

# SIMMETRIE

Emmy Noether (1917):

**A ogni simmetria corrisponde una legge di conservazione o di selezione. Simmetria? L'assunzione fisica che certe quantità non sono osservabili implica un'invarianza del sistema sotto la trasformazione matematica ad essa collegata.**

<u>Non osservabile</u>	<u>Trasformazione di simmetria</u>	<u>Legge di conserv. o selezione</u>
Diff. tra particelle eguali	Permutazione	<b>Statistica di BE o FD</b>
Posizione spaz. assoluta	Traslazione spaziale	<b>Impulso</b>
Tempo assoluto	Traslazione temporale	<b>Energia</b>
Direzione spaz. assoluta	Rotazione	<b>Momento angolare</b>
	<b>Simmetrie discrete (TT=I)</b>	
Destra (sinistra) assolute	Inversione spaziale	<b>Parità spaziale: P</b>
Carica elettrica assoluta	$e \rightarrow -e$	<b>Inversione di carica: C</b>
Direzione temp. assoluta	$t \rightarrow -t$	<b>Inversione temporale: T</b>

In aggiunta alle simmetrie dello spazio-tempo ci sono anche le **simmetrie interne**, ex.

- Invarianza di gauge (QED, U(1))  $\Leftrightarrow$  conservazione della carica elettrica
- Invarianza di gauge (Interazioni deboli, SU(2))  $\Leftrightarrow$  Conservazione dell'isospin debole
- Invarianza di gauge (Interazioni forti QCD, SU(3))  $\Leftrightarrow$  Conservazione del colore

# Teorema di Noether

Data la Lagrangiana scalare di Lorentz funzione dei campi  $\phi_i$  e delle sue derivate,  $\partial_\mu \phi_i$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

**Teorema di Noether (1915):** per ogni invarianza dell'azione sotto una trasformazione continua dei campi esiste:

-Una corrente conservata  $J_\mu$ :  $\partial_\mu J^\mu = 0$

-Una carica classica  $Q$ , indipendente dal tempo:  $Q = \int_V d^3x \cdot J^0(t, \vec{x}), \dot{Q} = 0$

$$\text{ex. } \phi_i(x) \rightarrow \phi_i'(x) \equiv e^{-iq_i \mathcal{G}} \phi_i(x)$$

$\mathcal{G}$  = numero reale

$q_i$  = carica elettrica



**Conservazione carica elettrica**  
**Equazione di continuità:**

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

L'insieme delle operazioni di simmetria su un sistema deve soddisfare le proprietà:

- 1) **Chiusura:** se  $R_i$  e  $R_j$  sono nell'insieme, lo è anche  $R_i R_j$  ;
  - 2) **Identità:** c'è un elemento  $I$  tale che  $I R_i = R_i I = R_i$ ;
  - 3) **Inverso:** qualunque  $R_i$  esiste  $R_i^{-1}$  tale che  $R_i R_i^{-1} = I$ ;
  - 4) **Associatività:**  $R_i (R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$
- SONO  
UN GRUPPO**

In generale  $R_i R_j \neq R_j R_i$ , se  $R_i R_j = R_j R_i$  il gruppo è detto abeliano (ex. Le traslazioni spaziali sono abeliane, le rotazioni no.)

Sono gruppi:  $U(1)$  (moltiplicazione per una fase), le trasformazioni di Lorentz, vedremo  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ ...

Ciascun gruppo può essere rappresentato da un gruppo di matrici:

Per ciascun elemento  $a$  c'è una matrice  $M_a$  e tale che se

$$a b = c \quad \text{allora} \quad M_a M_b = M_c$$

Se ci sono più elementi del gruppo rappresentati dalla stessa matrice si dice omomorfo. Non necessariamente isomorfo. I gruppi possono essere rappresentati da matrici in differenti dimensioni ex.  $SU(2)$  ha rappresentazioni in 1, 2 (fondamentale), 3, 4 dimensioni.

# Simmetrie di sapore (interne)

Osserviamo che  $m_p = 938.28 \text{ MeV} \sim m_n (939.57 \text{ MeV})$ .

Heisenberg (1932): sono due stati di una singola particella: **il nucleone**:

“spegnendo” la carica elettrica  $p$  e  $n$  diventerebbero indistinguibili:

Le forze sperimentate dal protone sono le stesse di quelle del neutrone:

i nuclei “specchio” ( $p \Leftrightarrow n$ ) hanno livelli energetici simili.

Organizzazione formale in un doppietto  $N \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$   $p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$   $n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$p$  e  $n$  sono due stati dell'isospin forte  $I$ ,  $I=1/2$ :  $p=|1/2, 1/2\rangle$ ,  $n=|1/2, -1/2\rangle$

**Le interazioni forti di  $p$  e  $n$  e delle loro combinazioni lineari sono**

**invarianti per rotazioni nello spazio dell'isospin  $I$ . L'insieme**

**di queste rotazioni costituisce il gruppo  $SU(2)$ : gruppo di matrici  $2 \times 2$**

**Unitarie e a determinante =1. Stessa algebra dello spin ordinario  $1/2$ .**

**NOETHER: l'isospin  $I$  si conserva in tutte le interazioni forti:**

*dati*  $|\psi_i\rangle$  e  $|\psi_f\rangle$ , l'ampiezza di scattering vale:  $\langle \psi_f | S | \psi_i \rangle$  e

$$\left[ \hat{S}, \hat{I} \right] = 0 \Rightarrow \Delta |I|^2 = 0, \Delta I_3 = 0$$

La simmetria di isospin riflette la simmetria dei quark u e d costituenti degli adroni

Esempi:

- I  $\pi = 1$  ( $u\bar{d}, \bar{u}d, u\bar{u}-\bar{d}d$  (tre possibili stati di carica)):  $\pi^+ = |1, 1\rangle$  (m~140 MeV),  $\pi^0 = |1, 0\rangle$  (m~135 MeV),  $\pi^- = |1, -1\rangle$
- I  $\Lambda = 0$  (uds: 1 solo stato di carica)  $\Lambda = |0, 0\rangle$  (m~1115 MeV), così pure  $\Omega^- = |0, 0\rangle$  (m~1672 MeV)
- I  $\Delta = 3/2$  (uuu, uud, udd, ddd: 4 stati di carica) (m~1230 MeV):  $\Delta^{++} = |3/2, 3/2\rangle$ ,  $\Delta^+ = |3/2, 1/2\rangle$ ,  $\Delta^0 = |3/2, -1/2\rangle$ ,  $\Delta^- = |3/2, -3/2\rangle$

La 3<sup>a</sup> componente dell'isospin è determinata dalla carica elettrica: formula di Gell-Man Nishijima:  
 Stranezza S e ipercarica Y sono introdotte dalla osservazione sperimentale che nelle interazioni forti esse si conservano

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(A + S) \longrightarrow \text{Con } S = \text{stranezza, } A = \text{numero barionico} \\ \text{Y} = \text{ipercarica forte}$$

Il numero di componenti del multipletto di I è dato da I, l'ipercarica Y serve a determinare la carica elettrica di ciascun membro del multipletto.

