

SIMMETRIE

Emmy Noether (1917):

A ogni simmetria corrisponde una legge di conservazione o di selezione. Simmetria? L'assunzione fisica che certe quantità non sono osservabili implica un'invarianza del sistema sotto la trasformazione matematica ad essa collegata.

<u>Non osservabile</u>	<u>Trasformazione di simmetria</u>	<u>Legge di conserv. o selezione</u>
Diff. tra particelle eguali	Permutazione	Statistica di BE o FD
Posizione spaz. assoluta	Traslazione spaziale	Impulso
Tempo assoluto	Traslazione temporale	Energia
Direzione spaz. assoluta	Rotazione	Momento angolare
	Simmetrie discrete (TT=I)	
Destra (sinistra) assolute	Inversione spaziale	Parità spaziale: P
Carica elettrica assoluta	$e \rightarrow -e$	Inversione di carica: C
Direzione temp. assoluta	$t \rightarrow -t$	Inversione temporale: T

In aggiunta alle simmetrie dello spazio-tempo ci sono anche le **simmetrie interne**, ex.

-Invarianza di gauge (QED, U(1)) \Leftrightarrow conservazione della carica elettrica

-Invarianza di gauge (Interazioni deboli, SU(2)) \Leftrightarrow Conservazione dell'isospin debole

-Invarianza di gauge (Interazioni forti QCD, SU(3)) \Leftrightarrow Conservazione del colore

Teorema di Noether

Data la Lagrangiana scalare di Lorentz funzione dei campi ϕ_i e delle sue derivate, $\partial_\mu \phi_i$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

Teorema di Noether (1915): per ogni invarianza dell'azione sotto una trasformazione continua dei campi esiste:

-Una corrente conservata J_μ : $\partial_\mu J^\mu = 0$

-Una carica classica Q , indipendente dal tempo: $Q = \int_V d^3x \cdot J^0(t, \vec{x}), \dot{Q} = 0$

$$\text{ex. } \phi_i(x) \rightarrow \phi_i'(x) \equiv e^{-iq_i \mathcal{G}} \phi_i(x)$$

\mathcal{G} = numero reale

q_i = carica elettrica



Conservazione carica elettrica
Equazione di continuità:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

L'insieme delle operazioni di simmetria su un sistema deve soddisfare le proprietà:

- 1) **Chiusura:** se R_i e R_j sono nell'insieme, lo è anche $R_i R_j$;
 - 2) **Identità:** c'è un elemento I tale che $I R_i = R_i I = R_i$;
 - 3) **Inverso:** qualunque R_i esiste R_i^{-1} tale che $R_i R_i^{-1} = I$;
 - 4) **Associatività:** $R_i (R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$
- SONO
UN GRUPPO**

In generale $R_i R_j \neq R_j R_i$, se $R_i R_j = R_j R_i$ il gruppo è detto abeliano (ex. Le traslazioni spaziali sono abeliane, le rotazioni no.)

Sono gruppi: $U(1)$ (moltiplicazione per una fase), le trasformazioni di Lorentz, vedremo $SU(2)$, $SU(3)$...

Ciascun gruppo può essere rappresentato da un gruppo di matrici:

Per ciascun elemento a c'è una matrice M_a e tale che se

$$a b = c \quad \text{allora} \quad M_a M_b = M_c$$

Se ci sono più elementi del gruppo rappresentati dalla stessa matrice si dice omomorfo. Non necessariamente isomorfo. I gruppi possono essere rappresentati da matrici in differenti dimensioni ex. $SU(2)$ ha rappresentazioni in 1, 2 (fondamentale), 3, 4 dimensioni.

Simmetrie di sapore (interne)

Osserviamo che $m_p = 938.28 \text{ MeV} \sim m_n (939.57 \text{ MeV})$.

Heisenberg (1932): sono due stati di una singola particella: **il nucleone**:
“spegnendo” la carica elettrica p e n diventerebbero indistinguibili:

Le forze sperimentate dal protone sono le stesse di quelle del neutrone.

Organizzazione formale in un doppietto $N \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

p e n sono due stati dell'isospin forte I , $I=1/2$: $p=|1/2, 1/2\rangle$, $n=|1/2, -1/2\rangle$

Le interazioni forti di p e n e delle loro combinazioni lineari sono invarianti per rotazioni nello spazio dell'isospin I . L'insieme di queste rotazioni costituisce il gruppo $SU(2)$: gruppo di matrici 2×2 Unitarie e a determinante $=1$. Stessa algebra dello spin ordinario $1/2$.

NOETHER: l'isospin I si conserva in tutte le interazioni forti:

dati $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_f\rangle$, l'ampiezza di scattering vale: $\langle \psi_f | S | \psi_i \rangle$ e

$$\left[\hat{S}, \hat{I} \right] = 0 \Rightarrow \Delta |I|^2 = 0, \Delta I_3 = 0$$

Esempi

I $\pi = 1$ (tre possibili stati di carica): $\pi^+ = |1, 1\rangle$ (m~140 MeV), $\pi^0 = |1, 0\rangle$ (m~135 MeV), $\pi^- = |1, -1\rangle$

I $\Lambda = 0$ (1 solo stato di carica) $\Lambda = |0, 0\rangle$ (m~1115 MeV), così pure $\Omega^- = |0, 0\rangle$ (m~1672 MeV)

I $\Delta = 3/2$ (4 stati di carica) (m~1230 MeV): $\Delta^{++} = |3/2, 3/2\rangle$, $\Delta^+ = |3/2, 1/2\rangle$, $\Delta^0 = |3/2, -1/2\rangle$, $\Delta^- = |3/2, -3/2\rangle$,

La 3^a componente dell'isospin è determinata dalla carica elettrica: formula di Gell-Mann Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(A + S) \longrightarrow Y = \text{ipercarica forte}$$

Con S=stranezza, A numero barionico

Il numero di componenti del multipletto di I e' dato da I, l'ipercarica Y serve a determinare la carica elettrica di ciascun membro del multipletto.

Ogni interazione che conserva Q, A e I, I_3 conserva anche Y e S, ex.

p: $I_3 = 1/2$, A=1 S=0 Q=1 E' una scelta naturale assunto per i primi

n: $I_3 = -1/2$, A=1 S=0 Q=0 2 quark un doppietto:

Λ : $I_3 = 0$, A=1 S=-1 Q=0 u=[1/2, 1/2], d=[1/2, -1/2]

Δ^{++} : $I_3 = 3/2$, A=1 S=0 Q=2 e un singoletto per il terzo: s=[0, 0]

Ma l'isospin ha anche implicazioni dinamiche, ex

$$1) \text{ Combiniamo 2 nucleoni: } I=1 \left\{ \begin{array}{l} |1, 1\rangle = pp \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |pn + np\rangle \\ |1, -1\rangle = nn \end{array} \right. \quad I=0 \left\{ \begin{array}{l} |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |pn - np\rangle \end{array} \right.$$

L'unico stato legato di 2 nucleoni è il **deutone: d(pn)** è un **singoletto** o un **tripletto**?

Nel potenziale di interazione mi aspetto un termine di interazione tra isospin del tipo: $\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2$

$$\text{dato } \vec{I}_{tot} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \text{ e } |\vec{I}_{tot}|^2 = |\vec{I}_1|^2 + |\vec{I}_2|^2 + 2(\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2)$$

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2 = \frac{1}{4} \text{ per il tripletto } (|\vec{I}_{tot}| = 1)$$

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2 = -\frac{3}{4} \text{ per il singoletto } (|\vec{I}_{tot}| = 0) \text{ potenziale attrattivo !}$$

Ex. 2

$$a) pp(|1,1\rangle) \rightarrow d + \pi^+ (|1,1\rangle)$$

$$b) pn(|1,0\rangle) \rightarrow d + \pi^0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + |0,0\rangle) \right)$$

$$c) nn(|1,-1\rangle) \rightarrow d + \pi^- (|1,-1\rangle)$$

Interazioni forti con $I_d=0$

Ma nelle interazioni forti si conservano I che I_3 quindi le ampiezze M devono essere:

$$M_a : M_b : M_c = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \quad \text{E le sezioni d'urto: } \sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2$$

Verificato sperimentalmente (a) e b) misurate in laboratorio)

Ex 3) Scattering pione nucleone: $\pi N \rightarrow \pi N$;

$$a) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \quad b) \pi^0 p \rightarrow \pi^0 p$$

Elastici:

$$c) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \quad d) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n$$

$$e) \pi^0 n \rightarrow \pi^0 n \quad f) \pi^- n \rightarrow \pi^- n$$

Scambio carica

$$g) \pi^+ n \rightarrow \pi^0 p \quad h) \pi^0 p \rightarrow \pi^+ n$$

$$i) \pi^0 n \rightarrow \pi^- p \quad j) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n$$

L'isospin totale πN è $3/2$ o $1/2$ rispettivamente con ampiezze M_3 e M_1

$$\pi^+ p : |1,1\rangle |1/2, 1/2\rangle = |3/2, 3/2\rangle$$

$$\pi^0 p : |1,0\rangle |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{2/3} |3/2, 1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2, 1/2\rangle$$

$$\pi^- p : |1,-1\rangle |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{1/3} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{2/3} |1/2, -1/2\rangle$$

$$\pi^+ n : |1,1\rangle |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{1/3} |3/2, 1/2\rangle - \sqrt{2/3} |1/2, 1/2\rangle$$

$$\pi^0 n : |1,0\rangle |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{2/3} |3/2, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1/2, -1/2\rangle$$

$$\pi^- n : |1,-1\rangle |1/2, -1/2\rangle = |3/2, -3/2\rangle$$

La a) e la f) sono pure $I=3/2$: $M_a=M_f=M_3$

La b): $M_b=2/3 M_3+1/3 M_1$

La c): $M_c=1/3 M_3 + 2/3 M_1$

La d) $M_d=1/3 M_3+2/3 M_1$

⋮

La j): $M_j=\sqrt{2/3} M_3 - \sqrt{2/3} M_1$

⋮

Quindi le sezioni d'urto saranno:

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9|M_3|^2 : |M_3 + 2M_1|^2 : 2|M_3 - M_1|^2$$

M_3 e M_1 si possono estrarre dallo scattering risonante πN all'energia c.m. $E=1232$ MeV:
Risonanza Δ di $I=3/2$; a questa energia $M_3 \gg M_1$ e vale:

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$$

Sommando i processi c) e j) (elastico + scambio carica) e ancora trascurando M_1

$$\frac{\sigma_T(\pi^+ p)}{\sigma_T(\pi^- p)} = 3 \quad \underline{\text{Verificato sperimentalmente}}$$

La simmetria di isospin degli adroni sottointende la simmetria di isospin dei costituenti quark:

I quark hanno tutti la stessa interazione forte!

