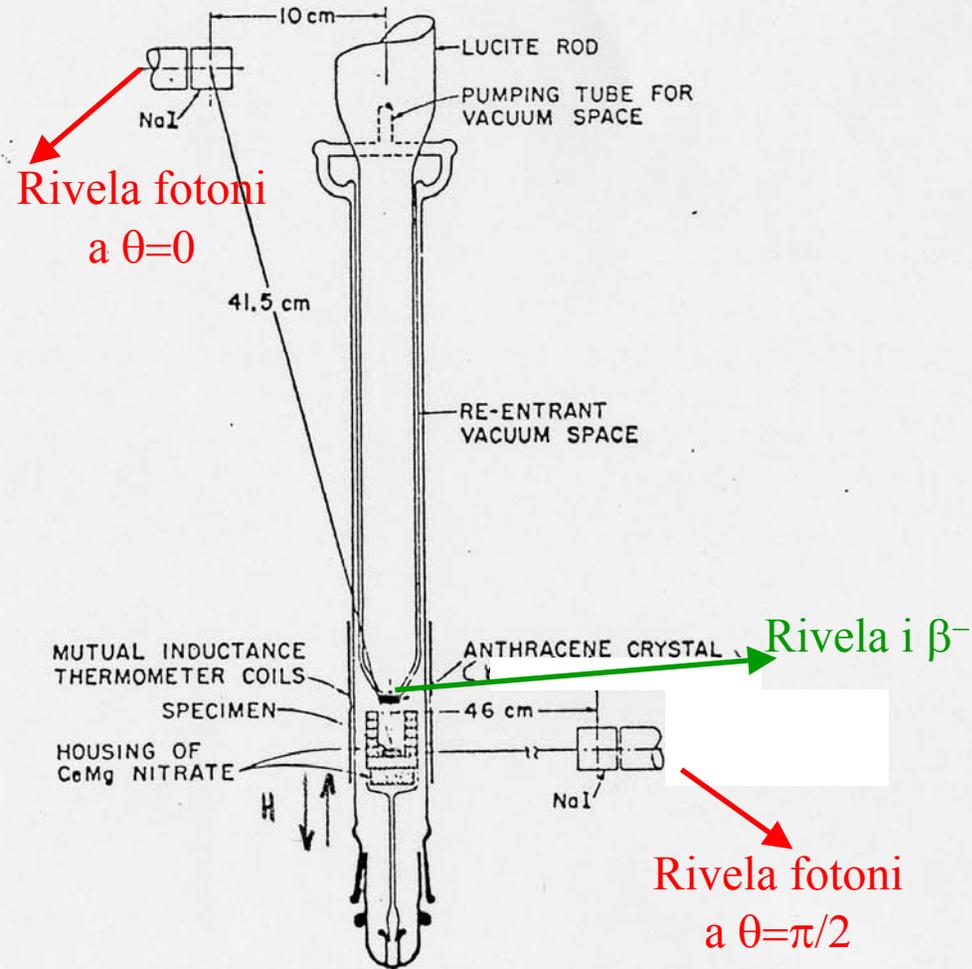


FIG. 1. Schematic drawing of the lower part of the cryostat.

