LA METRICA CON SIMMETRIA SFERICA NELLE COORDINATE DI LEMAÎTRE

Scopo :ricavare dalle equazioni di Einstein la metrica con simmetria sferica nelle coordinate di Lemaître, usualmente ottenuta in letteratura dalla metrica con simmetra sferica nelle coordinate di Schwarzschild mediante una trasformazione di coordinate.

Riferimenti bibliografici :

i) spunti forniti dal Prof. R. Vergara-Caffarelli
ii) confronto con i risultati ottenuti da A. Papapetrou ("Lectures on General Relativity", Reidel, Dordrecht, 1974) che risolve le equazioni di Einstein in presenza di materia

Simmetria sferica e sistemi sincroni

In un campo gravitazionale a simmetria sferica lo spazio-tempo ha un sottospazio bidimensionale massimamente simmetrico di tipo spazio i cui vettori di Killing sono le rotazioni intorno ad un qualunque asse passante per il centro di simmetria.

Il generico intervallo per la simmetria sferica:

$$ds^2 = - e^{2\gamma(r,t)} dt^2 + e^{2\lambda(r,t)} dr^2 + \\ + e^{2\mu(r,t)} \left(d\theta^2 + sen^2\theta \, d\phi^2 \right)$$

Scopo : determinare le componenti di $g_{\mu\nu}$ nell'ipotesi di sistema di riferimento sincrono

$$e^{2\gamma(r,t)} = 1$$

Equazioni di Einstein

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2} g^\mu_\nu R = - 8\pi G T^\mu_\nu$$

Soluzione delle equazioni di Einstein per la metrica di Lemaître.

Equazioni di Einstein per un generico sistema sincrono:

$$\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 + 2\ddot{\mu} + 2\dot{\mu}^2 = 0 \qquad [1]$$

$$\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\dot{\mu} - e^{-2\lambda}\left(2\mu'' + 2\mu'^2 - 2\mu'\lambda'\right) = 0 \qquad [2]$$

$$\ddot{\mu} + 2\dot{\mu}^2 + \dot{\mu}\dot{\lambda} - e^{-2\lambda}\left(\mu'' + 2\mu'^2 - \mu'\lambda'\right) = -e^{-2\mu} \qquad [3]$$

$$\mu'\left(\dot{\lambda} - \dot{\mu}\right) = \dot{\mu}' \qquad [4]$$

Fra tutte le soluzioni delle [1] - [4] sarà ottenuta una soluzione particolare che individua un particolare sistema di riferimento.

Dalla [4]

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\lambda - \mu - \lg|\mu'|\right) = 0 \qquad [5]$$

$$e^{\lambda - \mu} = \pm\, e^{f(r)}\, \mu'$$

si sceglie f(r)=0 ed il segno positivo. L'ipotesi $\mu'>0$ implica che l'area dell'ipersuperficie bidimensionale di tipo spazio ($A = 4\pi\ e^{2\mu\ (r,t)}$) è funzione crescente di r.

$$\boxed{e^{\lambda - \mu} = \mu'} \qquad [6]$$

Derivando ln della [6] rispetto alla coordinata r

$$\lambda'\mu' - \mu'^2 - \mu'' = 0$$

$$\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\dot{\mu} = 0 \qquad [2']$$

$$\ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 - \dot{\mu}\dot{\lambda} = 0 \qquad [1']$$

Integrando [1']

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\lambda - \mu - \ln|\dot{\mu}|\right) = 0 \qquad [7]$$

Sottraendo [7] a [5]

$$\boxed{\dot{\mu} = \pm\, \tilde{\tilde{K}}(r)\, \mu'} \qquad [8]$$

dove $\tilde{\tilde{K}} = e^{\tilde{f}(r)}$

In particolare nella [8] si utilizza il <u>segno</u> <u>negativo</u>

Nella [3] la [1'] ed $e^{-2\lambda}$ dalla [6]

$$3\dot{\mu}^2 + 2\ddot{\mu} = 0 \qquad [3']$$

Integrando

$$\dot{\mu} = \pm \widehat{R}(r)\, e^{-3/2\,\mu} \qquad \text{con } \widehat{R}(r) = e^{R(r)}.$$