In effetti la differenza di massa tra $p(uud)$ e $n(udd)$ e $\pi^+(\bar{u}d)$, $\pi^-(u\bar{d})$ e $\pi^0(\bar{u}u - \bar{d}d)$ è solo qualche % (intensità relativa dell'accoppiamento elm, α , rispetto a quello forte).

Ci sono altri barioni a spin $1/2$: (8 barioni): Λ Σ Ξ (uds , uus , uss)

Con massa simile: tra 940 e 1320 MeV.

Appartengono a supermultipletti di gruppi più grandi?: $SU(3) \supset SU(2)$ (quark u, d, s)

Con gli altri quark: $SU(4)$ (c), $SU(5)$ (b), $SU(6)$ (t)....

Ma mentre $SU(2)$ è una buona simmetria, quelle di dimensioni maggiori sono sempre peggiori: massa dei quark?

Il numero barionico

Stuckelberg 1938: perchè **non esiste** $p \rightarrow e^+ \gamma$?

Regola di selezione: associamo ai fermioni con $m \geq m_p$ una qualità chiamata **numero barionico che si conserva nelle interazioni (generalizzazione della del numero di massa atomica)**. Ex.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Ai barioni è associato un numero barionico +1
agli antibarioni -1

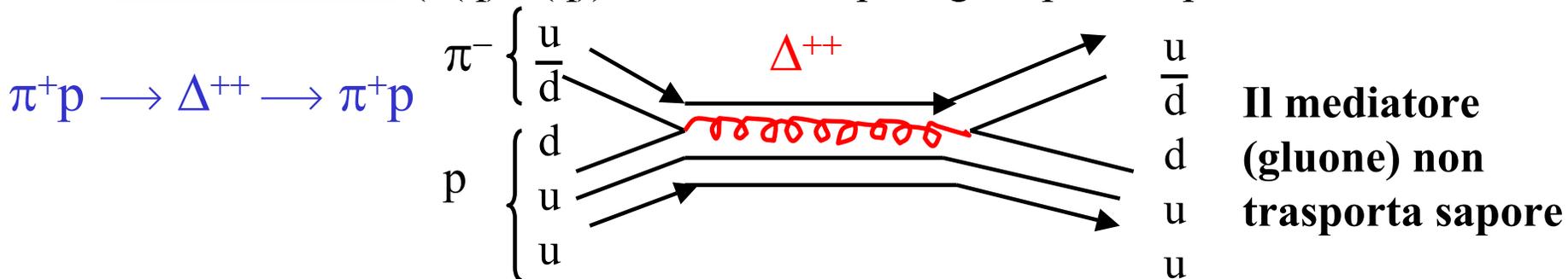
$$pp \rightarrow pp + p\bar{p}$$

N.B. $\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) > 10^{34}$ anni

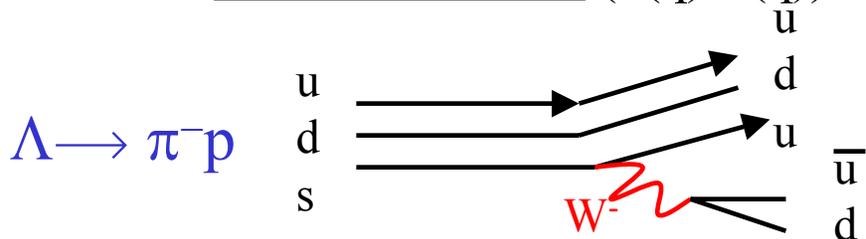
$$\Lambda \rightarrow p \pi^-$$

Il numero barionico è assegnato anche
ai quark: 1/3, -1/3

Nelle interazioni forti ($n(q) - n(\bar{q})$) è conservato per ogni tipo di sapore, ex:



Nelle interazioni deboli ($n(q) - n(\bar{q})$) è conservato solo globalmente: ex:



La simmetria di isospin forte degli adroni riflette quella dei costituenti:

i quark u e d sono indistinguibili per la QCD (doppietto), gli altri: s,c,b,t sono singoletti.

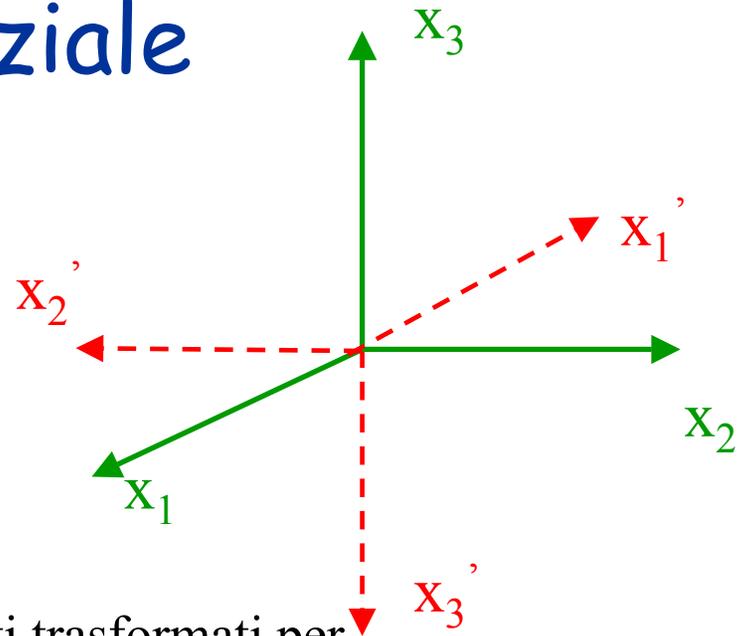
Parità spaziale

Operatore inversione spaziale: **P**:

$$P(x_0, \vec{x}) = (x_0, \vec{x}') = (x_0, -\vec{x})$$

left-handed \leftrightarrow *right-handed*

P equivale a una rotazione di 180° attorno a un asse e a un' inversione speculare (discreta)



Principio di invarianza: se α' e β' sono gli stati trasformati per P dagli stati α e β e ω è la probabilità di transizione tra i due stati vale:

$$\omega(\alpha, \beta) = \omega(\alpha', \beta')$$

Se in un'interazione lo stato fisico iniziale e finale hanno la stessa parità (gli autovalori sono +1 o -1 essendo P unitario), l'hamiltoniana dell'interazione H commuta con P:

$[H, P] = 0$ (ottengo lo stesso stato fisico misurando l'energia e poi invertendo gli assi o viceversa)

\implies **H è uno scalare ex:** *l'impulso \vec{p} cambia segno con P, un momento angolare $\vec{L}, \vec{\sigma}$, no*

$$\vec{L} \cdot \vec{\sigma} (\text{spin-orbita}), \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 (\text{spin-spin}), \frac{[3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})]}{r^2} - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\text{forza tensoriale})$$

Ex. Scattering pione nucleo:

$$\vec{p}_\pi \quad \vec{\sigma}_p \uparrow \quad \vec{p}'_\pi \quad \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}'_\pi; (\vec{p}_\pi \times \vec{p}'_\pi) \cdot \vec{\sigma}_p$$

Parità singola particella

Ex. 1: il fotone. La corrente $\mathbf{J}^\mu = (\rho, \vec{j}) \rightarrow (\rho, -\vec{j})$ ($\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$)

se vogliamo che anche l'interazione $\mathbf{J}_\mu \mathbf{A}^\mu$ sia invariante per P allora $\mathbf{A}^\mu = (A_0, \vec{A})$ dovrà trasformarsi come:

$$A_0(-\vec{x}) = A_0(\vec{x})$$

$$\vec{A}(-\vec{x}) = -\vec{A}(\vec{x})$$

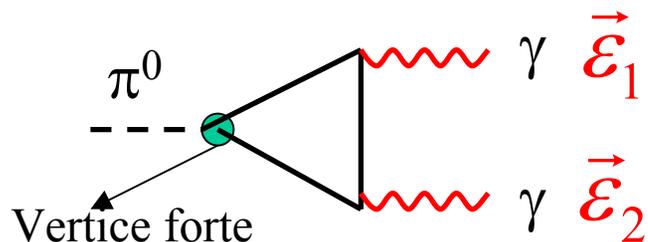
$$\vec{E}(-\vec{x}) = -\vec{\nabla} A_0(-\vec{x}) + \frac{\partial(\vec{A}(-\vec{x}))}{\partial t} = -\vec{E}(\vec{x}) \text{ vettore polare;}$$

$$\vec{B}(-\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(-\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) \text{ vettore assiale}$$

Definiamo $\vec{A} = \vec{\varepsilon} \cdot f(x)$, $\vec{\varepsilon} \xrightarrow{P} -\vec{\varepsilon}$ (parità del fotone negativa)

La parità del campo è definita dalla parità del vettore polarizzazione

Ex. 2: il π^0



$$\tau \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$\vec{J} = 0$$

La funzione d'onda dei due fotoni nello stato finale si deve trasformare con $\vec{J} = 0$, deve essere simmetrica nello scambio dei due fotoni e lineare nelle due polarizzazioni ϵ_1, ϵ_2 . Ci sono due possibilità (dalla conservazione di P e di J):

$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2$ (prop. a $\cos^2 \phi$) con parità P = +1

$(\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2) \cdot \vec{k}$ (prop. a $\sin^2 \phi$) con parità P = -1

(\vec{k} vettore impulso relativo $\gamma_1 \gamma_2$, e ϕ angolo tra le polarizzazioni)

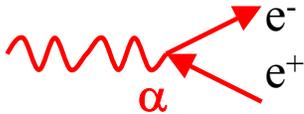
Se P è conservata:

P(π^0) = P($\gamma\gamma$) = +1 o -1

N.B. Confronta con gli invarianti del campo elettromagnetico:

$$F_{ik} F^{ik} = (\vec{B}^2 - \vec{E}^2); \quad \epsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = (\vec{E} \cdot \vec{B}) \quad \text{con} \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

Sperimentalmente ci aspettiamo che se la parità è -1 le due polarizzazioni $\epsilon_1 \epsilon_2$ sono perpendicolari nel sistema in cui il π^0 è a riposo (difficile perchè $E_\gamma \approx 70$ MeV)

Si studia la conversione interna: $\pi^0 \rightarrow e^+e^- e^+e^-$:  (probabilità $\sim 1/30000$ QED)

Esperimento in camera a bolle $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ (Plano et al. Phys. Rev. Lett. 3, 525 (1959))

Dopo i tagli sopravvivono 64 eventi.