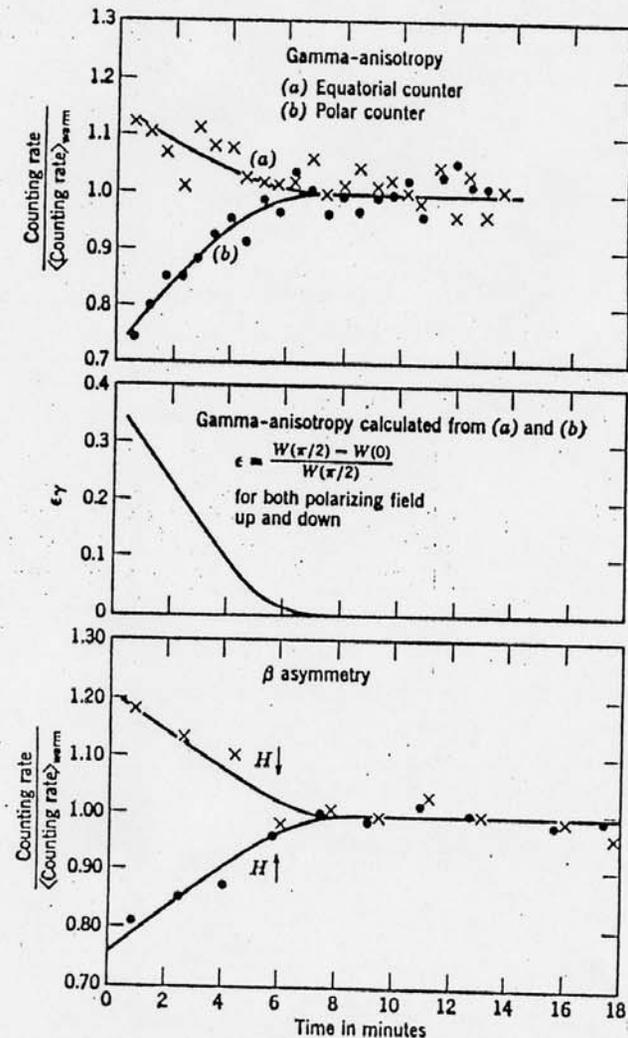
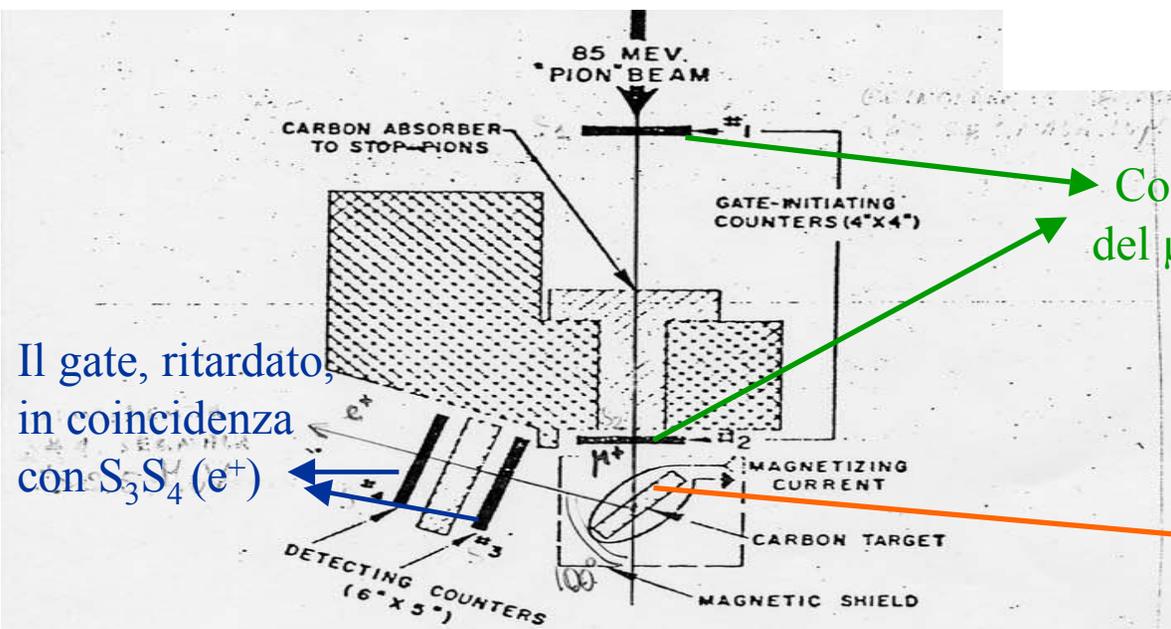


Fig. 31.1. γ -anisotropy and β -anisotropy as a function of time. The warming-up of the sample of Co^{60} leads to a depolarization in approximately 5 minutes. [From Wu *et al.*, *Phys. Rev.* 105, 1413 (1957).]



Il gate, ritardato, in coincidenza con S_3S_4 (e^+)

Coincidenza S_1S_2 segnala il passaggio del μ e apre una finestra temporale (gate) di $1.5 \mu s$

Il μ si ferma nella targhetta di carbonio, si assume che conservi la sua polarizzazione

FIG. 1. Experimental arrangement. The magnetizing coil was close wound directly on the carbon to provide a uniform vertical field of 79 gauss per ampere.