Ogni interazione che conserva Q, A e I,  $I_3$  conserva anche Y e S, ex.

- p:  $I_3 = 1/2$ , A=1 S=0 Q=1 E' una scelta naturale assunto per i primi
- n:  $I_3 = -1/2$ , A=1 S=0 Q=0 2 quark un doppietto:
- $\Lambda$ :  $I_3 = 0$ , A=1 S=-1 Q=0 u=[1/2, 1/2], d=[1/2, -1/2] S=0
- $\Delta^{++}$ :  $I_3 = 3/2$ , A=1 S=0 Q=2 e un singoletto per il terzo: s=[0, 0] S=-1

Ma l'isospin ha anche implicazioni dinamiche, ex

$$1) \text{ Combiniamo 2 nucleoni: } I=1 \left\{ \begin{array}{l} |1, 1\rangle = pp \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |pn + np\rangle \\ |1, -1\rangle = nn \end{array} \right. \quad I=0 \left\{ \begin{array}{l} |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |pn - np\rangle \end{array} \right.$$

L'unico stato legato di 2 nucleoni è il **deutone: d:(pn)** è un **singoletto o un tripletto?**

Nel potenziale di interazione mi aspetto un termine di interazione tra isospin del tipo:  $\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2$

$$\text{dato } \vec{I}_{tot} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \text{ e } |\vec{I}_{tot}|^2 = |\vec{I}_1|^2 + |\vec{I}_2|^2 + 2(\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2)$$

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2 = \frac{1}{4} \text{ per il tripletto } (|\vec{I}_{tot}| = 1)$$

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2 = -\frac{3}{4} \text{ per il singoletto } (|\vec{I}_{tot}| = 0) \text{ potenziale attrattivo !}$$

Ex. 2

$$a) pp(|1,1\rangle) \rightarrow d + \pi^+ (|1,1\rangle)$$

$$b) pn(|1,0\rangle) \rightarrow d + \pi^0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + |0,0\rangle) \right)$$

$$c) nn(|1,-1\rangle) \rightarrow d + \pi^- (|1,-1\rangle)$$

Interazioni forti con  $I_d=0$

Ma nelle interazioni forti si conservano  $I$  che  $I_3$  quindi le ampiezze  $M$  devono essere:

$$M_a : M_b : M_c = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \quad \text{E le sezioni d'urto: } \sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 2 : 1 : 2$$

Verificato sperimentalmente ( a ) e b) misurate in laboratorio)

# Il numero barionico

Stuckelberg 1938: perchè **non esiste**  $p \rightarrow e^+ \gamma$  ?

Regola di selezione: associamo ai fermioni con  $m \geq m_p$  una "qualità" chiamata **numero barionico che si conserva nelle interazioni (generalizzazione della conservazione del numero di massa atomica). Ex.**

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Ai barioni è associato un numero barionico +1  
agli antibarioni -1

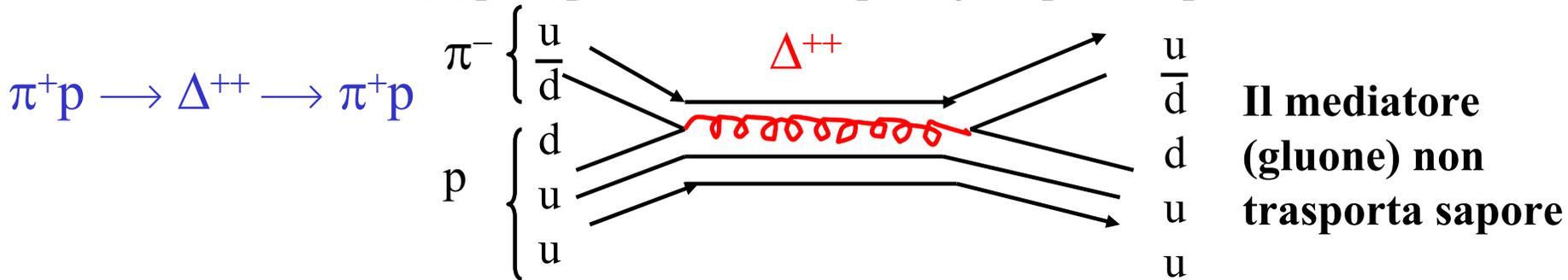
$$pp \rightarrow pp + p\bar{p}$$

N.B.  $\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) > 10^{34}$  anni

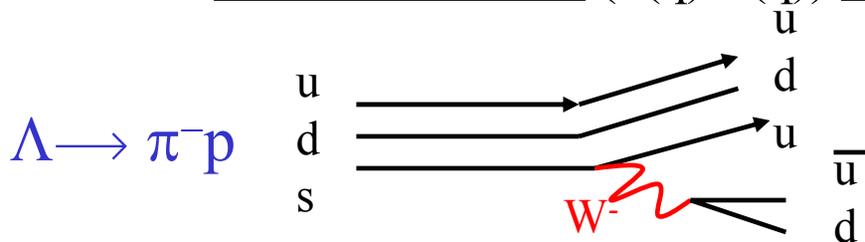
$$\Lambda \rightarrow p \pi^-$$

Il numero barionico è assegnato anche  
ai quark: 1/3, -1/3

Nelle interazioni forti ( $n(q) - n(\bar{q})$ ) è conservato per ogni tipo di sapore, ex:



Nelle interazioni deboli ( $n(q) - n(\bar{q})$ ) è conservato solo globalmente: ex:



La simmetria di isospin forte degli adroni riflette quella dei costituenti:

**i quark u e d sono indistinguibili per la QCD (interazioni forti) (doppietto), gli altri: s,c,b,t sono singoletti.**

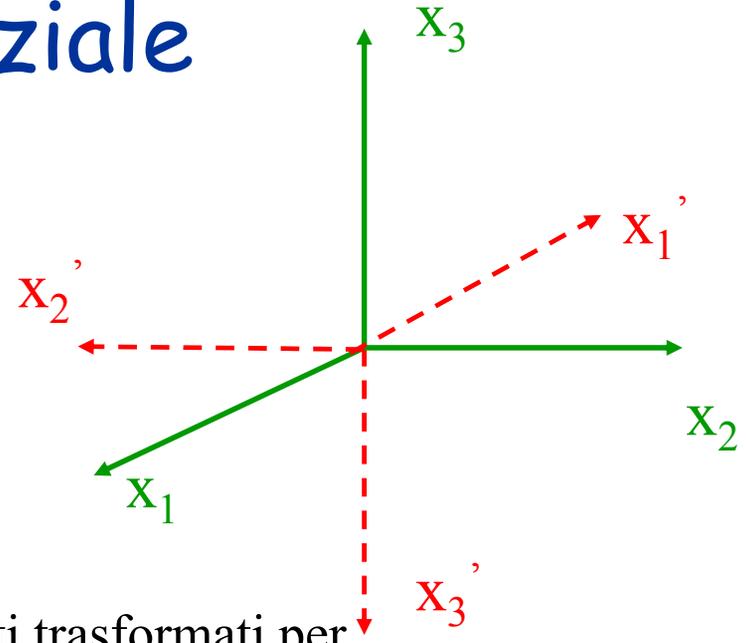
# Parità spaziale

Operatore inversione spaziale: **P**:

$$P(x_0, \vec{x}) = (x_0, \vec{x}') = (x_0, -\vec{x})$$

*left-handed*  $\leftrightarrow$  *right-handed*

P equivale a una rotazione di  $180^\circ$  attorno a un asse e a un' inversione speculare (discreta) (riflessione)