Si sfrutta la correlazione tra la polarizzazione dei fotoni e il piano di decadimento della coppia e^+e^-

B=5500 G

nota l'ambiguità dell'accoppiamento e^+e^- , ma l'angolo tra le coppie è piccolo $\theta \sim 10^0$

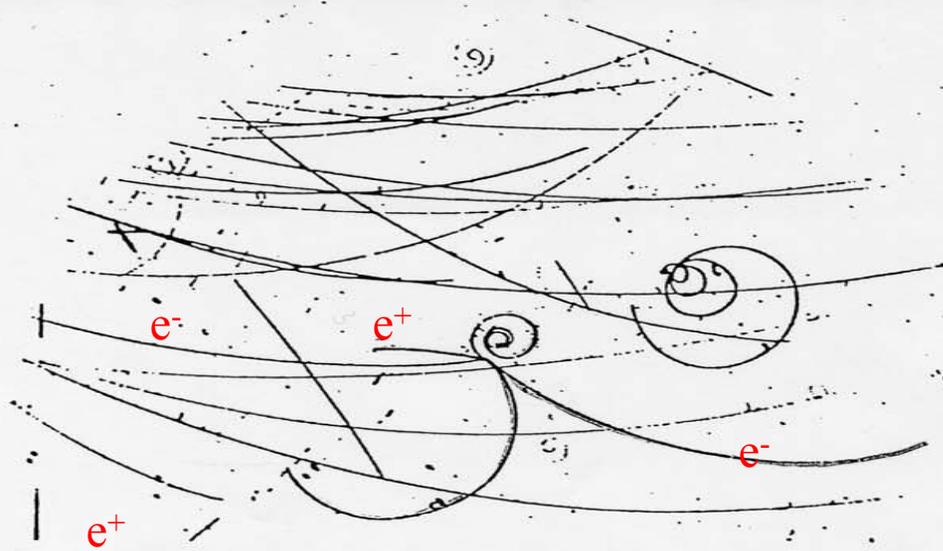


FIG. 1. A photograph of a typical double internal conversion.

$$1 + \alpha \cos 2\phi$$

Probabilità di misurare due piani di decadimento ad un angolo Φ (teorica):

$$E_s = 1 + \alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot \cos(2\phi)$$

$$E_{ps} = 1 - \alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot \cos(2\phi)$$

con x_1, y_1, x_2, y_2

che dipendono dalla cinematica del decadimento

Il segno di α determina la parità'

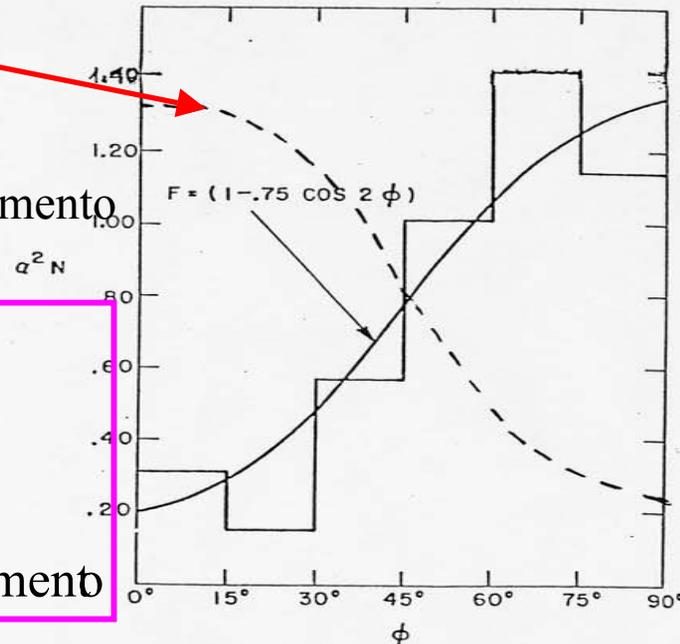


FIG. 2. Plot of weighted frequency distribution of angle between planes of polarization.

Parità intrinseca

Nel caso del fotone il comportamento del vettore polarizzazione $\vec{\varepsilon}$ determina la parità; questo è estensibile a ogni particella $|a, \vec{p}\rangle$:

$$\hat{P}|a, \vec{p}\rangle = \eta|a, \vec{p}\rangle, \text{ con } \eta = \text{parità intrinseca}$$

Ma η può essere definita in maniera assoluta (riferita al vuoto che viene assunto con $\eta=1$) solo per i bosoni. Infatti:

$$\hat{P}'(n) = \hat{P}(n) + n \cdot 2\pi \text{ se } |a, \vec{p}\rangle \text{ è autostato di } \hat{P} \text{ (con autovalori } \pm 1)$$

$$\text{Per i bosoni} \quad \hat{P}'(n) |a, \vec{p}\rangle = \eta |a, \vec{p}\rangle$$

$$\text{Per i fermioni} \quad \hat{P}'(n) |a, \vec{p}\rangle = \eta (-1)^n |a, \vec{p}\rangle$$

La funzione d'onda per i fermioni è soluzione dell'equazione di Dirac (spinore) e cambia segno a ogni rotazione di 2π . Per i fermioni è solo definibile una parità relativa f/\bar{f} . Dirac:

La parità relativa $\bar{f}/f = -1$

$$\text{Fermioni: } \hat{P}(f / \bar{f}) = -(-1)^l \text{ (} l \text{ è il momento angolare orbitale)}$$

$$\text{Bosoni } \hat{P}(f / \bar{f}) = (-1)^l$$

Exp: parità relativa e^+e^- (C.S. Wu, Phys. Rev. 77, 136 (1949))

Stato 1S_0 del positronio, stato legato e^+e^- che decade in due fotoni (vita media $\sim 10^{-10}$ s)

Due funzioni d'onda possibili per i due fotoni:

$$\varphi(\gamma\gamma) = a(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2) \quad \text{scalare}$$

$$\varphi(\gamma\gamma) = b(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \vec{k} \quad \text{pseudoscalare}$$

Si distinguono attraverso una misura della polarizzazione relativa

Si sfrutta lo scattering Compton dei fotoni: la direzione del fotone dopo lo scattering dipende fortemente dalla sua polarizzazione, tende a essere perpendicolare (cfr radiazione di dipolo \perp al campo elettrico incidente che stabilisce anche la direzione di oscillazione del dipolo).

Il positronio viene creato con un flusso di e^+ da una sorgente $\text{Cu}^{64} \rightarrow \text{Ni}^{64} + e^+$ (vita media circa 12 ore).

Cristalli di antracene con 7/8 % efficienza

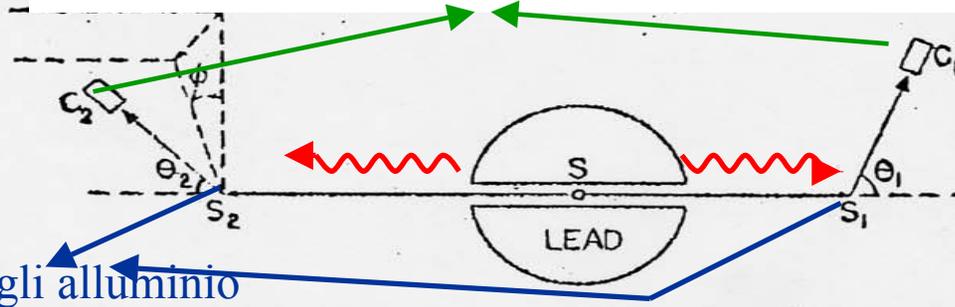
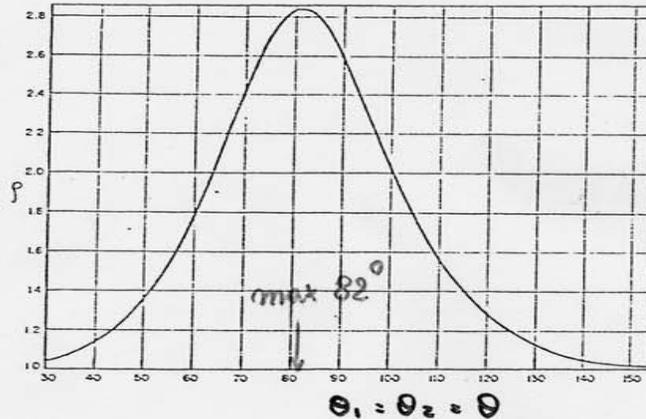


FIG. 1. Schematic diagram of experimental arrangement

asimmetria :

$$\rho = \frac{\text{Rate}(\Delta\phi = 90^\circ)}{\text{Rate}(\Delta\phi = 0^\circ)}$$

FIG. 2. Asymmetry of coincidence counting rate, ρ , for ideal geometry, as a function of the scattering angle θ .



$$\rho_{teoria} (\text{pseudoscalare}) = 1 + \frac{2 \sin^4 \vartheta}{\gamma^2 - 2\gamma \sin^2 \vartheta}, \gamma = 2 - \cos \vartheta + \frac{1}{2 - \cos \vartheta}$$

Asimmetria misurata $\rho = 2.04 \pm 0.08$, teorica = 2.0

Conclusione: i due fotoni sono emessi preferenzialmente ortogonalmente ($\Delta\phi=90^\circ$)

$\Rightarrow f(\gamma_1, \gamma_2)$ è pseudoscalare \Rightarrow se la parità è conservata nel decadimento

\Rightarrow la parità del sistema (e^+e^-) (fermione/antifermione) è negativa

Conservazione della parità?

