Incertezza intrinseca delle misure
ovvero
Una introduzione alla teoria degli errori

• Nella scienza la parola ***errore*** non implica il solito significato di *sbaglio* o *svista.* Errore in una misura scientifica indica ***l'inevitabile incertezza*** che è presente in tutte le misure

Esempio: ***misura della lunghezza del tavolo***:

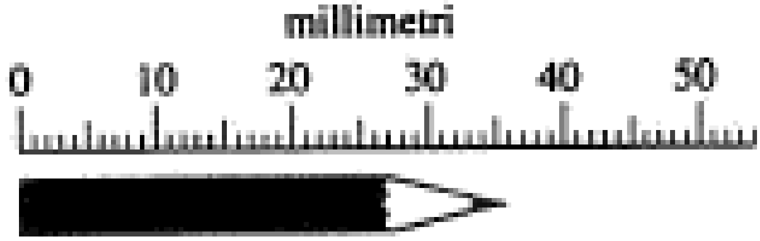
a) con un *regolo* (metro nel linguaggio comune) posso dire che il risultato è p.es. tra 12.3 e 12.4 cm; basta stabilire tra quali divisioni (o *tacche*) dello strumento si situa la misura

b) con un *calibro* le cui divisioni sono di 10 µm ottengo che la misura sta fra 12.324 e 12.328 cm, c'è ancora un intervallo anche se più ristretto. ***Qualsiasi strumento fornirà un intervallo di valori per la misura.***

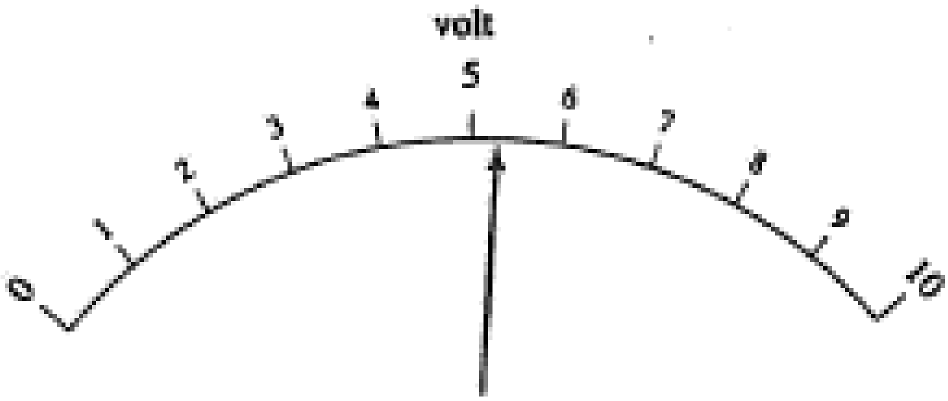
c) misurando a partire da un altro punto ottengo un risultato diverso. In che punto voglio misurare? *Carenza di definizione misura*

d) ripeto la misura nello stesso punto ma la sera e trovo l'intervallo 12.237 – 12.238 cm. *Effetto della dilatazione termica*

e) prendo un altro strumento "uguale" e misuro sullo stesso punto alla stessa ora: ottengo 12.319-12.320 cm. *Gli strumenti sono scalibrati*



La misura di una lunghezza con un righello.



Una lettura su un voltmetro.

•Il ***valore vero*** di una grandezza è dunque elusivo.

•La sua *definizione metrologica* è:
Valore vero = un valore compatibile con la definizione della grandezza

Definizioni:
• ***incertezza*** è la stima data dallo sperimentatore nella quale lui crede debba essere il valore vero

• ***stima del valore vero*** *(miglior valore, valore centrale)* in genere è il valore centrale dell'intervallo

• ***errore di misura*** è invece la differenza tra il valore vero e valore misurato e non è accessibile sperimentalmente (altrimenti conoscerei il valore vero)

Nota: nell'uso comune i termini incertezza ed errore sono usati indifferentemente. Usando correttamente i termini bisogna dire che: esistendo gli errori di misura, lo sperimentatore deve valutare l'incertezza e dare il risultato della misura come intervallo tra due valori della grandezza

Importanza di conoscere le incertezze

Esempio 1: *misura della accelerazione di gravità* **g**

si sia ottenuto il valore g = 9.93 m/s^2. Tale valore è in accordo con il valore previsto g = 9.81 m/s^2?

R: bisogna conoscere l'incertezza della misura.

Vediamo 3 casi: 1) errore = 0.02 m/s^2, 2) errore = 0.2 m/s^2 3) errore = 2 m/s^2

R1) misura sembra molto precisa (0.2%) ma non in accordo col valore previsto

R2) misura meno precisa (2%) ma in accordo col valore previsto

R3) misura in accordo col valore atteso, ma anche con molti altri possibili per la grossa incertezza (20%)

Esempio 2: *valutare se una corona è d'oro a 18 carati o di bassa lega* (problema risolto da Archimede)

si sa che densità oro(18car) e lega: ρ_{Au}=15.5 g/cm^3, ρ_{lega}=13.8 g/cm^3.