Integrando

$$\boxed{e^{2\mu} = \frac{3}{2}\widehat{R}(r)\left(F(r) \pm t \right)} \qquad [9]$$

Il ln della [9] pone la condizione

$$\boxed{F(r) \pm t > 0} \qquad [10]$$

derivando ln [9]

$$\dot{\mu} = \frac{2}{3}\;\frac{\pm 1}{F(r) \pm t}$$

$$\mu' = \frac{\dot{\widehat{R}}(r)}{\widehat{R}(r)} + \frac{2}{3}\;\frac{F'(r)}{F(r) \pm t} \qquad [11]$$

Dal confronto tra la [8] $\dot{\mu} = -\widetilde{K}(r)\,\mu'$ e le [11]

$$\boxed{\widehat{R}(r) = \text{costante} = \widehat{R}_o} \qquad [12]$$

$$\dot{\mu} = \frac{2}{3}\,\frac{\pm 1}{F(r) \pm t}$$

$$\mu' = \frac{2}{3}\,\frac{F'(r)}{F(r) \pm t} > 0 \qquad [13]$$

Dalle [13], la relazione [8] è soddisfatta per $\widetilde{K}(r)$ e $F(r)$ tali che $F'(r)\ \widetilde{K}(r) = +1$ (le [13] con il segno positivo sono incompatibili con le condizioni $\mu' > 0$ e $F(r) + t > 0$ [10])

Per $K = 1$ $\boxed{F(r) = r}$ [14]

Si ottiene quindi

$$\dot{\mu} = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{r - t}$$

$$\mu' = \frac{2}{3}\,\frac{1}{r - t} \qquad [13']$$

valida per $\boxed{r - t > 0}$ [15]

dalla [10] e $\mu' > 0$

Dalle [14] e [12], la [9]

$$e^{2\mu} = \left(\frac{3}{2}\widehat{R}_o\right)^{4/3}(r - t)^{4/3} \qquad [9']$$

$$e^{2\lambda} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\widehat{R}_o\right)^{4/3}\left(x^1 - x^o\right)^{-2/3}$$

per la [6] e [13']

Ponendo

$$t \rightarrow x^o \qquad\qquad r \rightarrow x^1$$

$$ds^2 = - dx^{o2} + \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\widehat{R}_o\right)^{4/3}\frac{dx^{12}}{\left(x^1 - x^o\right)^{2/3}} +$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\widehat{R}_o\right)^{4/3}\left(x^1 - x^o\right)^{4/3}\left(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2\right)$$

<u>OSSERVAZIONI</u>

- La metrica ottenuta non è statica
- La metrica non è asintoticamente piatta
- Il Teorema di Birkhoff assicura che la soluzione ottenuta è equivalente alla soluzione di Schwarzschild (che è statica) e che da essa differisce per una trasformazione di coordinate

Valutazione di $\widehat{R}_o$

-Non è possibile utilizzare i risultati della Teoria Newtoniana poiché la metrica non è asintoticamente piatta

-Si fa il confronto con Schwarzschild utilizzando la trasformazione di variabili

Trasformazione di coordinate

x^o, x^1 coordinate nel sistema sincrono
t, r coordinate di Schwarzschild

$$x^0 = -t + \int \left(\frac{\sqrt{R_o}}{\sqrt{r}} + \frac{\frac{\sqrt{R_o}}{\sqrt{r}}}{\frac{r}{\sqrt{R_o}^{2}} - 1} \right) dr$$

[16]

$$x^1 = -t + \int \left(\frac{\sqrt{R_o}}{\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{r}}{R_o} + \frac{\frac{\sqrt{R_o}}{\sqrt{r}}}{\frac{r}{\sqrt{R_o}^{2}} - 1} \right) dr$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_o^2}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{R_o^2}{r}}\right) + dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

[17]

L'intevallo di Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + r^2\, d\Omega^2$$

[18]

Confrontando [17] e [18]

$$\boxed{\widehat{R}_o^2 = 2GM}$$

Metrica di Lemaître

$$ds^2 = -dx^{o2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3}(2GM)^{2/3}\frac{dx^{1\,2}}{\left(x^1 - x^o\right)^{2/3}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{2/3}(2GM)^{2/3}\left(x^1 - x^o\right)^{4/3} d\Omega^2$$