**Principio di invarianza:** se  $\alpha'$  e  $\beta'$  sono gli stati trasformati per P dagli stati  $\alpha$  e  $\beta$  e  $\omega$  è la probabilità di transizione tra i due stati vale:

$$\omega(\alpha, \beta) = \omega(\alpha', \beta')$$

Se in un'interazione lo stato fisico iniziale e finale hanno la stessa parità (gli autovalori sono +1 o -1 essendo P unitario), l'hamiltoniana dell'interazione H commuta con P:

$[H, P] = 0$  (ottengo lo stesso stato fisico misurando l'energia e poi invertendo gli assi o viceversa)

$\Rightarrow$  **H è uno scalare ex:** *l'impulso  $\vec{p}$  cambia segno con P, un momento angolare,  $\vec{L}, \vec{\sigma}$ , no*

$$\vec{L} \cdot \vec{\sigma} (\text{spin-orbita}), \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 (\text{spin-spin}), \frac{[3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})]}{r^2} - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\text{forza tensoriale})$$

Ex. Scattering pione nucleo:

$$\vec{p}_\pi \quad \vec{\sigma}_p \uparrow \quad \vec{p}_\pi' \quad \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_\pi'; (\vec{p}_\pi \times \vec{p}_\pi') \cdot \vec{\sigma}_p$$

**La parità è un numero quantico moltiplicativo**  $\psi = \phi_a \phi_b \phi_c \dots, P(\psi) = P(\phi_a)P(\phi_b)P(\phi_c) \dots$

## Parità singola particella

Ex. 1: il fotone. La corrente  $\mathbf{J}^\mu = (\rho, \vec{j}) \rightarrow (\rho, -\vec{j})$  ( $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ )

se vogliamo che anche l'interazione  $\mathbf{J}_\mu \mathbf{A}^\mu$  sia invariante per P allora  $\mathbf{A}^\mu = (A_0, \vec{A})$  dovrà trasformarsi come:

$$A_0(-\vec{x}) = A_0(\vec{x})$$

$$\vec{A}(-\vec{x}) = -\vec{A}(\vec{x})$$

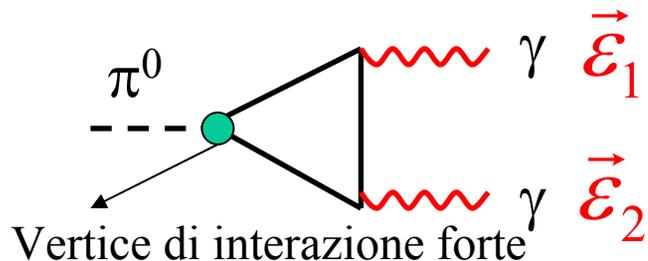
$$\vec{E}(-\vec{x}) = -\vec{\nabla} A_0(-\vec{x}) + \frac{\partial(\vec{A}(-\vec{x}))}{\partial t} = -\vec{E}(\vec{x}) \text{ vettore polare;}$$

$$\vec{B}(-\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(-\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) \text{ vettore assiale}$$

Definiamo  $\vec{A} = \vec{\varepsilon} \cdot f(x), \vec{\varepsilon} \xrightarrow{P} -\vec{\varepsilon}$  (parità del fotone: negativa)

La parità del campo è definita dalla parità del vettore polarizzazione

Ex. 2: il  $\pi^0$



$$\tau \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

$$\vec{J} = 0$$

La funzione d'onda dei due fotoni nello stato finale si deve trasformare con  $\vec{J} = 0$ , deve essere simmetrica nello scambio dei due fotoni e lineare nelle due polarizzazioni  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Ci sono due possibilità (dalla conservazione di P e di  $\vec{J}$ ):

$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2$  (Intensità prop. a  $\cos^2 \phi$ ) con parità  $P = +1$       **Se P è conservata:**  
 $(\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2) \cdot \vec{k}$  (Intensità prop. a  $\sin^2 \phi$ ) con parità  $P = -1$        **$P(\pi^0) = P(\gamma\gamma)P(\gamma)P(\gamma) = +1$  o  $-1$**   
 ( $\vec{k}$  vettore impulso relativo  $\gamma_1\gamma_2$  ( $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$  *perp.* a  $\vec{k}$ )  $\phi$  angolo tra le polarizzazioni)

N.B. Confronta con gli invarianti del campo elettromagnetico:

$$F_{ik} F^{ik} = (\vec{B}^2 - \vec{E}^2); \quad \epsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = (\vec{E} \cdot \vec{B}) \quad \text{con} \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

Sperimentalmente ci aspettiamo che se la parità è  $-1$  le due polarizzazioni  $\epsilon_1 \epsilon_2$  sono perpendicolari nel sistema in cui il  $\pi^0$  è a riposo (difficile perchè  $E_\gamma \approx 70$  MeV)

Si studia la conversione interna:  $\pi^0 \rightarrow e^+e^- e^+e^-$ :  (probabilità  $\sim 1/30000$  ( $\alpha^2$ ))

Esperimento in camera a bolle  $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$  (Plano et al. Phys. Rev. Lett. 3, 525 (1959))

Dopo i tagli sopravvivono 64 eventi.