θ , τ puzzle: due particelle, con la stessa massa e vita media, ma diversi modi di decadimento:

a) $\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ (21%), b) $\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ (6%)

Spin = 0, $l=0$: la parità del θ vale: $\eta_\theta = \eta(\pi^0) \eta(\pi^+) (-1)^0 = +1$

Nel caso del τ definiamo:

$\vec{l} = \text{momento angolare } \pi^+ \pi^+$, $\vec{L} = \text{momento angolare } \pi^- (\pi^+ \pi^+)$

$Spin = 0 \Rightarrow \vec{l} + \vec{L} = 0 \Rightarrow l = L \Rightarrow \eta_\tau = (-1)^3 (-1)^{l+L} = -1$

Se la parità è conservata nel decadimento, θ e τ hanno parità opposta

Vero anche per particelle di spin $\neq 0$ (Dalitz) ($\theta^+ = K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$, $\tau^+ = K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$).

Lee & Yang (Phys Rev. 104, 254 (1956)): analisi dei dati sperimentali:

Le interazioni forti e elettromagnetiche conservano la parità

Per le interazioni deboli (decadimento β e di alcune particelle instabili)

la conservazione della parità era solo un'estrapolazione

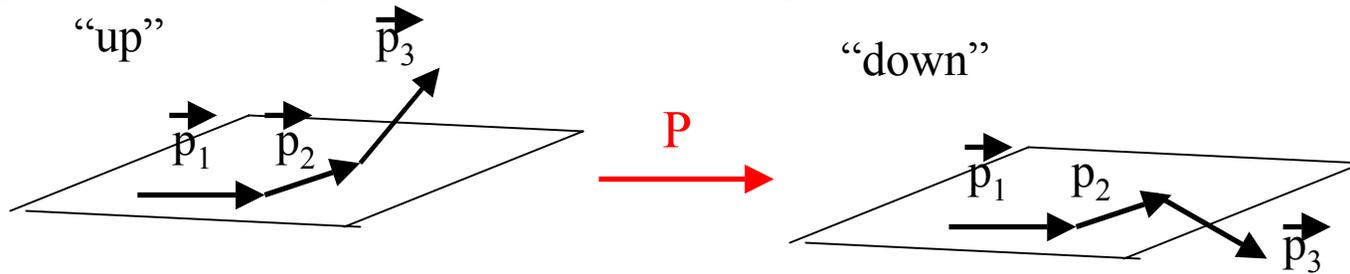
E la gravità???

Metodi per la verifica della conservazione della parità

1) Se il valore di aspettazione di quantità pseudoscalari è $\neq 0$, la parità è violata
 ex. 1)

$$(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3, \vec{J} \cdot \vec{p}$$

Doppio scattering di protoni su targhetta non polarizzata:

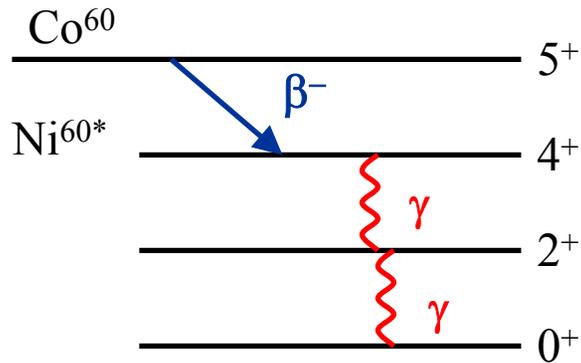


Per i decadimenti "up": $(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 > 0$
 Per i decadimenti "down": $(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 < 0$
 se $\langle (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 \rangle \neq 0 \Rightarrow$ *asimmetria "up" - "down"*
 \Rightarrow *violazione della parità*

Argomento analogo per il processo $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0 \rightarrow K^0 \pi^- p$ ($\pi^0 n$) $(\vec{p}_{\pi, in} \times \vec{p}_{\Lambda}) \cdot \vec{p}_{\pi, out} \neq 0$

2) $\langle \vec{J} \cdot \vec{p} \rangle \neq 0$ -Il sistema genitore polarizzato e la distribuzione delle particelle dipende
 • da $\cos\theta$ ($\sin\theta$), $\cos^3\theta$, ... (θ angolo rispetto alla polarizzazione \mathbf{J})
 -Genitore non polarizzato, elicità dei decadimenti: $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \rangle \neq 0$

Esperimento di tipo 2) (C.S.Wu et al., Phys.Rev. 105, 1413 (1957))



Decadimento beta del tipo $\Delta J=1$ (Gamow-Teller)

$$E_{\beta} < 0.316 \text{ MeV}$$

$$E_{\gamma 1} = 1.17 \text{ MeV}$$

$$E_{\gamma 2} = 1.33 \text{ MeV}$$

Rispetto alla direzione di polarizzazione dei nuclei la parità è conservata se la distribuzione angolare è pari in $\cos\theta$ (θ angolo del β^- rispetto alla polarizzazione del Cobalto) i.e.:

$$W(\theta) = A + B \cos^2 \theta + C \cos^4 \theta + \dots$$

Il campione di Co viene raffreddato a 0.01 K e orientato per mezzo del campo magnetico di un solenoide. Mano a mano che il campione di Co si riscalda il suo grado di polarizzazione è misurato dalla asimmetria di produzione dei 2 fotoni:

$$\alpha(\theta) = \frac{W_{\gamma}(\theta = \pi/2) - W_{\gamma}(\theta = 0)}{W_{\gamma}(\theta = \pi/2)}$$

Risultati:

$$W_e(\theta) = 1 + \alpha \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{\vec{p}_e \cdot \langle \vec{J}_{Co} \rangle}{J_{Co} p_e}$$

$$\alpha = -0.4 \approx \frac{v_e}{c}$$

α negativo: gli elettroni sono emessi prevalentemente opposti a \vec{J}

L'esperimento di M.me Wu

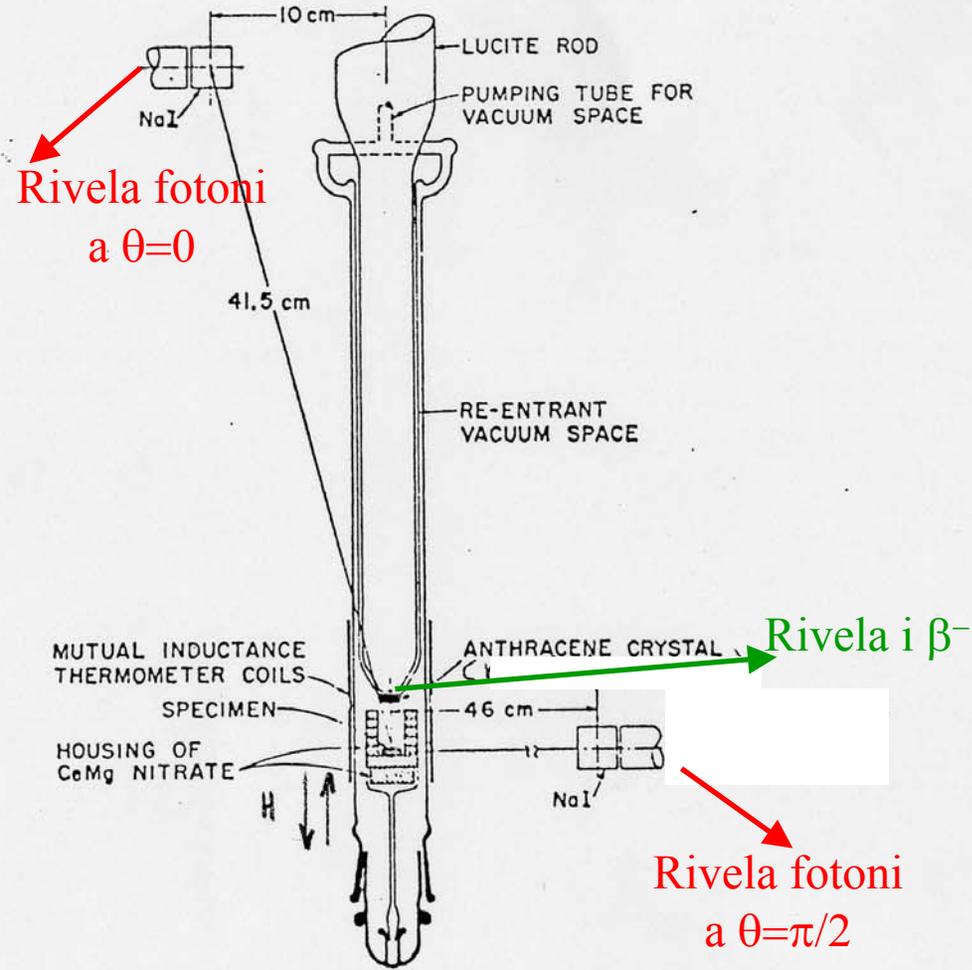


FIG. 1. Schematic drawing of the lower part of the cryostat.