[17']

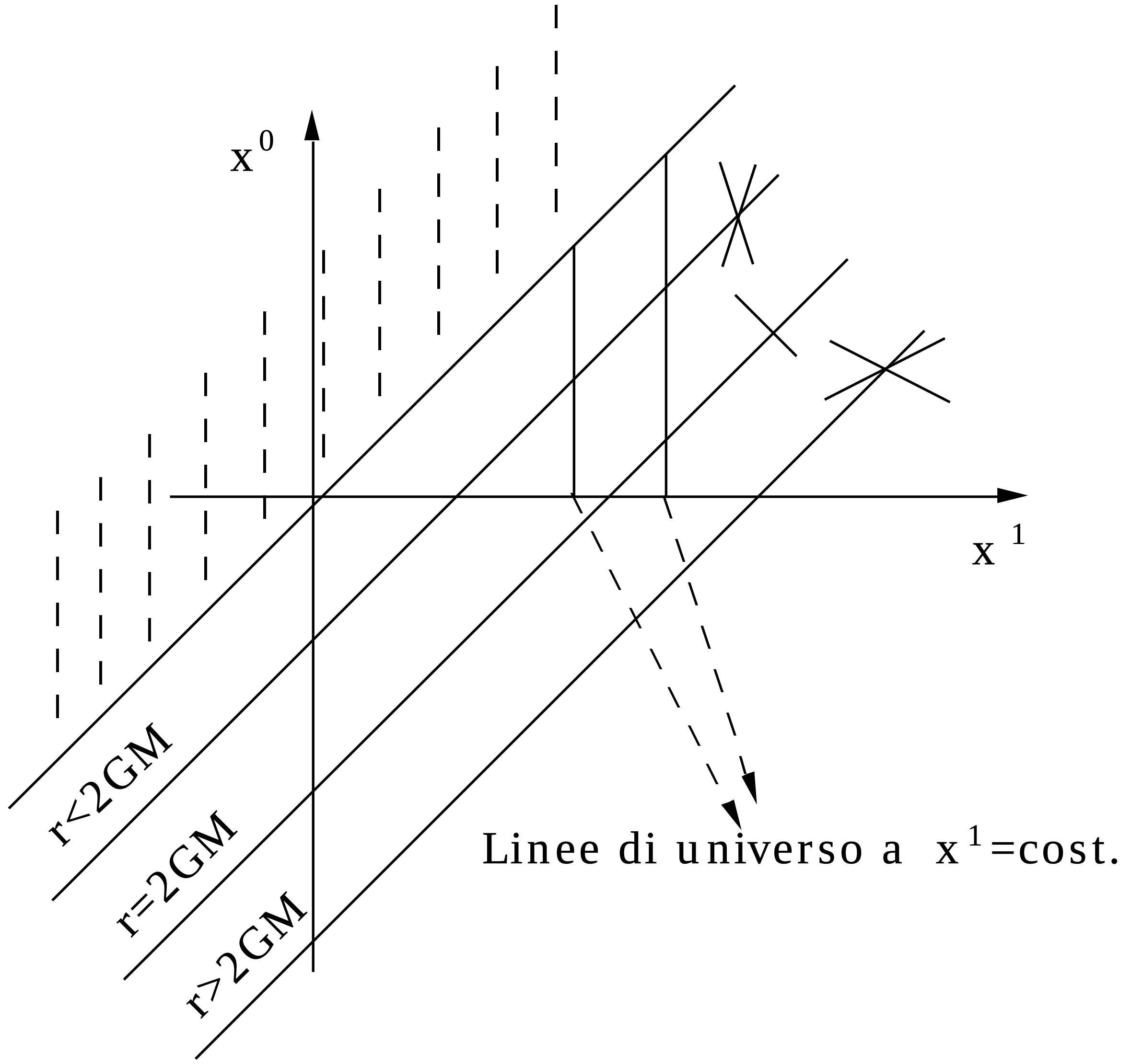
Metrica di Lemaître

- $x^1 - x^o > 0$ [15]

- è singolare a $x^1 = x^o$

- $x^1 - x^o = \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{2GM}}$ dalle [16]

Ipersuperficie $d\Omega^2 = 0$



1) Le ipersuperfici r = costante $d\Omega^2 = 0$ della metrica di Schwarzschild nella metrica di Lemaître sono rette parallele alla singolarità

2) La metrica di Lemaître non ha orizzonte a r=2GM e, in particolare, ha un'unica soluzione interna ed esterna. La coordinata x^1 è ovunque spaziale e la x^o ovunque temporale.