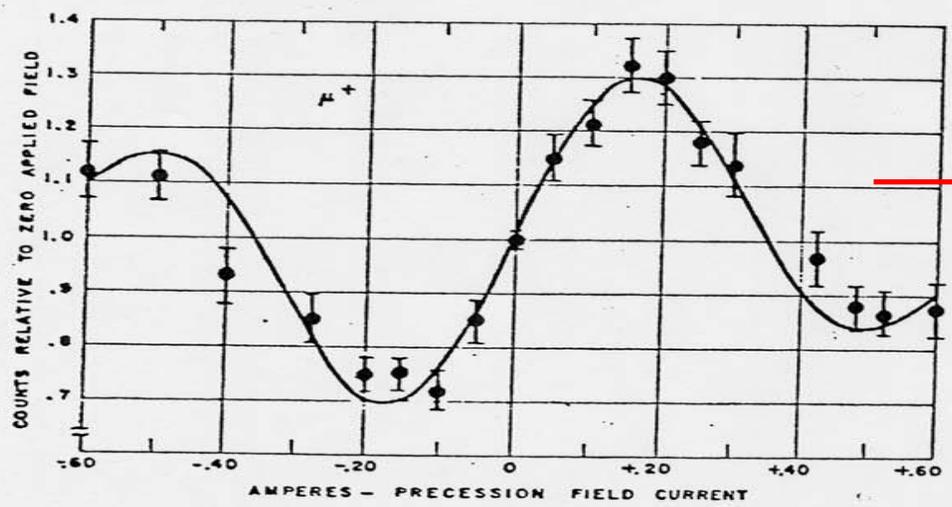


FIG. 2. Variation of gated 3-4 counting rate with magnetizing current. The solid curve is computed from an assumed electron angular distribution $1 - \frac{1}{3} \cos^2 \theta$, with counter and gate-width resolution folded in.

Si studia la distribuzione dei positroni rispetto alla direzione della polarizzazione (spin) del μ
 $\sim (1 + \alpha \cos \theta)$

Verifiche sperimentali:

- Riduzione dello spessore assorbitore (i pioni finiscono nella targhetta dei muoni), il rate
- aumenta di un fattore 10 e non dipende più dalla corrente (da H) infatti $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ è **isotropo**;
- Il rivelatore di positroni è posizionato a $\theta=65^\circ \Rightarrow$ la curva trasla di una fase che corrisponde
- a un angolo di precessione di $\sim 37^\circ$ (100-65).

Risultati:

- 1) Esiste un'asimmetria nella distribuzione di e^+ ($1+\alpha\cos\theta$) \Rightarrow **il μ è polarizzato, $\alpha=-1/3$**
- 2) La parità in entrambi i decadimenti **non si conserva.**
- 3) $g=2 \pm 0.1$
- 4) Spin del $\mu = 1/2$
- 5) L'asimmetria nella distribuzione dei positroni non dipende dall'energia.

Ex. **Decadimento non leptonic**

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 + K^0, \quad \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \quad \Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0; \tau \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

se $(\vec{p}_{\pi, in} \times \vec{p}_{\Lambda}) \cdot \vec{p}_{\pi, out} \neq 0 \Rightarrow$ asimmetria rispetto al

piano definito da $\vec{p}_{\pi, in}, \vec{p}_{\Lambda} \Rightarrow$ violazione della parità

Esperimento effettuato nel laboratorio di Brookhaven (USA) con π^- di energia 0.88-1.4 GeV:

Eventi “up” : 325 (± 18) ; Eventi “down” : 215 (± 15)

In altre parole: la direzione del π^- , quella della Λ e la direzione preferenziale di decadimento formano una terna di assi (right-handed) riconoscibile (assoluta).

Coniugazione di carica

La meccanica quantistica relativistica prevede che a una particella corrisponda un'antiparticella con la stessa massa e spin (Dirac 1931: esistenza dei positroni e^+).

L'operatore coniugazione di carica C cambia il segno della carica elettrica e del momento magnetico di una particella, per i leptoni e barioni cambia anche il segno del numero barionico e leptonico.

Classicamente le equazioni di Maxwell sono invarianti per C .