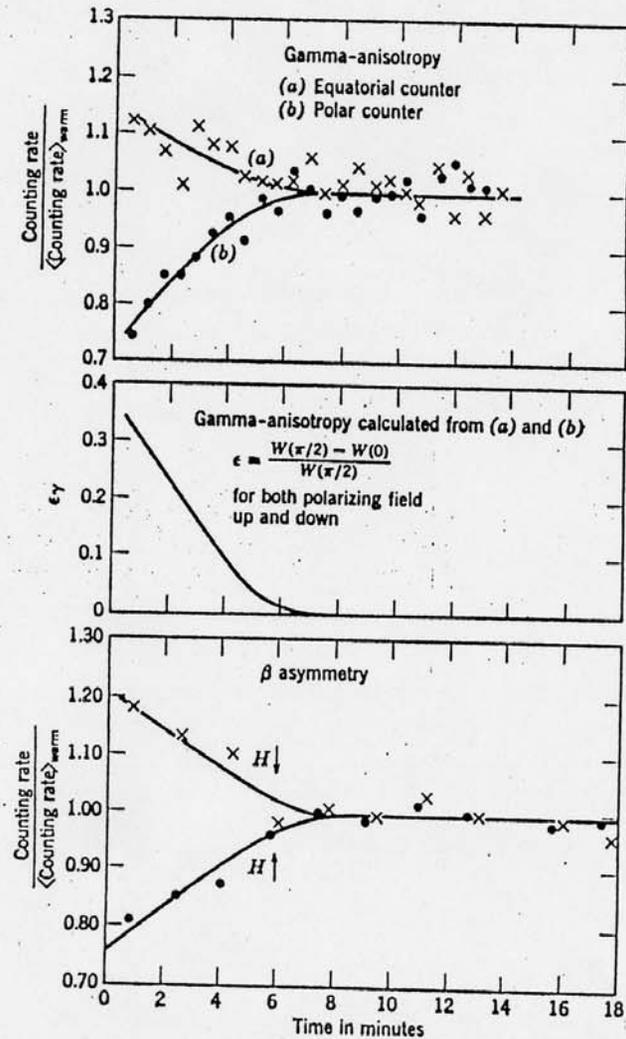


Fig. 31.1. γ -anisotropy and β -anisotropy as a function of time. The warming-up of the sample of Co^{60} leads to a depolarization in approximately 5 minutes. [From Wu *et al.*, *Phys. Rev.* 105, 1413 (1957).]

Altro esperimento di tipo 2) (R.L. Garwin et al., Phys.Rev. 105,1415 (1957))

Si studia la sequenza: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
 $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$

Il primo decadimento, debole, non conserva la parità: da un genitore non polarizzato decade il μ^+ polarizzato lungo la direzione di moto:

$$\langle \vec{\sigma}_\mu \rangle \cdot \vec{p}_\mu \neq 0$$

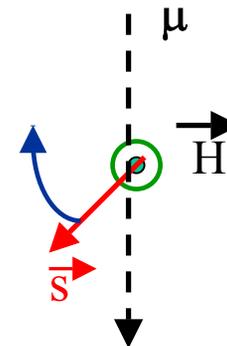
Se anche nel secondo decadimento debole la parità non è conservata la distribuzione dei positroni dipende da $\cos\theta$ (θ = angolo tra la polarizzazione del μ e la direzione del e^+).

L'angolo del rivelatore di positroni rispetto alla direzione di incidenza dei muoni è $\theta \sim 100^\circ$ la direzione incidente corrisponde anche alla direzione iniziale di polarizzazione dei muoni. per cambiare la direzione di polarizzazione si fa precedere il momento magnetico (spin) dei muoni con un campo magnetico verticale H (79 Gauss per Ampère)

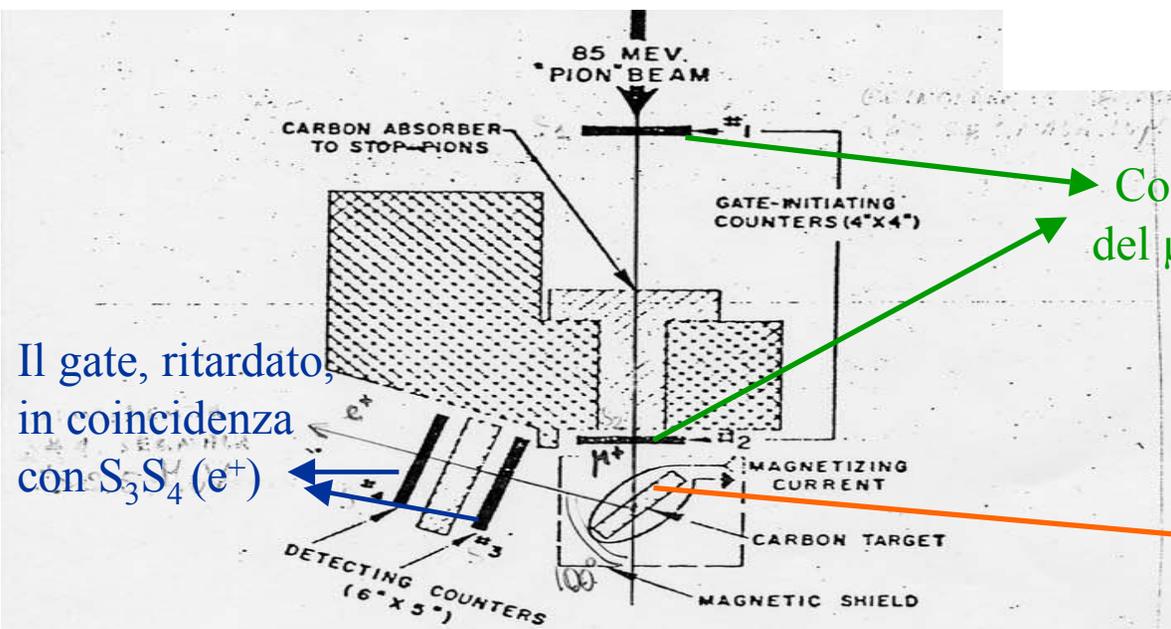
$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{g \cdot e}{2m} (\vec{s} \times \vec{H}) = \vec{\mu} \times \vec{H}$$

velocità di precession e, $\omega = \frac{ge}{2m} H \text{ rad / s}$

$$\theta = \theta(t) \propto \frac{ge}{2m} H \cdot t$$



Per un ritardo fissato (t) si misura il rate di e^+ in funzione di H (corrente nella bobina).



Il gate, ritardato, in coincidenza con S_3S_4 (e^+)

Coincidenza S_1S_2 segnala il passaggio del μ e apre una finestra temporale (gate) di $1.5 \mu s$

Il μ si ferma nella targhetta di carbonio, si assume che conservi la sua polarizzazione

FIG. 1. Experimental arrangement. The magnetizing coil was close wound directly on the carbon to provide a uniform vertical field of 79 gauss per ampere.

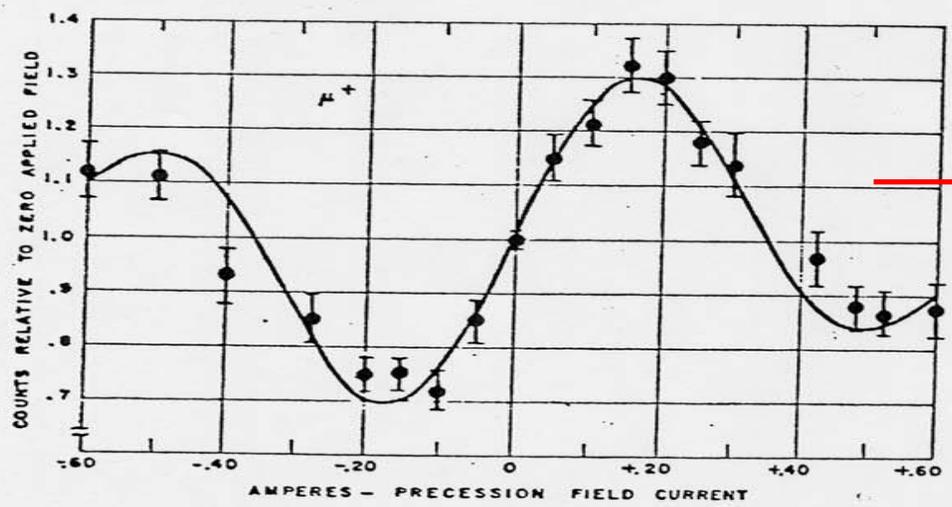


FIG. 2. Variation of gated 3-4 counting rate with magnetizing current. The solid curve is computed from an assumed electron angular distribution $1 - \frac{1}{2} \cos \theta$, with counter and gate-width resolution folded in.

Si studia la distribuzione dei positroni rispetto alla direzione della polarizzazione (spin) del μ
 $\sim (1 + \alpha \cos \theta)$

Verifiche sperimentali:

- Riduzione dello spessore assorbitore (i pioni finiscono nella targhetta dei muoni), il rate
- aumenta di un fattore 10 e non dipende più dalla corrente (da H) infatti $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ è isotropo;
- Il rivelatore di positroni è posizionato a $\theta=65^\circ \Rightarrow$ la curva trasla di una fase che corrisponde
- a un angolo di precessione di $\sim 37^\circ$ (100-65).

Risultati:

- 1) Esiste un'asimmetria nella distribuzione di e^+ ($1+\alpha\cos\theta$) \Rightarrow **il μ è polarizzato, $\alpha=-1/3$**
- 2) La parità in entrambi i decadimenti **non si conserva.**
- 3) $g=2 \pm 0.1$
- 4) Spin del $\mu = 1/2$
- 5) L'asimmetria nella distribuzione dei positroni non dipende dall'energia.