3) r > 2GM   cono luce contiene retta r = cost.
r < 2GM   cono luce non contiene r = cost.

per r < 2MG tutto si propaga verso la singolarità

4) Le linee di universo a x^1 = costante sono rette parallele all'asse dei tempi x^o, in particolare sono geodetiche. Infatti l'equazione delle geodetiche per le linee del tempo

$$\frac{du^i}{dt} + \Gamma^i_{oo}\, u^o\, u^o = 0$$

è automaticamente verificata poiché $u^o = 1$ e $\Gamma^\alpha_{oo} \equiv 0$

5) L'osservatore che nella metrica di Lemaître ha

coordinate x^1 = costante, θ = costante, ϕ = costante soddisfa la

$$dx^1 = 0$$

differenziando la [16] e sostituendo nell'intervallo di Schwarzschild a $d\Omega^2 = 0$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{1 - 2\,\frac{GM}{r}} \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{dt}{dr} = 0$$

Equazioni dell'orbita di una particella che ha velocità nulla all'infinito e che cade radialmente verso la singolarità

8) ipersuperficie x^o = costante ipersuperficie piatta

$$ds^2 = \left(\frac{9}{2} GM \right)^{2/3} \left(d\rho^2 + \rho^2 \, d\Omega^2 \right)$$

con $\rho = \left(x^1 - x^o \right)^{2/3} = \rho$

Vettore di Killing di tipo tempo

La simmetria sferica ha un vettore di Killing di tipo tempo ($\xi^{\mu}\ \xi_{\mu}$ <0). Nella metrica di Schwarzschild, adattata al carattere statico della simmetria sferica $\xi^{\mu} = (1,0,0,0)$.

Nella metrica di Lemaître $\tilde{\xi}^{\mu} = (-1, -1, 0,0)$.

$$dx_s^{\mu} = \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \tilde{x}^{\nu}} \qquad\qquad x' > x^{o}$$

$$\frac{\delta x^{\mu}}{\delta \tilde{x}^{\nu}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\frac{r}{2GM}}{\frac{r}{2GM} - 1} & \dfrac{1}{\frac{r}{2GM} - 1} \\ \\ -\sqrt{\dfrac{2GM}{r}} & \sqrt{\dfrac{2GM}{r}} \end{pmatrix}$$