**Si sfrutta la correlazione tra la polarizzazione dei fotoni e il piano di decadimento della coppia  $e^+e^-$**

B=5500 G  
 nota l'ambiguità  
 dell'accoppiamento  
 $e^+e^-$ , ma l'angolo tra le  
 coppie è piccolo  $\theta \sim 10^\circ$

FIG.  
 conver

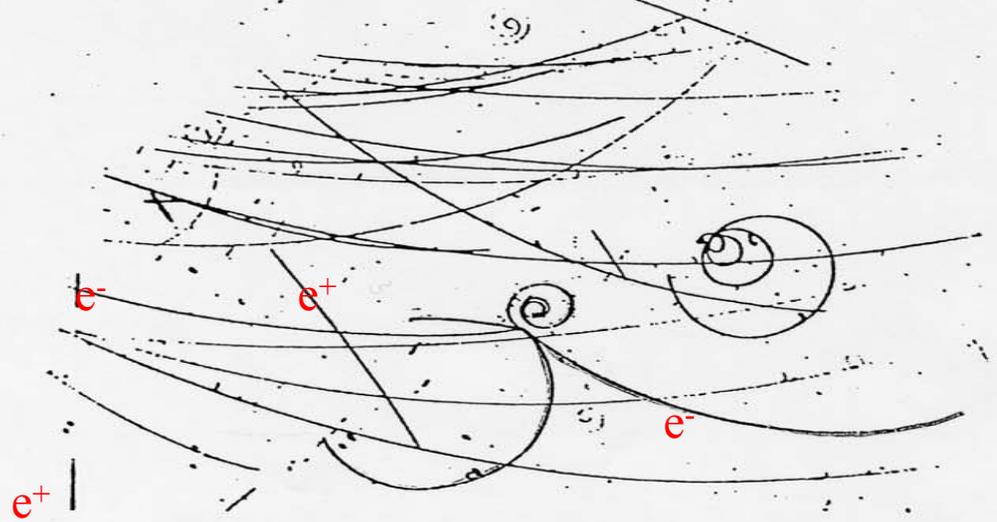


FIG. 1. A photograph of a typical double internal conversion.

$$1 + \alpha \cos 2\phi$$

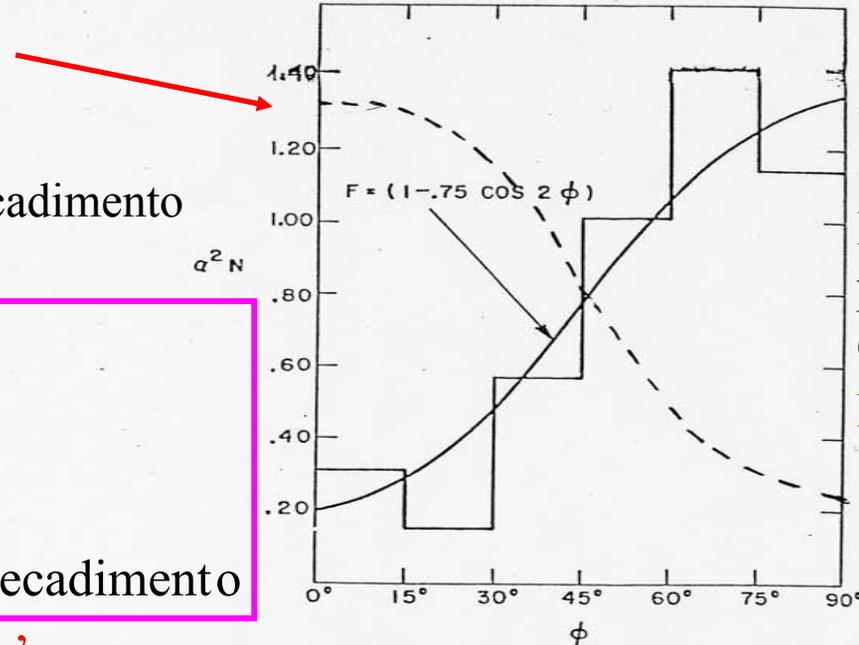


FIG. 2. Plot of weighted frequency distribution of angle between planes of polarization.

Il  $\pi^0$ , come  
 pure il  $\pi^+$ ,  $\pi^-$   
 è:  $J^P=0^-$ :  
**pseudoscalar**

Probabilità di misurare due piani di decadimento  
 ad un angolo  $\Phi$  (teorica):

$$E_s = 1 + \alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot \cos(2\phi)$$

$$E_{ps} = 1 - \alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) \cdot \cos(2\phi)$$

con  $x_1, y_1, x_2, y_2$

che dipendono dalla cinematica del decadimento

**Il segno di  $\alpha$  determina la parità'**

# Parità intrinseca

Nel caso del fotone il comportamento del vettore polarizzazione  $\vec{\varepsilon}$  determina la parità; questo è estensibile a ogni particella  $|a, \vec{p}\rangle$ :

$$\hat{P}|a, \vec{p}\rangle = \eta|a, \vec{p}\rangle, \text{ con } \eta = \text{parità intrinseca}$$

Ma  $\eta$  può essere definita in maniera assoluta (riferita al vuoto che viene assunto con  $\eta=1$ ) solo per i bosoni. Infatti:

$$\hat{P}'(n) = \hat{P}(n) + n \cdot 2\pi \text{ se } |a, \vec{p}\rangle \text{ è autostato di } \hat{P} \text{ (con autovalori } \pm 1)$$

Per i bosoni  $\hat{P}'(n)|a, \vec{p}\rangle = \eta|a, \vec{p}\rangle$

Per i fermioni  $\hat{P}'(n)|a, \vec{p}\rangle = \eta(-1)^n|a, \vec{p}\rangle$

La funzione d'onda per i fermioni è soluzione dell'equazione di Dirac (spinore) e cambia segno a ogni rotazione di  $2\pi$ . **Per i fermioni è solo definibile una parità relativa  $f/\bar{f}$** . Dirac:

**La parità relativa  $\bar{f}/f = -1$**

**Fermioni:**  $\hat{P}(f/\bar{f}) = -(-1)^l$  ( $l$  è il momento angolare orbitale)

**Bosoni**  $\hat{P}(f/\bar{f}) = (-1)^l$

Exp: parità relativa  $e^+e^-$  (C.S. Wu, Phys. Rev. 77, 136 (1949))

Stato  $^1S_0$  del positronio, stato legato  $e^+e^-$  che decade in due fotoni (vita media  $\sim 10^{-10}$  s)

Due funzioni d'onda possibili per i due fotoni:

$$\varphi(\gamma\gamma) = a(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2) \quad \text{scalare}$$

$$\varphi(\gamma\gamma) = b(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \vec{k} \quad \text{pseudoscalare}$$

**Si distinguono attraverso una misura della polarizzazione relativa**

In questo caso i fotoni hanno energie di  $\sim 0.5$  MeV e interagiscono prevalentemente per effetto Compton:

la direzione del fotone dopo lo scattering Compton dipende fortemente dalla sua polarizzazione, tende a essere perpendicolare (cfr radiazione di dipolo  $\perp$  al campo elettrico incidente che stabilisce anche la direzione di oscillazione del dipolo).

Il positronio viene creato con un flusso di  $e^+$  da una sorgente  $\text{Cu}^{64} \rightarrow \text{Ni}^{64} + e^+$  (vita media circa 12 ore).