Ex. Decadimento non leptonic

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 + K^0, \quad \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \quad \Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0; \tau \approx 3 \cdot 10^{-10} s$$

due interazioni : la prima forte, il decadimento della Λ , debole

se $(\vec{p}_{\pi,in} \times \vec{p}_{\Lambda}) \cdot \vec{p}_{\pi,out} \neq 0 \Rightarrow$ asimmetria rispetto al

piano definito da $\vec{p}_{\pi,in}, \vec{p}_{\Lambda} \Rightarrow$ violazione della parità

Esperimento effettuato nel laboratorio di Brookhaven (USA) con π^- di energia 0.88-1.4 GeV:

Eventi “up” : 325 (± 18) ; Eventi “down” : 215 (± 15)

In altre parole: la direzione del π^- , quella della Λ e la direzione preferenziale di decadimento formano una terna di assi (right-handed) riconoscibile (assoluta).

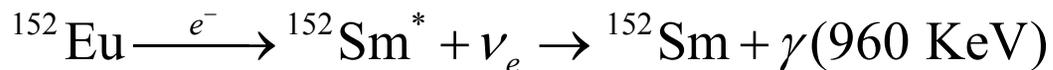
Ancora esperimento di tipo 2):

Elicita' del neutrino, Goldhaber, Grodzins, Sunjar, PR109, 1015 (1958):

$$\langle \vec{\sigma}_\nu \rangle \cdot \vec{p}_\nu \neq 0$$

Cattura K nell'Europio

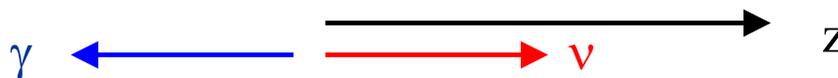
$E_\nu = 840 \text{ KeV}$, $t_{1/2} = 9.3 \text{ h}$:



$$J=0 \qquad \qquad \qquad 1 \quad 1/2 \qquad \qquad 0 \quad 1$$

Il Samario eccitato decade in circa 0.07 ps: non fa a tempo a termalizzarsi!!

- Vogliamo studiare l'elicità dei fotoni emessi opposti ai neutrini:



Elicita' ν	$J_z(e^-)$	$J_z(\nu)$	$J_z(\text{Sm}^*)$	$J_z(\gamma)$	Elicita' γ
+1	-1/2	1/2	-1	-1	+1
-1	1/2	-1/2	1	1	-1

- **Quindi l'elicità dei fotoni emessi in direzione opposta ai neutrini e' la stessa di quella dei neutrini**

- **Il problema sperimentale e' la determinazione della direzione di volo dei neutrini**

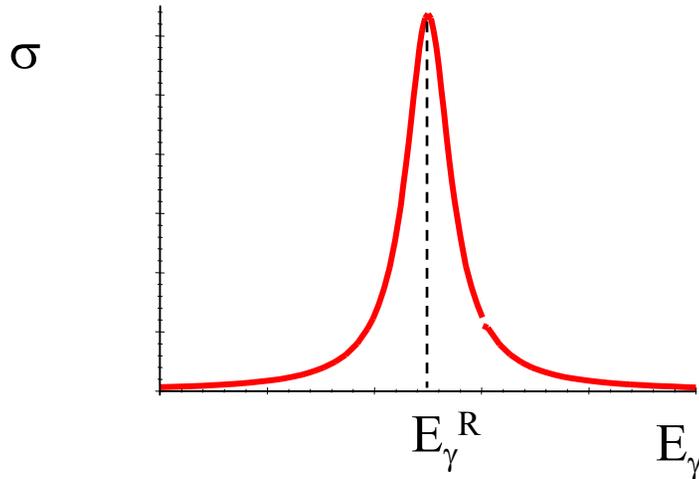
Si sfrutta lo scattering risonante:



Condizione di risonanza :

$$(E_\gamma^R + M)^2 - p_\gamma^2 = 2ME_\gamma^R + M^2 = (M^*)^2 \Rightarrow E_\gamma^R = \frac{(M^*)^2 - M^2}{2M}$$

M=massa del ${}_{62}\text{Sm}^{152}$, M^* =massa del ${}_{62}\text{Sm}^{152*}$



I γ emessi dal Sm^* a riposo:

$$E_\gamma^0 = \frac{(M^*)^2 - M^2}{2M^*} < E_\gamma^R$$

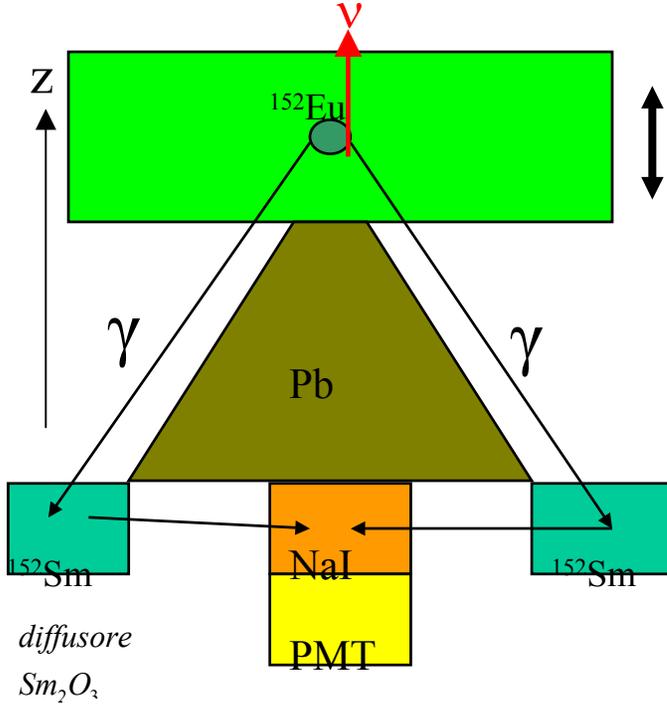
I γ emessi opposti al neutrino



$$\vec{p}(\text{Sm}^*) = -\vec{p}(\nu), |\vec{p}(\nu)| = 830 \text{KeV}$$

$$\Rightarrow E_\gamma \approx E_\gamma^0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_\gamma^0 \left(1 + \frac{p_\nu}{M^*}\right) \approx E_\gamma^R$$

Quindi i γ emessi opposti ai neutrini hanno $E_\gamma \sim E_\gamma^R \Rightarrow$
possibilita' di scattering risonante su ${}_{62}\text{Sm}^{152}$.



Ferro magnetizzato

I fotoni subiscono effetto Compton sul ferro magnetizzato preferenzialmente con spin flip

$$\sigma = \sigma_C (1 - A \vec{\sigma}_\gamma \cdot \vec{\sigma}_e)$$

A = frazione di elettroni polarizzati, a saturazione $A = 2/26$

I fotoni diffusi (risonanti) sono di preferenza emessi con direzione opposta ai neutrini e hanno la stessa elicità'. L'elicità' dei fotoni (neutrini) determina la probabilità' di interazione Compton (assorbimento).

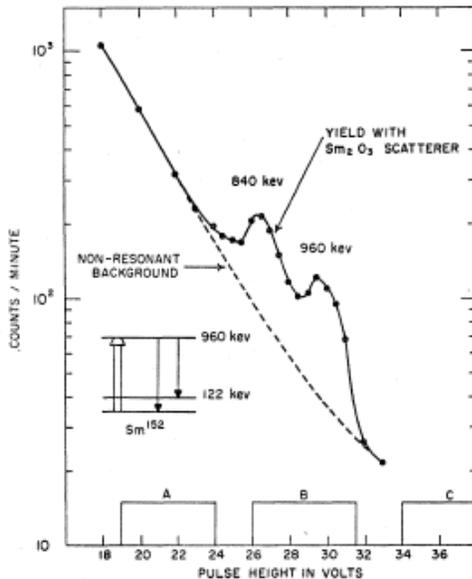


FIG. 2. Resonant-scattered γ rays of Eu^{152} . Upper curve is taken with arrangement shown in Fig. 1 with unmagnetized iron. Lower curve shows nonresonant background (including natural background).

Conteggi integrati nell'intervallo B:

$$\delta = \frac{N_- - N_+}{N_- + N_+} = (1.7 \pm 0.3)\%$$

N_+ = conteggi con magnetizzazione \vec{M} verso l'alto

N_- = conteggi con magnetizzazione \vec{M} verso il basso

\Rightarrow Elicita' del fotone = elicità' del neutrino = -1, compatibile al 100%

Coniugazione di carica C

La meccanica quantistica relativistica prevede che a una particella corrisponda un'antiparticella con la stessa massa e spin (Dirac 1931: esistenza dei positroni e^+).

L'operatore coniugazione di carica C cambia il segno della carica elettrica e del momento magnetico di una particella, per i leptoni e barioni cambia anche il segno del numero barionico e leptonico.

Classicamente le equazioni di Maxwell sono invarianti per C .

Ex.
$$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle, C|e^-\rangle = |e^+\rangle, C|p\rangle = |\bar{p}\rangle$$

Gli autostati di C sono le particelle **veramente neutre**: $\gamma, \pi^0, \eta^0, \rho^0, \phi^0, (e^+e^-), (\bar{p}p), \dots$
con $C(\psi) = \pm \psi$

N.B. Ci sono particelle neutre che non sono autostati di C ex: n, atomo di idrogeno.
Infatti $C|n\rangle = |\bar{n}\rangle \neq |n\rangle$.

C inverte tutti i numeri quantici eccetto l'impulso e lo spin:

$$C|Q, I_3, B, Y, L, \vec{p}, \vec{s}\rangle = |-Q, -I_3, -B, -Y, -L, \vec{p}, \vec{s}\rangle$$

Quindi solo gli stati con $Q=I_3=B=L=0$ possono essere autostati dell'operatore parità di carica C

Le interazioni forti e elettromagnetiche sono invarianti sotto C (dato sperimentale).

Ex. nella reazione forte: $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \dots, p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^- + \dots$

il numero e le distribuzioni di particelle finali positive e negative sono eguali (entro 1%).

Ex. nel decadimento elettromagnetico: $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma, \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

si studiano gli spettri di energia dei pioni positivi e negativi: sono eguali entro l'errore

Le interazioni deboli non sono invarianti per C.