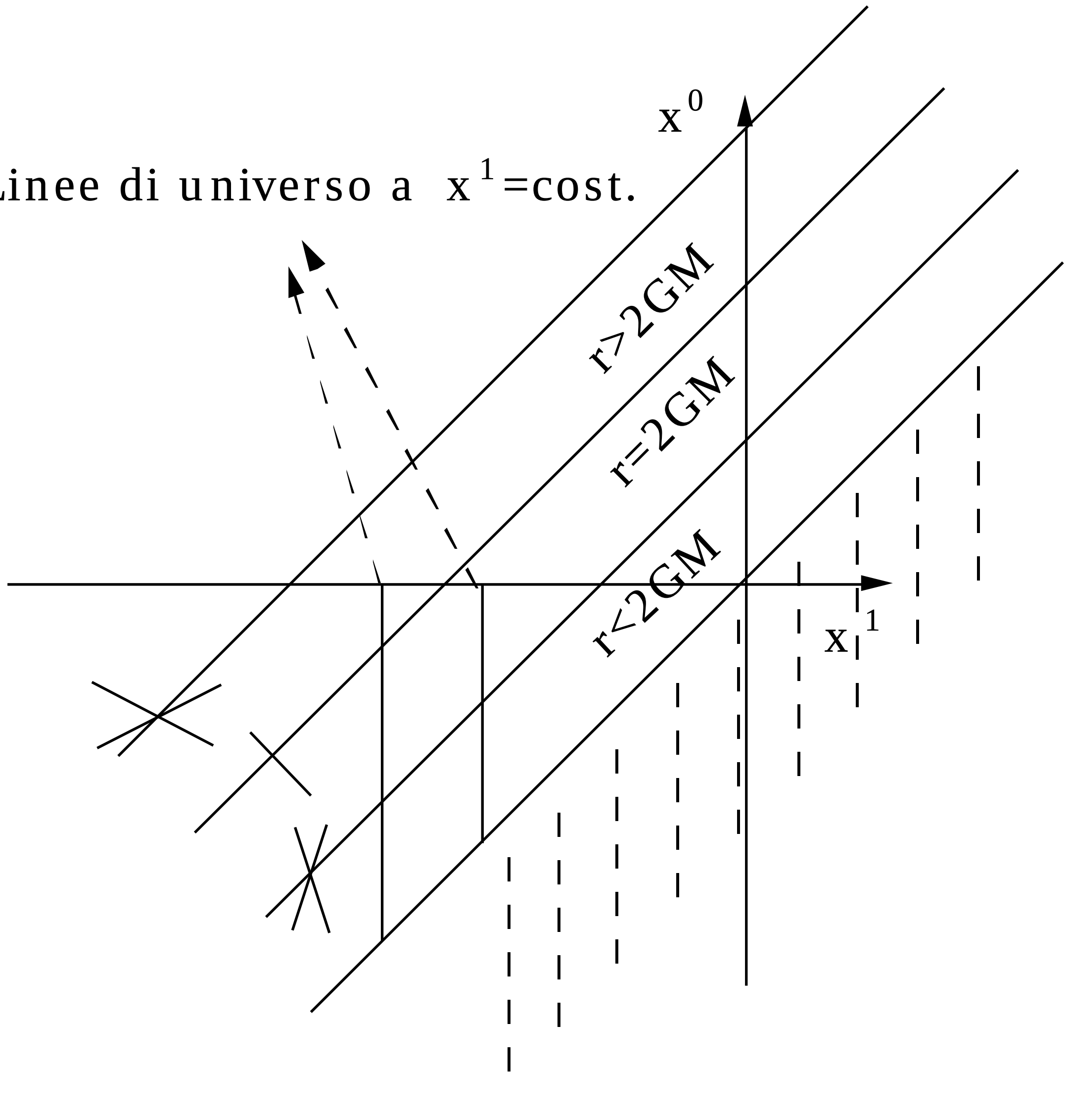
Soluzione delle equazioni di Einstein valida nel semipiano $x' < x^o$ $(\mu' < 0 \ \dot{\mu} = - \mu')$

1) $$ds^2 = - dx^{o2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3} (2GM)^{2/3} \frac{dx^{12}}{(x^1 - x^o)^{2/3}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{2/3} (2GM)^{2/3} (x^1 - x^o)^{4/3} d\Omega^2$$

2) $$x^1 - x^o = - \frac{4}{3} GM \left(\frac{r}{2GM}\right)^{3/2}$$

3) Vettore di Killing $\tilde{\xi}^\mu = (1, 1)$

Linee di universo a x^1=cost.