**Conclusione: i due fotoni dopo lo scattering Compton sono diretti preferenzialmente ortogonalmente:  $\phi(\gamma\gamma)$  è pseudoscalare  $\implies$  se la parità è conservata nel decadimento la parità del sistema ( $e^+e^-$ ) (fermione/antifermione) è negativa**

# Conservazione della parità?

$\theta$ ,  $\tau$  puzzle: due particelle, con la stessa massa e vita media, ma diversi modi di decadimento:

$$\text{a) } \theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 (21\%), \quad \text{b) } \tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ (6\%)$$

Spin = 0,  $l=0$ : la parità del  $\theta$  vale:  $\eta_\theta = \eta(\pi^0) \eta(\pi^+) (-1)^0 = +1$

Nel caso del  $\tau$  definiamo:

$$\vec{l} = \text{momento angolare } \pi^+ \pi^+, \quad \vec{L} = \text{momento angolare } \pi^- (\pi^+ \pi^+)$$

$$\text{Spin} = 0 \Rightarrow \vec{l} + \vec{L} = 0 \Rightarrow l = L \Rightarrow \eta_\tau = (-1)^3 (-1)^{l+L} = -1$$

**Se la parità è conservata nel decadimento,  $\theta$  e  $\tau$  hanno parità opposta**

Vero anche per particelle di spin  $\neq 0$  (Dalitz) ( $\theta^+ = K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ ,  $\tau^+ = K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ ).

**Lee & Yang (Phys Rev. 104, 254 (1956)): analisi dei dati sperimentali:**

Le interazioni forti e elettromagnetiche conservano la parità

**Per le interazioni deboli (decadimento  $\beta$  e di alcune particelle instabili)**

**la conservazione della parità era solo un'estrapolazione**

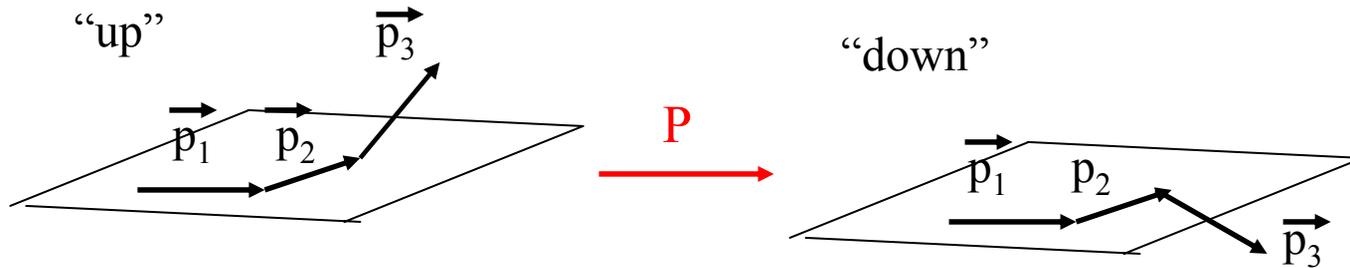
**E la gravità???**

# Metodi per la verifica della conservazione della parità

1) Se il valore di aspettazione di quantità pseudoscalari è  $\neq 0$ , la parità è violata  
 ex. 1)

$$(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3, \vec{J} \cdot \vec{p}$$

Doppio scattering di protoni su targhetta non polarizzata:

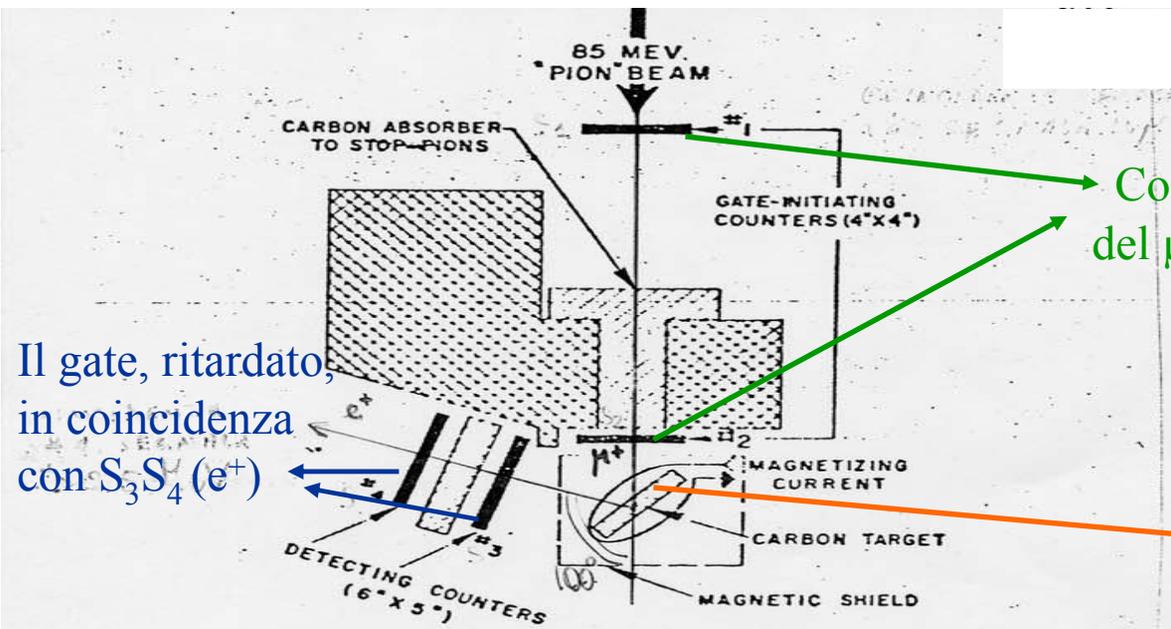


Per i decadimenti "up":  $(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 > 0$   
 Per i decadimenti "down":  $(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 < 0$   
 se  $\langle (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3 \rangle \neq 0 \Rightarrow$  *asimmetria "up" - "down"*  
 $\Rightarrow$  *violazione della parità*

Argomento analogo per il processo  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0 \rightarrow K^0 \pi^- p$  ( $\pi^0 n$ )  $(\vec{p}_{\pi, in} \times \vec{p}_{\Lambda}) \cdot \vec{p}_{\pi, out} \neq 0$

2)  $\langle \vec{J} \cdot \vec{p} \rangle \neq 0$  -Il sistema genitore polarizzato e la distribuzione delle particelle dipende  
 • da  $\cos\theta$  ( $\sin\theta$ ),  $\cos^3\theta$ , ... ( $\theta$  angolo rispetto alla polarizzazione  $\mathbf{J}$ )  
 -Genitore non polarizzato, elicità dei decadimenti:  $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \rangle \neq 0$





Il gate, ritardato, in coincidenza con  $S_3S_4$  ( $e^+$ )

Coincidenza  $S_1S_2$  segnala il passaggio del  $\mu$  e apre una finestra temporale (gate) di  $1.5 \mu s$

Il  $\mu$  si ferma nella targhetta di carbonio, si assume che conservi la sua polarizzazione

FIG. 1. Experimental arrangement. The magnetizing coil was close wound directly on the carbon to provide a uniform vertical field of 79 gauss per ampere.