Ex.
$$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle, C|e^-\rangle = |e^+\rangle, C|p\rangle = |\bar{p}\rangle$$

Gli autostati di C sono le particelle veramente neutre: $\gamma, \pi^0, \eta^0, \rho^0, \phi^0, (e^+e^-), (\bar{p}p), \dots$
con $C(\psi) = \pm \psi$

N.B. Ci sono particelle neutre che non sono autostati di C ex: n, atomo di idrogeno.
Infatti $C|n\rangle = |\bar{n}\rangle \neq |n\rangle$.

C inverte tutti i numeri quantici eccetto l'impulso e lo spin:

$$C|Q, I_3, B, Y, L, \vec{p}, \vec{s}\rangle = |-Q, -I_3, -B, -Y, -L, \vec{p}, \vec{s}\rangle$$

Quindi solo gli stati con $Q=I_3=B=L=0$ possono essere autostati dell'operatore parità di carica C

Le interazioni forti e elettromagnetiche sono invarianti sotto C (dato sperimentale).

Ex. nella reazione forte: $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \dots, p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^- + \dots$

il numero e le distribuzioni di particelle finali positive e negative sono eguali (entro 1%).

Ex. nel decadimento elettromagnetico: $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma, \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

Si studiano gli spettri di energia dei pioni positivi e negativi: sono eguali entro l'errore

Le interazioni deboli non sono invarianti per C.

Ex 1) $\nu: \overset{s}{\leftarrow} \vec{p} \xrightarrow{C} \bar{\nu}: \overset{s}{\leftarrow} \vec{p}$ **Ma l'antineutrino sinistrorso non esiste in natura!**

Devo fare CP $|\nu\rangle = |\bar{\nu}\rangle$ per avere **l'antineutrino fisico destrorso**

Ex 2) $K_{0L} \rightarrow \frac{e^+ \pi^- \nu}{e^- \pi^+ \bar{\nu}} = 1.00648 \pm 0.00035$

Ex. 3) L'universo consiste di materia e non di antimateria: violazione di C nella sua evoluzione? Asimmetria iniziale?

Coniugazione di carica particella/antiparticella

Coppie particella antiparticella sono veramente neutre: $(\pi^+\pi^-), (K^+K^-), (K^0, \bar{K}^0), (p\bar{p}), (\pi^0\pi^0)$

a) Coppie di bosoni distinguibili: $(\pi^+\pi^-), (K^+K^-), \dots$

C ha lo stesso effetto dello scambio delle coordinate:

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1, x_2, s_2, Q_2) \xrightarrow{C} \eta_c \Phi(x_2, s_2, Q_1, x_1, s_1, Q_2)$$

$x_1 \Leftrightarrow x_2$ $(-1)^l$ Parte orbitale (equivalente a inversione spaziale)

$(-1)^S$ Proprietà dei coefficienti CG per addizione di 2 spin interi con S come risultato.

$$\Rightarrow \eta_c = (-1)^{l+S}$$

b) Coppie di bosoni indistinguibili: $(\pi^0\pi^0), (\rho^0\rho^0), \dots$

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1, x_2, s_2, Q_2) \xrightarrow{C} \eta_c \Phi(x_2, s_2, Q_1, x_1, s_1, Q_2)$$

Funzione d'onda simmetrica $\Rightarrow \eta_c = +1$ ma vale ancora: $\eta_c = (-1)^{l+S} : (-1)^{l+S} = 1$.

c) Coppie di fermioni distinguibili: $(e^+e^-), (p\bar{p}), (q\bar{q}), \dots$

Parte orbitale $(-1)^l$, parte di spin $(-1)^{S+1}$ (caratteristiche coefficienti CG)

+ parità relativa fermione/antifermione. In totale:

$$\underline{\eta_c = (-1)^l (-1)^{S+1} (-1) = (-1)^{l+S}}$$

La parità di carica del sistema (se autostato) prima e dopo l'interazione è la stessa.