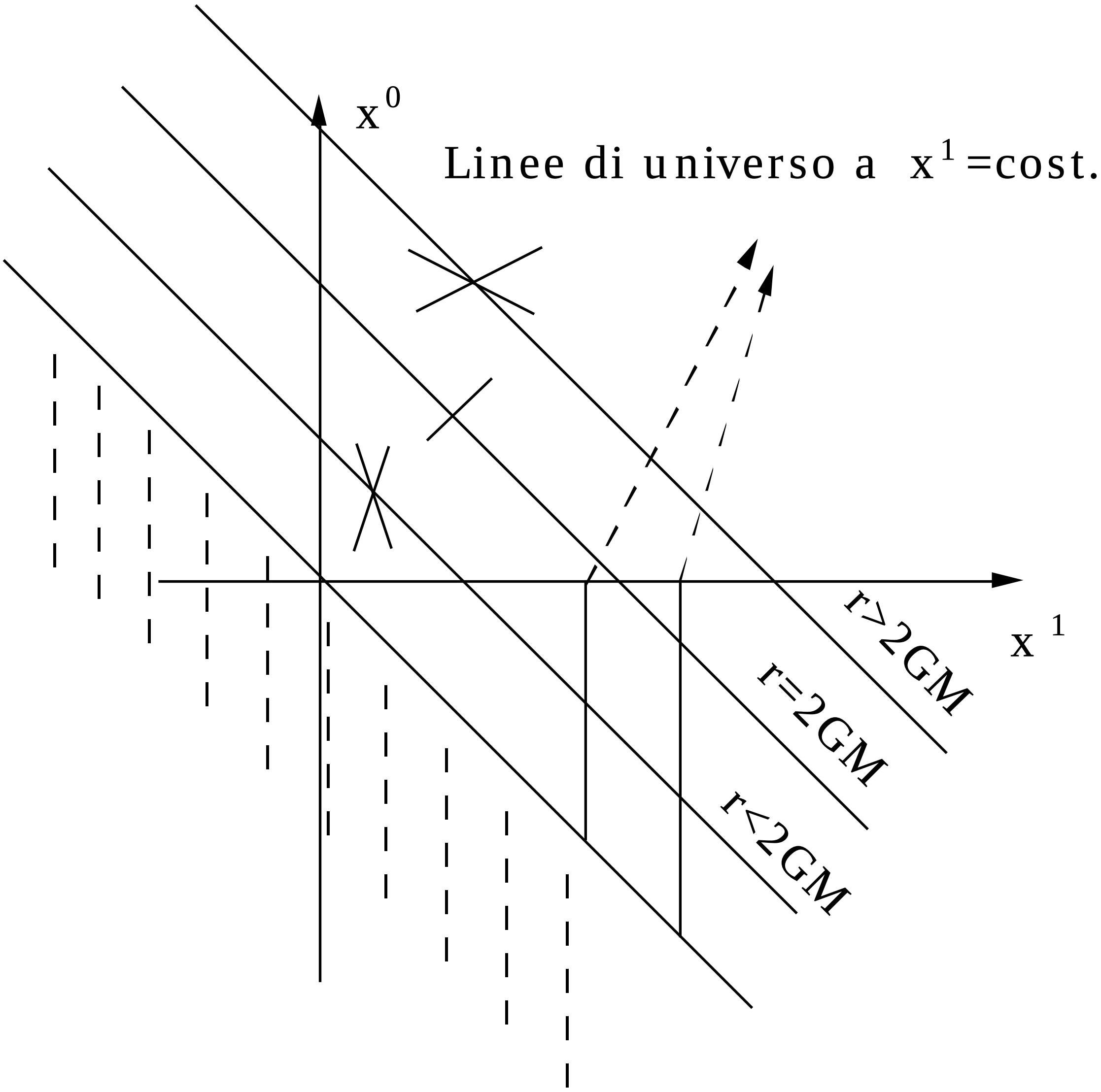


[3] $\mu' > 0 \ \dot{\mu} = \mu'$

1) $$ds^2 = -\,dx^{o2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3} (2GM)^{2/3} \frac{dx^{1\,2}}{\left(x^1 + x^o\right)^{2/3}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{2/3} (2GM)^{2/3} \left(x^1 + x^o\right)^{4/3} d\Omega^2$$

2) $$x^o + x^1 = \frac{4}{3}\, GM \left(\frac{r}{2GM}\right)^{3/2}$$

Inversione temporale ($x^o \rightarrow -\,x^o$) della metrica di Lemaître.