R: Va misurata la densità.

Due casi: 1)I misura di ρ: stima migliore 15 , intervallo valori 13.5 – 16-5 g/cm^3 2) II misura di ρ: stima migliore 13.9, intervallo 13.7 – 14.1 g/cm^3.

%: Entrambi i valori corretti ma

R1: l'incertezza troppo grande rende il risultato inutilizzabile. L'intervallo comprende le due densità.

R2: le misure indicano che la corona non è genuina, la densità della lega (13.8) sospetta giace nell'intervallo di stima (13.7-14.1) ma non quella dell'oro a 18 carati (15.5)

- Perché le misure sperimentali permettano di trarre una conclusione *le incertezze* sperimentali *non devono essere troppo grandi*

- Lo sperimentatore deve giustificare l'intervallo di valori da lui stabilito. Senza una breve *spiegazione* di come l'incertezza è stata stimata nelle misure , il riportarne solo il valore risulta spesso inutile

Incertezze (errori) di misura

•***Errore casuale***: fluttuazione casuale del risultato di una misura in un certo intervallo di valori. L'errore casuale non influenza la misura sempre nello stesso verso

Esempio: Misura dell'intervallo di tempo di alcuni minuti con un orologio che ha il quadrante con 60 divisioni ma non la lancetta dei secondi

Sarà possibile solo una stima dei minuti trascorsi con una incertezza che vale ½ divisione (30 secondi) a volte in eccesso a volte in difetto

Nota: molti preferiscono che il proprio orologio vada 2 o3 minuti avanti: se un'altra persona dovesse leggere l'ora da questi orologi senza saperlo commetterebbe un errore di 2 o 3 minuti ma sempre nello stesso verso (in questo caso in eccesso). Errori di questo tipo si dicono sistematici.

•***Errori sistematici***: hanno invariabilmente lo stesso segno e grandezza sotto le stesse condizioni, o variano con una legge definita al variare delle condizioni, e possono essere completamente eliminati da una misura una volta individuati (def. metrologica)

Cause di errori sistematici

- Una lista non necessariamente completa:

a) ***difetti dello strumento***, risalenti alla costruzione o conseguenti ad un suo deterioramento (p. es. errore di taratura di una scala graduata)
b) ***uso dello strumento in condizioni errate***, cioè diverse da quelle previste per un uso corretto (p. es. uso regoli, calibri , a temperature diverse da quelle di taratura)
c) ***errore di stima da parte dello sperimentatore***, un esempio è l'errore di parallasse
d) ***perturbazioni esterne***, esempio : misura del fondo fluviale o marino con uno scandaglio (filo a piombo) in presenza di corrente-> sovrastima della misura
e) ***perturbazione del fenomeno osservato da parte della misura*** esempio misura di uno spessore con un calibro produce una pur leggera pressione che deforme e riduce lo spessore
f) ***uso di formule errate o approssimate nelle misure indirette***

L’errore di parallasse

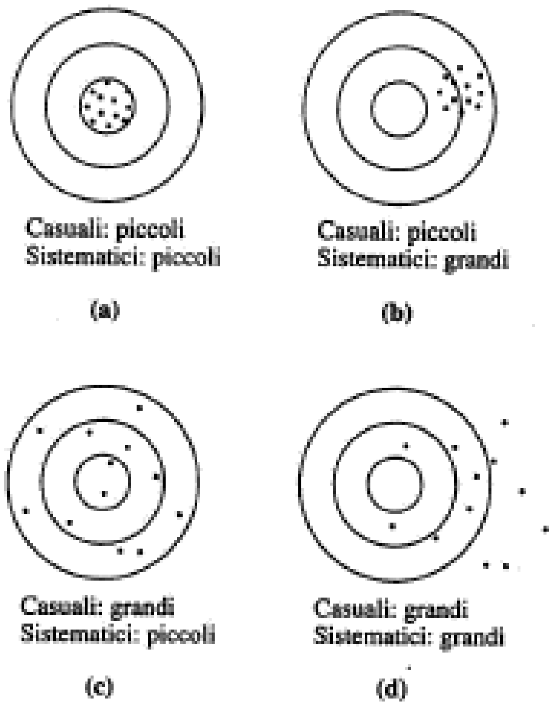
Un ***multimetro*** o ***multitester***, e’ uno strumento di misura elettrico che combina diverse funzioni. Un multimetro standard può misurare voltaggi, correnti e resistenze. Il multimetro analogico è dotato di un indicatore discosto dal piano della graduazione, cosicchè l’indice si vede proiettato su punti diversi della scala a seconda della posizione dell’occhio dell’osservatore.