Parità di carica del fotone

$J^\mu A_\mu$ è invariante ma $C(J_\mu) = -J_\mu \Rightarrow C(A_\mu) = -A_\mu \Rightarrow \varepsilon_\mu \xrightarrow{C} -\varepsilon_\mu$

Quindi: $C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \Rightarrow C|n\gamma\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle$

Se C è conservato nella interazione o nel decadimento porta a regole di selezione:

Pseudo scalari $\left\{ \begin{array}{l} \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma, \quad \pi^0 \not\rightarrow \gamma\gamma, \quad C(\pi^0) = (-1)^2 = +1 \\ \eta^0 \rightarrow \gamma\gamma, \quad \eta^0 \not\rightarrow \gamma\gamma, \quad C(\eta^0) = (-1)^2 = +1 \end{array} \right\} \quad I=S=0$

Vettoriali $\left\{ \begin{array}{l} \rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \quad \rho^0 \not\rightarrow \eta^0\pi^0, \quad \rho^0 \not\rightarrow \pi^0\pi^0, \quad C(\rho^0) = -1 (\eta_C = (-1)^{l+S}) \\ \omega^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \quad \omega^0 \not\rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 \quad C(\omega^0) = -1 \end{array} \right.$

ω^0 ha I-spin=0 quindi $I(\pi^+\pi^-)$ o $I(\pi^0\pi^0)$ e $I(\pi^0)=1$ ma per la simmetria sotto C, I-spin è come lo spin ordinario: $\eta_C=(-1)^l$ quindi $C(\omega^0)=(-1)^l C(\pi^0) = -1 \cdot 1 = -1$, ma la funzione d'onda è anche antisimmetrica per lo scambio $\pi^0\pi^0$ con $I=1$, ma globalmente $\pi^0\pi^0$ deve essere simmetrico

$$\Rightarrow l(\pi^0\pi^0) = 1, C(\pi^0\pi^0) = (-1)^l (-1)^l = +1 \text{ e } C(\omega^0) = (+1)^{\pi^0\pi^0} \cdot (+1)^{\pi^0}$$

Nel caso invece di $\pi^+\pi^-\pi^0$, $l(\pi^+\pi^-)$ può essere anche 0

$$\phi^0 \rightarrow K^+ K^- \quad C(\phi^0) = -1$$

Permesse: $\omega^0 \rightarrow \pi^0 \gamma, \quad \omega^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-, \quad \rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$

Vietate: $\omega^0 \rightarrow \rho^0 \gamma, \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma, \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-, \quad \phi \rightarrow \omega^0 \gamma$

N.B. $\rho, \omega, \phi, J/\psi, \gamma$ si possono ottenere da $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow$ (interazione elettrom.) e quindi hanno C, P del fotone.

Parità G

Le interazioni forti conservano C e non dipendono da I_3 . Definiamo:

$$G = C \cdot \exp[i\pi(I_2)] \quad \text{ruota } I_3 \rightarrow -I_3$$

Applichiamo G alla funzione ψ di un sistema neutro:

$$G|\psi\rangle = (-1)^{l+S+I} |\psi\rangle \quad (\eta_C = (-1)^{l+S} (-1)^I)$$

Ma G si applica anche ai sistemi carichi:

$$G|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle \quad \text{e} \quad G|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\pm\rangle, \text{ per } n \text{ pioni l'autovalore è } G = (-1)^n$$

Ne segue la regola di selezione che una particella che decade forte in 2 pioni non può decadere in tre, ex. $\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ ma non $\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ($G(\omega^0) = -1$).

Coniugazione di carica nelle interazioni deboli

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu & \xrightarrow{C} & \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \\
 \mu^+ : \vec{p} \xleftarrow{s} & \nu : \vec{p} \xrightarrow{s} & \xrightarrow{C} & \mu^- : \vec{p} \xleftarrow{s} & \bar{\nu} : \vec{p} \xrightarrow{s}
 \end{array}$$

C non agisce sullo spazio tempo, ma cio' implica un antineutrino con elicit  negativa !

$$\begin{array}{l}
 DIS : \nu_\mu n \rightarrow \mu^- p \quad \xrightarrow{C} \quad \bar{\nu}_\mu \bar{n} \rightarrow \mu^+ \bar{p} \\
 \mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \quad \xrightarrow{C} \quad \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu
 \end{array}$$

Ancora v LH!
 $e^+ e^- e \nu e \bar{\nu}$
 avrebbero la stessa elicit !

La presenza nell'hamiltoniana debole di termini con γ_5 e senza γ_5 rende impossibile l'invarianza per C: teoria (V-A): $\gamma_\mu(1-\gamma_5)$.