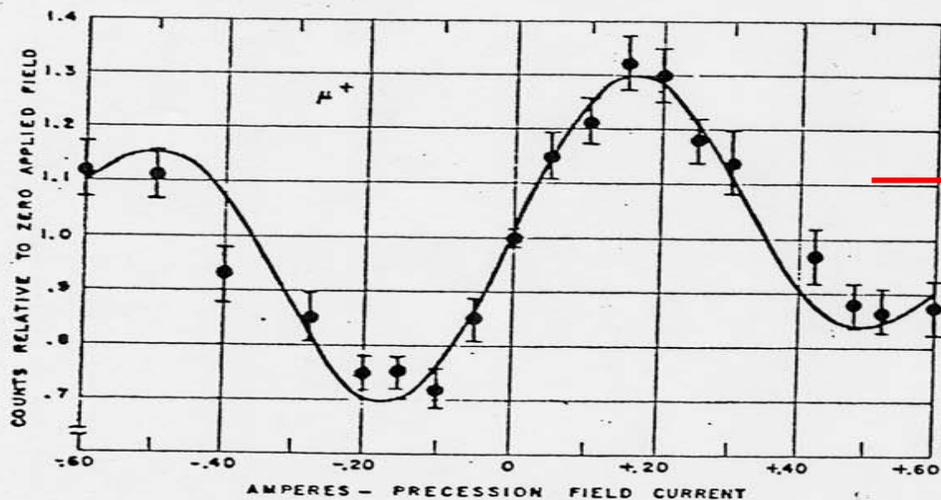


FIG. 2. Variation of gated 3-4 counting rate with magnetizing current. The solid curve is computed from an assumed electron angular distribution  $1 - \frac{1}{2} \cos \theta$ , with counter and gate-width resolution folded in.

Si studia la distribuzione dei positroni rispetto alla direzione della polarizzazione (spin) del  $\mu$   
 $\sim (1 + \alpha \cos \theta)$   
 i.e. in funzione della corrente che genera il campo magnetico

## Verifiche sperimentali:

- Riduzione dello spessore assorbitore (i pioni finiscono nella targhetta dei muoni), il rate
- aumenta di un fattore 10 e non dipende più dalla corrente (da H) infatti  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$  è isotropo;
- Il rivelatore di positroni è posizionato a  $\theta=65^\circ \Rightarrow$  la curva trasla di una fase che corrisponde
- a un angolo di precessione di  $\sim 37^\circ$  (100-65).

## **Risultati:**

- 1) Esiste un'asimmetria nella distribuzione di  $e^+$  ( $1+\alpha\cos\theta$ )  $\Rightarrow$  **il  $\mu$  è polarizzato,  $\alpha=-1/3$**
- 2) La parità in entrambi i decadimenti **non si conserva.**
- 3)  $g=2 \pm 0.1$
- 4) Spin del  $\mu = 1/2$
- 5) L'asimmetria nella distribuzione dei positroni non dipende dall'energia.

## Ex. Decadimento non leptonic

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 + K^0, \quad \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \quad \Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0; \tau \approx 3 \cdot 10^{-10} s$$

*due* interazioni : la prima forte, il decadimento della  $\Lambda$ , debole

*se*  $(\vec{p}_{\pi, in} \times \vec{p}_{\Lambda}) \cdot \vec{p}_{\pi, out} \neq 0 \Rightarrow$  asimmetria rispetto al

piano definito da  $\vec{p}_{\pi, in}, \vec{p}_{\Lambda} \Rightarrow$  violazione della parità

Esperimento effettuato nel laboratorio di Brookhaven (USA) con  $\pi^-$  di energia 0.88-1.4 GeV:

**Eventi “up” : 325 ( $\pm 18$ ) ; Eventi “down” : 215 ( $\pm 15$ )**

**In altre parole: la direzione del  $\pi^-$ , quella della  $\Lambda$  e la direzione preferenziale di decadimento formano una terna di assi (right-handed) riconoscibile (assoluta).**

# Coniugazione di carica C

La meccanica quantistica relativistica prevede che a una particella corrisponda un'antiparticella con la stessa massa e spin (Dirac 1931: esistenza dei positroni  $e^+$ ).

L'operatore coniugazione di carica **C** cambia il segno della carica elettrica e del momento magnetico di una particella, per i leptoni e barioni cambia anche il segno del numero barionico e leptonico.

Classicamente le equazioni di Maxwell sono invarianti per C.  
(cambiano segno cariche e correnti e anche i campi)

Ex. 
$$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle, C|e^-\rangle = |e^+\rangle, C|p\rangle = |\bar{p}\rangle$$

Gli autostati di C sono le particelle veramente neutre:  $\gamma, \pi^0, \eta^0, \rho^0, \phi^0, (e^+e^-), (\bar{p}p), \dots$   
con  $C(\psi) = \pm \psi$

N.B. Ci sono particelle neutre che non sono autostati di C ex: neutrone, atomo di idrogeno  
Infatti  $C|n\rangle = |\bar{n}\rangle \neq |n\rangle$ .

C inverte tutti i numeri quantici eccetto l'impulso e lo spin:

$$C|Q, I_3, B, Y, L, \vec{p}, \vec{s}\rangle = |-Q, -I_3, -B, -Y, -L, \vec{p}, \vec{s}\rangle$$

**Quindi solo gli stati con  $Q=I_3=B=L=0$  possono essere autostati dell'operatore parità di carica C**

**La coniugazione di carica è un numero quantico moltiplicativo**

Le interazioni **forti e elettromagnetiche sono invarianti** sotto C (dato sperimentale).

Ex. nella reazione forte:  $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \dots, p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^- + \dots$

il numero e le distribuzioni di particelle finali positive e negative sono eguali (entro 1%).

Ex. nel decadimento elettromagnetico:  $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma, \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

si studiano gli spettri di energia dei pioni positivi e negativi: sono eguali entro l'errore

## **Le interazioni deboli non sono invarianti per C.**

Ex 1)  $\nu: \overset{s}{\leftarrow} \vec{p} \xrightarrow{C} \bar{\nu}: \overset{s}{\leftarrow} \vec{p}$  **Ma l'antineutrino sinistrorso non esiste in natura!**

Devo fare CP  $|\nu\rangle = |\bar{\nu}\rangle$  per avere **l'antineutrino fisico destrorso**

Ex 2)  $K_{0L} \rightarrow \frac{e^+ \pi^- \nu}{e^- \pi^+ \bar{\nu}} = 1.00648 \pm 0.00035$

**Ex. 3) L'universo consiste di materia e non di antimateria: violazione di C nella sua evoluzione? Asimmetria iniziale?**

# Coniugazione di carica particella/antiparticella

Coppie particella antiparticella sono veramente neutre:  $(\pi^+\pi^-), (K^+K^-), (K^0, \bar{K}^0), (p\bar{p}), (\pi^0\pi^0)$

a) Coppie di bosoni distinguibili:  $(\pi^+\pi^-), (K^+K^-), \dots$

C ha lo stesso effetto dello scambio delle coordinate:

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1, x_2, s_2, Q_2) \xrightarrow{C} \eta_c \Phi(x_2, s_2, Q_1, x_1, s_1, Q_2)$$