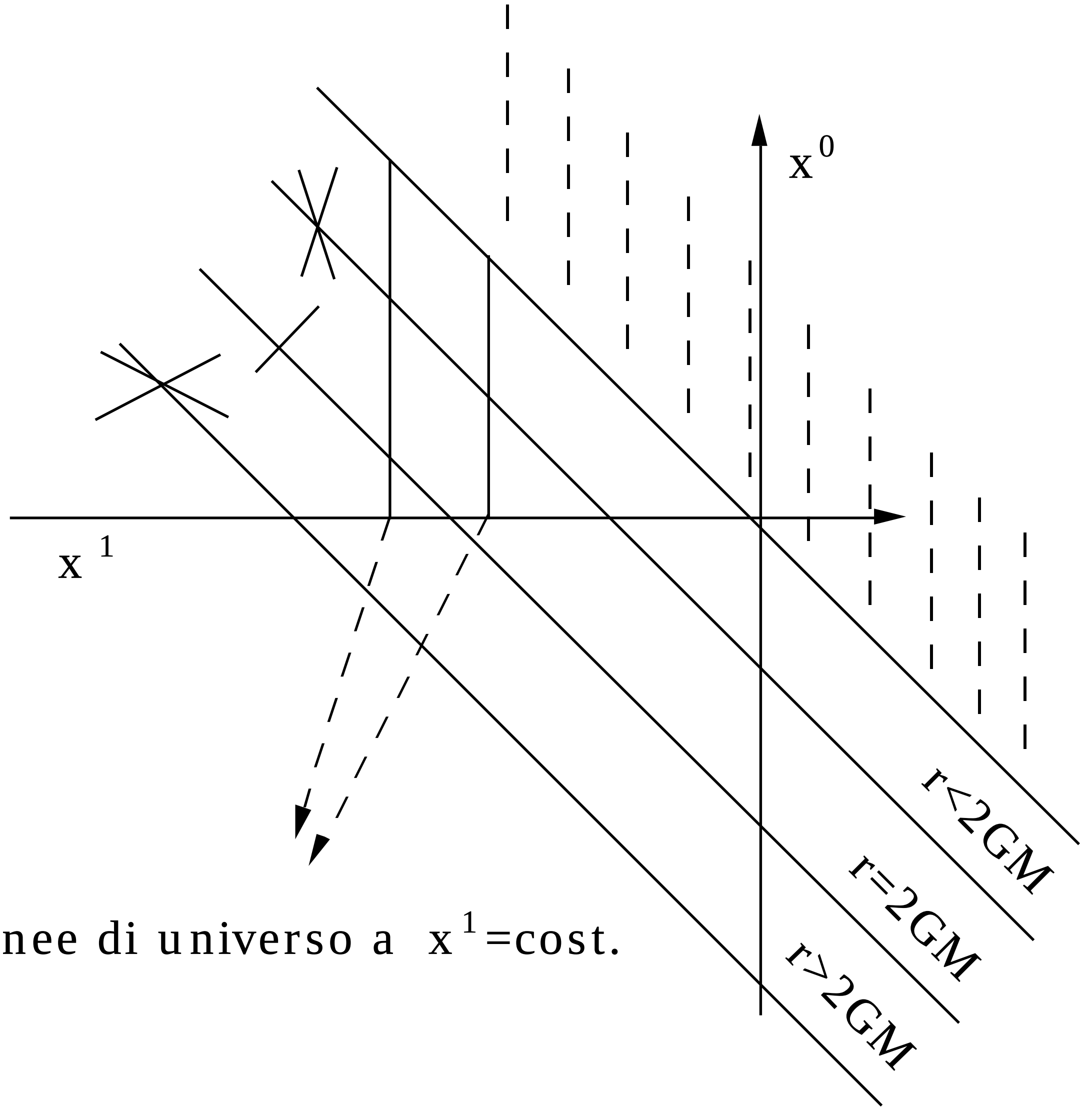


[4] $\mu' < 0$ $\dot{\mu} = \mu'$

1) $$ds^2 = -\,dx^{o2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3} (2GM)^{2/3} \frac{dx^{12}}{\left(x^1 + x^o\right)^{2/3}} + \left(\frac{9}{4}\right)^{2/3} (2GM)^{2/3} \left(x^1 + x^o\right)^{4/3} d\Omega^2$$

2) $$x^o + x^1 = -\,\frac{4}{3}\, GM \left(\frac{r}{2GM}\right)^{3/2}$$

La soluzione 2 è ottenuta dalla 4 per inversione temporale.



Linee di universo a x^1=cost.