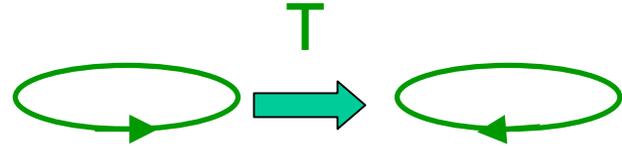
$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^t; C^{-1} \gamma_5 C = \gamma_5^t$$

\Rightarrow termini $\gamma_\mu \gamma_5$ cambiano segno sotto C (come pure sotto P)

L'invarianza   ripristinata con l'operatore combinato **CP**

Inversione temporale T

Def: $[t, \vec{x}] \xrightarrow{T} [-t, \vec{x}]: \vec{p} \rightarrow -\vec{p}; E \rightarrow E$
 $\vec{M} \rightarrow -\vec{M}; \vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$



Combinazioni che cambiano segno sotto T: $\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2), \text{ex. } K^+ \rightarrow \pi^0 \mu^+ \nu$ ($\vec{\sigma}_\mu \cdot (\vec{p}_\pi \times \vec{p}_K)$)

e combinazioni che non cambiano segno: $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}; \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$

In elettrodinamica: le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\rho \xrightarrow{T} \rho$$

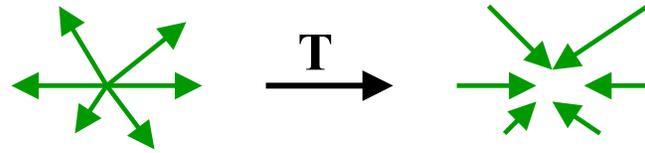
$$\vec{j} \xrightarrow{T} -\vec{j}$$

Restano invarianti se:

$$T(\vec{E}(t)) = \vec{E}(-t)$$

$$T(\vec{B}(t)) = -\vec{B}(-t)$$

Il vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} \xrightarrow{T} -\vec{S}$:



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow T(\phi) = \phi(-t), T(\vec{A}) = -\vec{A}(-t) \Rightarrow T^2(A_\mu) = A_\mu$$

Il fotone è autostato di T^2 con autovalore +1

Se esistesse un monopolo magnetico ci sarebbero una carica e una corrente magnetiche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_M$$

$$\rho_M \xrightarrow{T} \rho_M$$

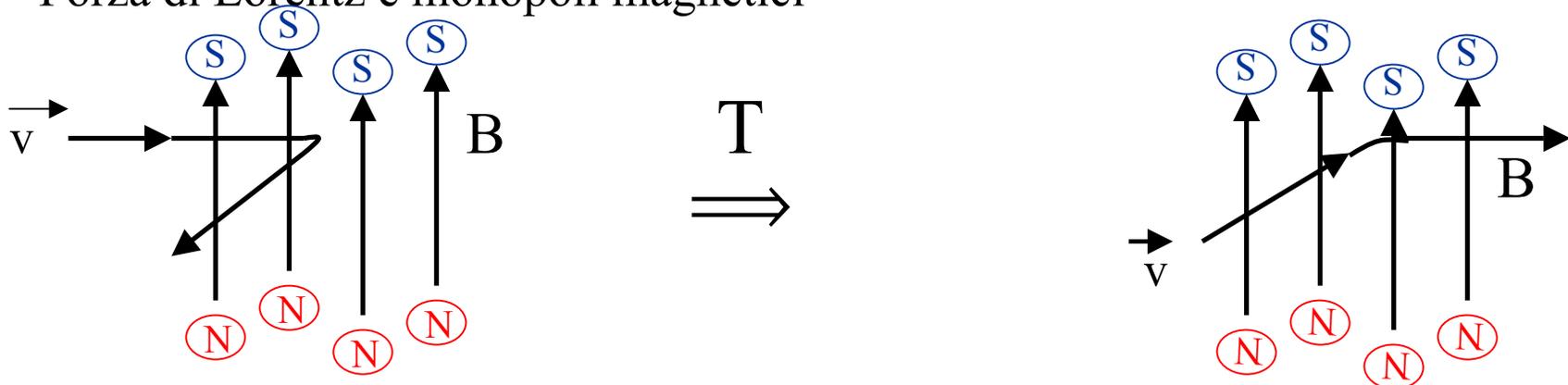
Le equazioni di Maxwell sarebbero simmetriche nei campi e correnti