$x_1 \Leftrightarrow x_2$   $(-1)^l$  Parte orbitale (equivalente a inversione spaziale)

$(-1)^S$  Proprietà dei coefficienti CG per addizione di 2 spin interi con S come risultato.

$$\Rightarrow \eta_c = (-1)^{l+S}$$

b) Coppie di bosoni indistinguibili:  $(\pi^0\pi^0), (\rho^0\rho^0), \dots$

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1, x_2, s_2, Q_2) \xrightarrow{C} \eta_c \Phi(x_2, s_2, Q_1, x_1, s_1, Q_2)$$

Funzione d'onda simmetrica  $\Rightarrow \eta_c = +1$  ma vale ancora:  $\eta_c = (-1)^{l+S} : (-1)^{l+S} = 1$ .

c) Coppie di fermioni distinguibili:  $(e^+e^-), (p\bar{p}), (q\bar{q}), \dots$

Parte orbitale  $(-1)^l$ , parte di spin  $(-1)^{S+1}$  (caratteristiche coefficienti CG)

+ parità relativa fermione/antifermione. In totale:

$$\underline{\eta_c = (-1)^l (-1)^{S+1} (-1) = (-1)^{l+S}}$$

**La parità di carica del sistema (se autostato) prima e dopo l'interazione è la stessa:  
l'hamiltoniana dell'interazione è uno scalare per C**

Parità di carica del fotone

$J^\mu A_\mu$  è invariante ma  $C(J_\mu) = -J_\mu \Rightarrow C(A_\mu) = -A_\mu \Rightarrow \varepsilon_\mu \xrightarrow{C} -\varepsilon_\mu$

Quindi:  $C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \Rightarrow C|n\gamma\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle$

Se C è **conservato nella interazione o nel decadimento** porta a regole di selezione:

Pseudo scalari  $\left\{ \begin{array}{l} \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma, \quad \pi^0 \not\rightarrow \gamma\gamma, \quad C(\pi^0) = (-1)^2 = +1 \\ \eta^0 \rightarrow \gamma\gamma, \quad \eta^0 \not\rightarrow \gamma\gamma, \quad C(\eta^0) = (-1)^2 = +1 \end{array} \right\} \quad I=S=0$

Vettoriali  $\left\{ \begin{array}{l} \rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \quad \rho^0 \not\rightarrow \eta^0\pi^0, \quad \rho^0 \not\rightarrow \pi^0\pi^0, \quad C(\rho^0) = -1 (\eta_C = (-1)^{l+S}) \\ \omega^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \quad \omega^0 \not\rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 \quad C(\omega^0) = -1 \end{array} \right.$

$\omega^0$  ha I-spin=0 quindi  $I(\pi^+\pi^-)$  o  $I(\pi^0\pi^0)$  e  $I(\pi^0)=1$  ma per la simmetria sotto C, I-spin è come lo spin ordinario:  $\eta_C=(-1)^l$  quindi  $C(\omega^0)=(-1)^l C(\pi^0) = -1 \cdot 1 = -1$ , ma la funzione d'onda è anche antisimmetrica per lo scambio  $\pi^0\pi^0$  con  $I=1$ , ma globalmente  $\pi^0\pi^0$  deve essere simmetrico

$$\Rightarrow l(\pi^0\pi^0) = 1, C(\pi^0\pi^0) = (-1)^l (-1)^l = +1 \text{ e } C(\omega^0) = (+1)^{\pi^0\pi^0} \cdot (+1)^{\pi^0}$$

Nel caso invece di  $\pi^+\pi^-\pi^0$ ,  $l(\pi^+\pi^-)$  può essere anche 0

# Coniugazione di carica nelle interazioni deboli

$$\begin{array}{c}
 \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \quad \xrightarrow{C} \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \\
 \mu^+ : \vec{p} \xleftarrow{s} \quad \nu : \vec{p} \xrightarrow{s} \quad \xrightarrow{C} \quad \mu^- : \vec{p} \xleftarrow{s} \quad \bar{\nu} : \vec{p} \xrightarrow{s}
 \end{array}$$

C non agisce sullo spazio tempo, ma cio' implica un antineutrino con elicit  negativa ! Quindi le interazioni deboli violano C

$$\begin{array}{c}
 DIS : \nu_\mu n \rightarrow \mu^- p \quad \xrightarrow{C} \quad \bar{\nu}_\mu \bar{n} \rightarrow \mu^+ \bar{p} \\
 \mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \quad \xrightarrow{C} \quad \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu
 \end{array}$$

Ancora  $\bar{\nu}$  LH!  
 $e^+e^- e^- \nu e \bar{\nu}$   
 avrebbero la stessa elicit !

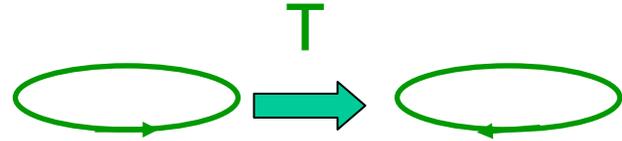
Evidenza sperimentale: solo le particelle con elicit   $\lambda$  negativa (e le antiparticelle con elicit  positiva) partecipano alle interazioni deboli e quindi violano C.

$$(\lambda = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \pm \frac{1}{2} \text{ se } s = 1/2)$$

L'invarianza   ripristinata con l'operatore combinato **CP**

# Inversione temporale T

Def:  $[t, \vec{x}] \xrightarrow{T} [-t, \vec{x}]: \vec{p} \rightarrow -\vec{p}; E \rightarrow E$   
 $\vec{M} \rightarrow -\vec{M}; \vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$



Combinazioni che cambiano segno sotto T:

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2), \text{ex. } K^+ \rightarrow \pi^0 \mu^+ \nu (\vec{\sigma}_\mu \cdot (\vec{p}_\pi \times \vec{p}_K))$$

$\sigma_\mu$  perpendicolare al piano  $\vec{p}_\pi - \vec{p}_K$

e combinazioni che non cambiano segno:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}; \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

In elettrodinamica: le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\rho \xrightarrow{T} \rho$$

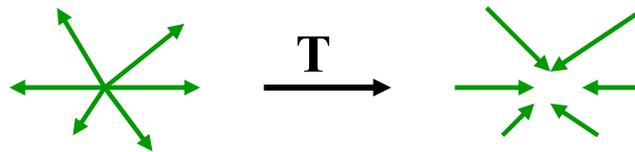
$$\vec{j} \xrightarrow{T} -\vec{j}$$

Restano invarianti se:

$$T(\vec{E}(t)) = \vec{E}(-t)$$

$$T(\vec{B}(t)) = -\vec{B}(-t)$$

Il vettore di Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} \xrightarrow{T} -\vec{S}$ :



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow T(\phi) = \phi(-t), T(\vec{A}) = -\vec{A}(-t) \Rightarrow T^2(A_\mu) = A_\mu$$