Ex 1) $\nu: \overset{s}{\leftarrow} \vec{p} \xrightarrow{C} \bar{\nu}: \overset{s}{\leftarrow} \vec{p}$ **Ma l'antineutrino sinistrorso non esiste in natura!**

Devo fare CP $|\nu\rangle = |\bar{\nu}\rangle$ per avere **l'antineutrino fisico destrorso**

Ex 2) $K_{0L} \rightarrow \frac{e^+ \pi^- \nu}{e^- \pi^+ \bar{\nu}} = 1.00648 \pm 0.00035$

Ex. 3) L'universo consiste di materia e non di antimateria: violazione di C nella sua evoluzione? Asimmetria iniziale?

Coniugazione di carica particella/antiparticella

Coppie particella antiparticella sono veramente neutre: $(\pi^+\pi^-), (K^+K^-), (K^0, \bar{K}^0), (p\bar{p}), (\pi^0\pi^0)$

a) Coppie di bosoni distinguibili: $(\pi^+\pi^-), (K^+K^-), \dots$

C ha lo stesso effetto dello scambio delle coordinate:

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1, x_2, s_2, Q_2) \xrightarrow{C} \eta_c \Phi(x_2, s_2, Q_1, x_1, s_1, Q_2)$$

$x_1 \Leftrightarrow x_2$ $(-1)^l$ Parte orbitale (equivalente a inversione spaziale)

$(-1)^S$ Proprietà dei coefficienti CG per addizione di 2 spin interi con S come risultato.

$$\Rightarrow \eta_c = (-1)^{l+S}$$

b) Coppie di bosoni indistinguibili: $(\pi^0\pi^0), (\rho^0\rho^0), \dots$

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1, x_2, s_2, Q_2) \xrightarrow{C} \eta_c \Phi(x_2, s_2, Q_1, x_1, s_1, Q_2)$$

Funzione d'onda simmetrica $\Rightarrow \eta_c = +1$ ma vale ancora: $\eta_c = (-1)^{l+S} : (-1)^{l+S} = 1$.

c) Coppie di fermioni distinguibili: $(e^+e^-), (p\bar{p}), (q\bar{q}), \dots$

Parte orbitale $(-1)^l$, parte di spin $(-1)^{S+1}$ (caratteristiche coefficienti CG)

+ parità relativa fermione/antifermione. In totale:

$$\underline{\eta_c = (-1)^l (-1)^{S+1} (-1) = (-1)^{l+S}}$$

La parità di carica del sistema (se autostato) prima e dopo l'interazione è la stessa.

Parità di carica del fotone

$J^\mu A_\mu$ è invariante ma $C(J_\mu) = -J_\mu \Rightarrow C(A_\mu) = -A_\mu \Rightarrow \varepsilon_\mu \xrightarrow{C} -\varepsilon_\mu$

Quindi: $C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \Rightarrow C|n\gamma\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle$

Se C è conservato nella interazione o nel decadimento porta a regole di selezione:

Pseudo scalari $\left\{ \begin{array}{l} \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma, \quad \pi^0 \not\rightarrow \gamma\gamma, \quad C(\pi^0) = (-1)^2 = +1 \\ \eta^0 \rightarrow \gamma\gamma, \quad \eta^0 \not\rightarrow \gamma\gamma, \quad C(\eta^0) = (-1)^2 = +1 \end{array} \right\} \quad I=S=0$

Vettoriali $\left\{ \begin{array}{l} \rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \quad \rho^0 \not\rightarrow \eta^0\pi^0, \quad \rho^0 \not\rightarrow \pi^0\pi^0, \quad C(\rho^0) = -1 (\eta_C = (-1)^{l+S}) \\ \omega^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \quad \omega^0 \not\rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 \quad C(\omega^0) = -1 \end{array} \right.$

ω^0 ha I-spin=0 quindi $I(\pi^+\pi^-)$ o $I(\pi^0\pi^0)$ e $I(\pi^0)=1$ ma per la simmetria sotto C, I-spin è come lo spin ordinario: $\eta_C=(-1)^l$ quindi $C(\omega^0)=(-1)^l C(\pi^0) = -1 \cdot 1 = -1$, ma la funzione d'onda è anche antisimmetrica per lo scambio $\pi^0\pi^0$ con $I=1$, ma globalmente $\pi^0\pi^0$ deve essere simmetrico

$$\Rightarrow l(\pi^0\pi^0) = 1, C(\pi^0\pi^0) = (-1)^l (-1)^l = +1 \text{ e } C(\omega^0) = (+1)^{\pi^0\pi^0} \cdot (+1)^{\pi^0}$$

Nel caso invece di $\pi^+\pi^-\pi^0$, $l(\pi^+\pi^-)$ può essere anche 0

$$\phi^0 \rightarrow K^+ K^- \quad C(\phi^0) = -1$$

Permesse: $\omega^0 \rightarrow \pi^0 \gamma, \quad \omega^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-, \quad \rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$

Vietate: $\omega^0 \rightarrow \rho^0 \gamma, \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma, \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-, \quad \phi \rightarrow \omega^0 \gamma$

N.B. $\rho, \omega, \phi, J/\psi, \gamma$ si possono ottenere da $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow$ (interazione elettrom.) e quindi hanno C, P del fotone.

Parità G

Le interazioni forti conservano C e non dipendono da I_3 . Definiamo:

$$G = C \cdot \exp[i\pi(I_2)] \quad \text{ruota } I_3 \rightarrow -I_3$$

Applichiamo G alla funzione ψ di un sistema neutro:

$$G|\psi\rangle = (-1)^{l+S+I} |\psi\rangle \quad (\eta_C = (-1)^{l+S} (-1)^I)$$

Ma G si applica anche ai sistemi carichi:

$$G|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle \quad \text{e} \quad G|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\pm\rangle, \text{ per } n \text{ pioni l'autovalore è } G = (-1)^n$$

Ne segue la regola di selezione che una particella che decade forte in 2 pioni non può decadere in tre, ex. $\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ ma non $\omega^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ($G(\omega^0) = -1$).

Coniugazione di carica nelle interazioni deboli

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu & \xrightarrow{C} & \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \\
 \mu^+ : \vec{p} \xleftarrow{s} & \nu : \vec{p} \xrightarrow{s} & \xrightarrow{C} & \mu^- : \vec{p} \xleftarrow{s} & \bar{\nu} : \vec{p} \xrightarrow{s}
 \end{array}$$

C non agisce sullo spazio tempo, ma cio' implica un antineutrino con elicit  negativa !

$$\begin{array}{ccc}
 DIS : \nu_\mu n \rightarrow \mu^- p & \xrightarrow{C} & \bar{\nu}_\mu \bar{n} \rightarrow \mu^+ \bar{p} \\
 \mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu & \xrightarrow{C} & \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu
 \end{array}$$

Ancora v LH!
 $e^+ e^- e^- \nu e \nu$
 avrebbero la stessa elicit !

Evidenza sperimentale: solo gli stati con elicit  negativa partecipano alle interazioni deboli.

$$(\lambda = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \pm \frac{1}{2} \text{ se } s = 1/2)$$

Si incorpora nella teoria con il fattore $(1-\gamma_5)$ nella corrente (V-A). $(1-\gamma_5)$ è un **proiettore di elicità negativa**. In QED invece ho entrambi gli stati di elicità

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^i = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_i \\ -\sigma_i & -1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^\mu \equiv \text{vettore}; \gamma^\mu\gamma^5 \equiv \text{vettore assiale}$$

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{seleziona le due componenti in basso dello spinore: } \left. \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \right\}$$

La presenza nell'hamiltoniana debole di termini con γ_5 e senza γ_5 rende impossibile l'invarianza per C: teoria (V-A): $\gamma_\mu(1-\gamma_5)$.

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^t; C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^t$$

\Rightarrow termini $\gamma_\mu\gamma_5$ cambiano segno sotto C (come pure sotto P)

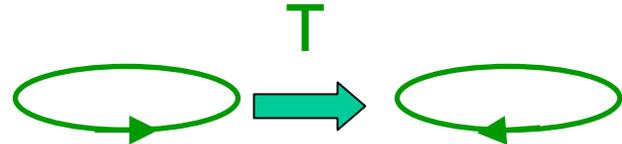
l'operatore $(1-\gamma_5)$ è il proiettore di elicità negativa

l'operatore $(1+\gamma_5)$ è il proiettore di elicità positiva

L'invarianza è ripristinata con l'operatore combinato **CP**

Inversione temporale T

Def: $[t, \vec{x}] \xrightarrow{T} [-t, \vec{x}]: \vec{p} \rightarrow -\vec{p}; E \rightarrow E$
 $\vec{M} \rightarrow -\vec{M}; \vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$



Combinazioni che cambiano segno sotto T:

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2), \text{ex. } K^+ \rightarrow \pi^0 \mu^+ \nu \quad (\vec{\sigma}_\mu \cdot (\vec{p}_\pi \times \vec{p}_K))$$

polarizzazione del μ perpendicolare al piano $\vec{p}_\pi - \vec{p}_K$

e combinazioni che non cambiano segno:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}; \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

In elettrodinamica: le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\rho \xrightarrow{T} \rho$$

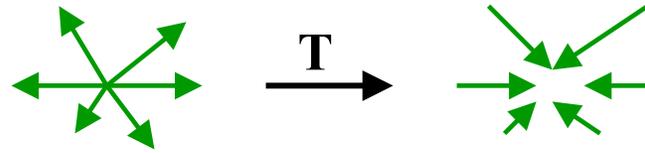
$$\vec{j} \xrightarrow{T} -\vec{j}$$

Restano invarianti se:

$$T(\vec{E}(t)) = \vec{E}(-t)$$

$$T(\vec{B}(t)) = -\vec{B}(-t)$$

Il vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} \xrightarrow{T} -\vec{S}$:



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow T(\phi) = \phi(-t), T(\vec{A}) = -\vec{A}(-t) \Rightarrow T^2(A_\mu) = A_\mu$$