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_M$$

$$\vec{j}_M \xrightarrow{T} -\vec{j}_M$$

ma non sarebbero invarianti sotto T

Forza di Lorentz e monopoli magnetici



Invarianza per T violata nel moto della particella

Test dell'invarianza per T

Bilancio dettagliato: ①+② → ③+④ **stesso elemento di matrice →, ←**
 ←

Esempio nelle **interazioni forti**:



Test accurato a $5 \cdot 10^{-4}$



Polarizzazione trasversa al piano definito dagli impulsi delle due particelle finali:

Interazioni deboli:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}_e \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_\mu \rangle \cdot (\vec{p}_e \times \vec{p}_\nu)$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_n \rangle \cdot (\vec{p}_e \times \vec{p}_{\bar{\nu}})$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_\mu \rangle \cdot (\vec{p}_\pi \times \vec{p}_\nu)$$

Interazioni el.m.: $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + e^+ + e^- \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_\Lambda \rangle \cdot (\vec{p}_\Lambda \times \vec{p}_q)$ con $\vec{q} = \vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-}$

Nessun risultato positivo a livello 10^{-3} - 10^{-4}

Momento di dipolo elettrico e invarianza per T

Euristicamente: le sole quantità vettoriali associate a una **particella elementare** sono:
l'impulso \vec{p} e lo spin \vec{s}

Per una particella a riposo ho un dipolo elettrico: $\vec{d}_e = d_e \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$

Il dipolo elettrico in un campo elettrico esterno ha un'energia H:

$$H = -\vec{d}_e \cdot \vec{E} = -d_e \frac{\vec{s} \cdot \vec{E}}{|\vec{s}|} \quad \text{per } T : \vec{E} \xrightarrow{T} \vec{E}; \vec{d}_e \xrightarrow{T} -\vec{d}_e (\text{spin}) \Rightarrow$$

Violazione di T e della parità

N.B. Devono essere particelle elementari: gli atomi e le molecole possono avere momento di dipolo elettrico.

\Rightarrow Tutte le particelle elementari con spin $\neq 0$ devono avere dipolo elettrico nullo

Limiti sperimentali: $d_e \begin{cases} < 0.6 \cdot 10^{-25} \text{ e cm (neutrone)} \\ = 0.07 \pm 0.07 \cdot 10^{-26} \text{ e cm (elettrone)} \\ = -4 \pm 6 \cdot 10^{-23} \text{ e cm (protone)} \end{cases}$

Se il neutrone fosse grande come la terra il limite corrisponde a due cariche elettriche elementari di segno opposto al suo centro separate di 1 μ .

CPT (PTC, TCP, ...)

Particella → antiparticella
Destra → sinistra
Passato → futuro

$$\text{CPT} \equiv \Theta$$

Teorema CPT (T.D. Lee: “Particle physics, an introduction to field theory”)

Ogni densità lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, invariante di Lorentz e che soddisfi le prescrizioni di spin-statistica, si trasforma come:

$$\Theta \mathcal{L}(x) \Theta^{-1} = \mathcal{L}^\dagger(-x)$$

Ma in ogni teoria quantistica $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger \implies$ l'azione $\int \mathcal{L} d^4x$ è invariante per CPT

Conseguenze:

$$m(p) = m(\bar{p}) : \text{test } \frac{m(e^+) - m(e^-)}{m(e^+) + m(e^-)} < 4 \cdot 10^{-8}, \frac{m(K_0) - m(\bar{K}_0)}{m(K_0) + m(\bar{K}_0)} < 10^{-19}$$

$$\tau(p) = \tau(\bar{p}) : \frac{\tau(\mu^+)}{\tau(\mu^-)} = 1.00002 \pm 0.00008$$

$$\sigma(pp) = \sigma(\bar{p}\bar{p})$$

momento magnetico particella = -momento magnetico antiparticella :

$$(\mu(e^+) - \mu(e^-)) / (\mu(e^+) + \mu(e^-)) = -(1 \pm 4) \cdot 10^{-12}$$

Se uno o due dei tre operatori è violato (ex CP)
anche il terzo lo deve essere (ex. T)

Bibliografia

- **D.Perkins**, “Introduction to high energy physics”, Cambridge University Press, 1999;
- **D.Griffith**,”Introduction to elementary particles” Harper & Row, Publisher, New York, 1987;
- **Q.Ho-Kim and P.Xuan Yem**, “Elementary Particles and their interactions”, Springer Verlag, 1998.