## Il fotone è autostato di $T^2$ con autovalore +1

Se esistesse un monopolo magnetico ci sarebbero una carica e una corrente magnetiche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_M$$

$$\rho_M \xrightarrow{T} \rho_M$$

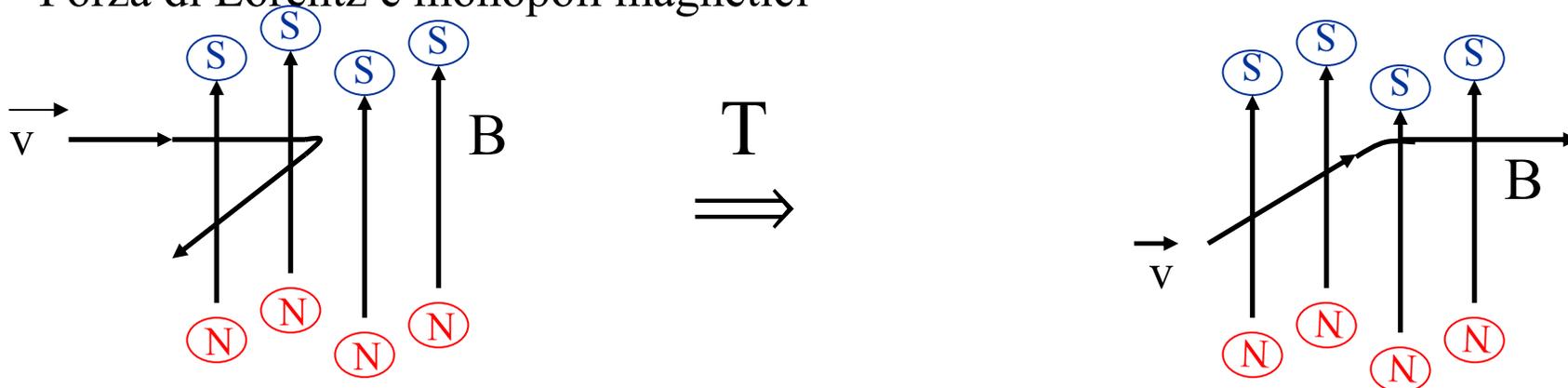
Le equazioni di Maxwell sarebbero simmetriche nei campi e correnti

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_M$$

$$\vec{j}_M \xrightarrow{T} -\vec{j}_M$$

ma non sarebbero invarianti sotto T

Forza di Lorentz e monopoli magnetici



**Invarianza per T violata nel moto della particella**

# Momento di dipolo elettrico e invarianza per T

Euristicamente: le sole quantità vettoriali associate a una **particella elementare** sono:  
l'impulso  $\vec{p}$  e lo spin  $\vec{s}$

Per una particella a riposo ho un dipolo elettrico:  $\vec{d}_e = d_e \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$

Il dipolo elettrico in un campo elettrico esterno ha un'energia H:

$$H = -\vec{d}_e \cdot \vec{E} = -d_e \frac{\vec{s} \cdot \vec{E}}{|\vec{s}|} \quad \text{per } T : \vec{E} \xrightarrow{T} \vec{E}; \vec{d}_e \xrightarrow{T} -\vec{d}_e (\text{spin}) \Rightarrow$$

## Violazione di T e della parità

N.B. Devono essere particelle elementari: gli atomi e le molecole possono avere momento di dipolo elettrico.

**$\Rightarrow$  Tutte le particelle elementari con spin  $\neq 0$  devono avere dipolo elettrico nullo**

Limiti sperimentali:  $d_e$   $\left\{ \begin{array}{l} < 0.6 \cdot 10^{-25} \text{ e cm (neutrone)} \\ = 0.07 \pm 0.07 \cdot 10^{-26} \text{ e cm (elettrone)} \\ < -0.54 \cdot 10^{-23} \text{ e cm (protone)} \end{array} \right.$

Se il neutrone fosse grande come la terra il limite corrisponde a due cariche elettriche elementari di segno opposto al suo centro separate di 1  $\mu$ .

# Speculazioni

Il massimo dipolo elettrico che ci potremmo aspettare senza restrizioni della simmetria è:

$$\frac{d_e}{e} \approx \text{lunghezza d'onda Compton del neutrone} \approx 10^{-14} \text{ cm}$$

Se attribuiamo il dipolo elettrico solo alla parte debole dell'interazione che viola T:

$$\frac{d_e}{e} \approx 10^{-14} G_F m_p^2 \approx 10^{-19} \text{ cm}$$

**Molto maggiore del limite sperimentale di  $10^{-25} \text{ cm}$**



Le violazioni di T dovute alle interazioni deboli sono (se ci sono) causate da interazioni molto più deboli (oppure a interazioni deboli a ordine superiore)

Una stima dedotta dalla violazione di CP darebbe:

$$d_e(\text{neutrone}) \sim 10^{-32} e \cdot \text{cm}$$

# CPT (PTC, TCP, ...)

Particella → antiparticella  
Destra → sinistra  
Passato → futuro

$$\text{CPT} \equiv \Theta$$

Teorema CPT (T.D. Lee: “Particle physics, an introduction to field theory”)

Ogni densità lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$ , invariante di Lorentz e che soddisfi le prescrizioni di spin-statistica, si trasforma come:

$$\Theta \mathcal{L}(x) \Theta^{-1} = \mathcal{L}^\dagger(-x)$$

Ma in ogni teoria quantistica  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger \implies$  l'azione  $\int \mathcal{L} d^4x$  è invariante per CPT

Conseguenze:

$$m(p) = m(\bar{p}) : \text{test } \frac{m(e^+) - m(e^-)}{m(e^+) + m(e^-)} < 4 \cdot 10^{-8}, \frac{m(K_0) - m(\bar{K}_0)}{m(K_0) + m(\bar{K}_0)} < 10^{-19}$$

$$\tau(p) = \tau(\bar{p}) : \frac{\tau(\mu^+)}{\tau(\mu^-)} = 1.00002 \pm 0.00008$$

$$\sigma(A + B \rightarrow C + D) = \sigma(\bar{A} + \bar{B} \rightarrow \bar{C} + \bar{D}), \text{ ex : } \sigma(pp) = \sigma(\bar{p}\bar{p})$$

*momento magnetico  $\mu$  particella = -momento magnetico antiparticella :*  
 $(\mu(e^+) - \mu(e^-)) / (\mu(e^+) + \mu(e^-)) = -(1 \pm 4) \cdot 10^{-12}$

**Se uno o due dei tre operatori è violato (ex CP)**  
**anche il terzo lo deve essere (ex. T)**

# Bibliografia

- **D.Perkins**, “Introduction to high energy physics”, Cambridge University Press, 1999;
- **D.Griffith**,”Introduction to elementary particles” Harper & Row, Publisher, New York, 1987;
- **Q.Ho-Kim and P.Xuan Yem**, “Elementary Particles and their interactions”, Springer Verlag, 1998.