Il fotone è autostato di T^2 con autovalore +1

Se esistesse un monopolo magnetico ci sarebbero una carica e una corrente magnetiche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_M$$

$$\rho_M \xrightarrow{T} \rho_M$$

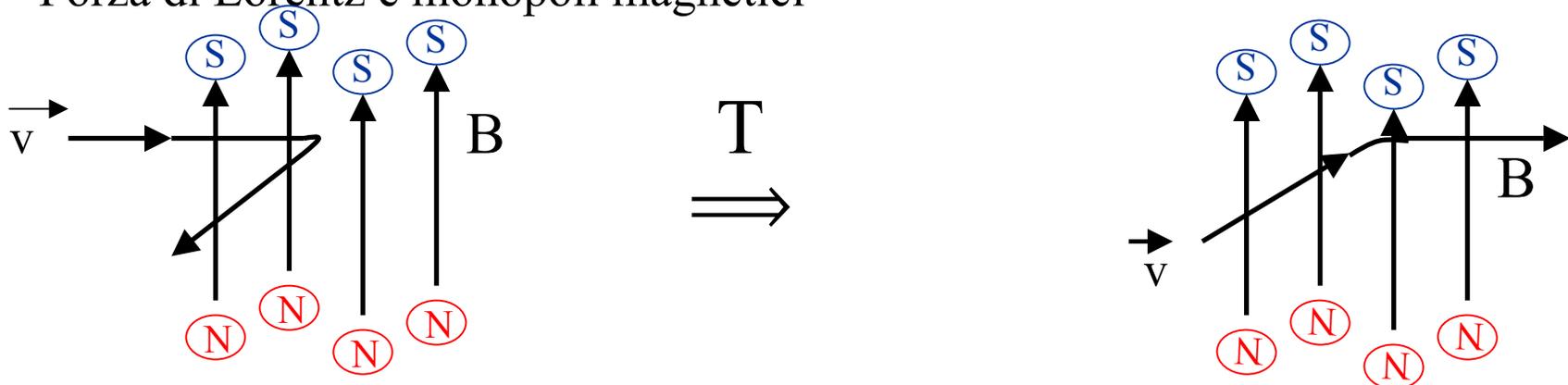
Le equazioni di Maxwell sarebbero simmetriche nei campi e correnti

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_M$$

$$\vec{j}_M \xrightarrow{T} -\vec{j}_M$$

ma non sarebbero invarianti sotto T

Forza di Lorentz e monopoli magnetici



Invarianza per T violata nel moto della particella

Inversione temporale e meccanica quantistica

Equazione di Schrodinger:
$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \vec{x}) = H\phi(t, \vec{x})$$

Trasformiamo la ϕ per T: $T(\phi)$ e vogliamo che $T(\phi)$ soddisfi la stessa equazione con $t' = -t$. Se semplicemente postuliamo che: $T\phi(t, \vec{x}) = \phi(-t, \vec{x})$ avremo:

$$i \frac{\partial}{\partial(-t)} \phi(-t, \vec{x}) = -H\phi(-t, \vec{x})$$

Prendiamo una particella libera: $\phi(t, \vec{x}) = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt) \xrightarrow{T} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x} + iEt)$

E l'Hamiltoniana $H \xrightarrow{T} -H$ cioè uno stato a energia positiva si trasforma in uno a energia negativa! Quindi la trasformazione $T\phi(t, \vec{x}) = \phi(-t, \vec{x})$ è inaccettabile.

Assumiamo (Wigner 1932) che esista un operatore unitario tale che: $UH^*U^+ = H$
Applichiamo la U all'equazione di Schrodinger complessa coniugata: $\Rightarrow UH^* = HU$

$$i \frac{\partial}{\partial(-t)} U\phi^*(t, \vec{x}) = UH^*\phi^*(t, \vec{x}) = HU\phi^*(t, \vec{x}) \xrightarrow{t \rightarrow -t} i \frac{\partial}{\partial(t)} U\phi^*(-t, \vec{x}) = HU\phi^*(-t, \vec{x})$$

Cioè se $\phi(t, \vec{x})$ è soluzione dell'eq. di Schrodinger lo è anche $\phi'(t', \vec{x}') = U\phi^*(-t, \vec{x})$

ed entrambe sono autostati della stessa energia E (positiva).

L'inversione temporale T è il prodotto di 2 operatori: l'unitario U che opera la trasformazione dello stato in quello con inversione temporale, e K che opera i cc

T è un operatore antilineare e antiunitario: $T(\alpha\phi + \beta\chi) = \alpha^*T\phi + \beta^*T\chi, \langle T\chi | T\phi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*$

Test dell'invarianza per T

Bilancio dettagliato: ①+② → ③+④ **stesso elemento di matrice →, ←**
 ←

Esempio nelle interazioni forti:



Test accurato a $5 \cdot 10^{-4}$
 Attenzione l'elemento di matrice è lo stesso,
 ma lo spazio delle fasi e gli stati di spin
 non necessariamente

Polarizzazione trasversa al piano definito dagli impulsi delle due particelle finali:

Interazioni deboli:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}_e \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_\mu \rangle \cdot (\vec{p}_e \times \vec{p}_\nu)$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_n \rangle \cdot (\vec{p}_e \times \vec{p}_{\bar{\nu}})$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_\mu \rangle \cdot (\vec{p}_\pi \times \vec{p}_\nu)$$

Interazioni el.m.: $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + e^+ + e^- \quad \alpha = \langle \vec{\sigma}_\Lambda \rangle \cdot (\vec{p}_\Lambda \times \vec{p}_q)$ con $\vec{q} = \vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-}$

Nessun risultato positivo a livello 10^{-3} - 10^{-4}

Momento di dipolo elettrico e invarianza per T

Euristicamente: le sole quantità vettoriali associate a una **particella elementare** sono:
l'impulso \vec{p} e lo spin \vec{s}

Per una particella a riposo ho un dipolo elettrico: $\vec{d}_e = d_e \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$

Il dipolo elettrico in un campo elettrico esterno ha un'energia H:

$$H = -\vec{d}_e \cdot \vec{E} = -d_e \frac{\vec{s} \cdot \vec{E}}{|\vec{s}|} \quad \text{per } T : \vec{E} \xrightarrow{T} \vec{E}; \vec{d}_e \xrightarrow{T} -\vec{d}_e (\text{spin}) \Rightarrow$$

Violazione di T e della parità

N.B. Devono essere particelle elementari: gli atomi e le molecole possono avere momento di dipolo elettrico.

\Rightarrow Tutte le particelle elementari con spin $\neq 0$ devono avere dipolo elettrico nullo

Limiti sperimentali: d_e $\left\{ \begin{array}{l} < 0.6 \cdot 10^{-25} \text{ e cm (neutrone)} \\ = 0.07 \pm 0.07 \cdot 10^{-26} \text{ e cm (elettrone)} \\ < -0.54 \cdot 10^{-23} \text{ e cm (protone)} \end{array} \right.$

Se il neutrone fosse grande come la terra il limite corrisponde a due cariche elettriche elementari di segno opposto al suo centro separate di 1 μ .

Speculazioni

Il massimo dipolo elettrico che ci potremmo aspettare senza restrizioni della simmetria è:

$$\frac{d_e}{e} \approx \text{lunghezza d'onda Compton del neutrone} \approx 10^{-14} \text{ cm}$$

Se attribuiamo il dipolo elettrico solo alla parte debole dell'interazione che viola T:

$$\frac{d_e}{e} \approx 10^{-14} G_F m_p^2 \approx 10^{-19} \text{ cm}$$

Molto maggiore del limite sperimentale di 10^{-25} cm



Le violazioni di T dovute alle interazioni deboli sono (se ci sono) causate da interazioni molto più deboli (oppure a interazioni deboli a ordine superiore)

Una stima dedotta dalla violazione di CP darebbe:

$$d_e(\text{neutrone}) \sim 10^{-32} e \cdot \text{cm}$$

CPT (PTC, TCP, ...)

Particella → antiparticella
Destra → sinistra
Passato → futuro

$$\text{CPT} \equiv \Theta$$

Teorema CPT (T.D. Lee: “Particle physics, an introduction to field theory”)

Ogni densità lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, invariante di Lorentz e che soddisfi le prescrizioni di spin-statistica, si trasforma come:

$$\Theta \mathcal{L}(x) \Theta^{-1} = \mathcal{L}^\dagger(-x)$$

Ma in ogni teoria quantistica $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger \implies$ l'azione $\int \mathcal{L} d^4x$ è invariante per CPT

Conseguenze:

$$m(p) = m(\bar{p}) : \text{test } \frac{m(e^+) - m(e^-)}{m(e^+) + m(e^-)} < 4 \cdot 10^{-8}, \frac{m(K_0) - m(\bar{K}_0)}{m(K_0) + m(\bar{K}_0)} < 10^{-19}$$

$$\tau(p) = \tau(\bar{p}) : \frac{\tau(\mu^+)}{\tau(\mu^-)} = 1.00002 \pm 0.00008$$

$$\sigma(A + B \rightarrow C + D) = \sigma(\bar{A} + \bar{B} \rightarrow \bar{C} + \bar{D}), \text{ ex : } \sigma(pp) = \sigma(\bar{p}\bar{p})$$

momento magnetico μ particella = -momento magnetico antiparticella :
 $(\mu(e^+) - \mu(e^-)) / (\mu(e^+) + \mu(e^-)) = -(1 \pm 4) \cdot 10^{-12}$

Se uno o due dei tre operatori è violato (ex CP)
anche il terzo lo deve essere (ex. T)

Bibliografia

- **D.Perkins**, “Introduction to high energy physics”, Cambridge University Press, 1999;
- **D.Griffith**,”Introduction to elementary particles” Harper & Row, Publisher, New York, 1987;
- **Q.Ho-Kim and P.Xuan Yem**, “Elementary Particles and their interactions”, Springer Verlag, 1998.