Per evitare questo errore, ci si serve talvolta di uno specchio parallelo al piano della scala . L’osservatore deve posizionare il suo occhio in modo che l’indicatore nasconda la sua stessa immagine riflessa. Ciò garantisce che la linea di osservazione è perpendicolare allo specchio e quindi alla scala. L’errore di parallasse può far si che la lettura sul tachimetro appaia diversa al passeggero e al guidatore (macchine vecchio modello…)

L. Andreozzi
<andreozz@df.unipi.it>

Precisione ed accuratezza

- Discutendo le caratteristiche degli strumenti (trasparenza 12,1) si è visto che la ***precisione*** è:
  è legata alla riproducibilità del risultato di una misura della stessa grandezza.
  Indica quanto si discostano l'uno dall'altro i risultati sperimentali
- L'***accuratezza*** dipende dall'errore sistematico : una misura è tanto più accurata quanto più il rieultato è vicino a quello che otterrebbe in assenza di errori sistematici.



Espressione del risultato delle misure

• Il risultato delle misure dovrà essere espresso in una forma del tipo:

$$l = 12.34 \pm 0.01 \; m$$

in cui compaiono le tre parti: ***valore***, ***errore***, ***unità*** di ***misura***

Errore massimo ed errore relativo

•Nell'esempio precedente 0.01 è ***l'errore massimo assoluto*** sulla misura della lunghezza l

•Misurando una grandezza x con errore massimo assoluto δx (o Δx) , è fisicamente più significativo il rapporto

$$\delta x/x$$

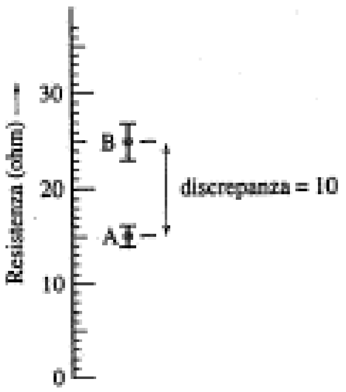
chiamato ***errore relativo***, invece dell'incertezza δx.

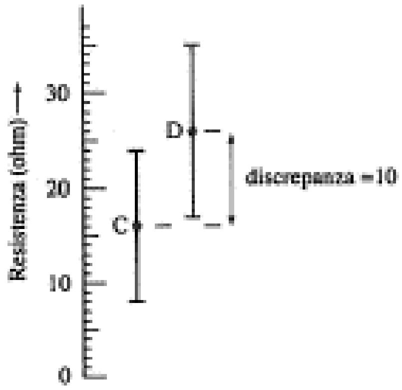
Esempio: si consideri l'errore di 1 mm su a) 1 m, b) 10 mm. E' più grave il secondo infatti
a) $\Delta x/x = 10^{-3} = 1$ % ; b) $\Delta x/x = 10^{-1} = 10$ %
Nota: il risultato di una misura x può essere espresso in termini dell'errore relativo $\Delta x/x$ come

$$x(1 \pm \Delta x/x)$$

Discrepanza; confronto di valori misurati e accettati, e di due misure

Discrepanza (significativa e non significativa): differenza tra due valori misurati della stessa grandezza





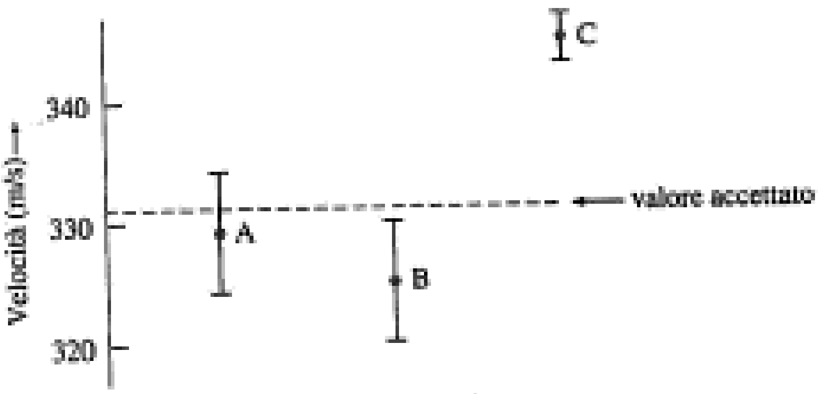
Esempio: misura resistenza

A= 15± 1Ω, B= 25± 2Ω, discrepanza: 25-15=10 Ω

C= 16± 8Ω , D= 26± 9Ω, discrepanza: 26-16=10 Ω

Confronto di valori misurati ed accettati: differenza tra risultato esperimento di misura di una grandezza il cui valore accettato è noto

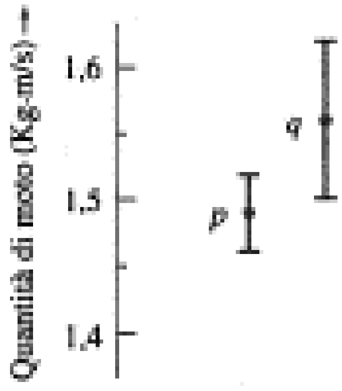
Esempio: misura della velocità *v* del suono in aria . A T e P standard *v*= 331 m/s



A= 329± 5m/s, B= 325± 5m/s, C= 345± 2m/s

velocità del suono in aria a T =25 C e P standard= 343 m/s

Confronto di valori misurati : in esperimenti che prevedono l'uguaglianza dei numeri ottenuti

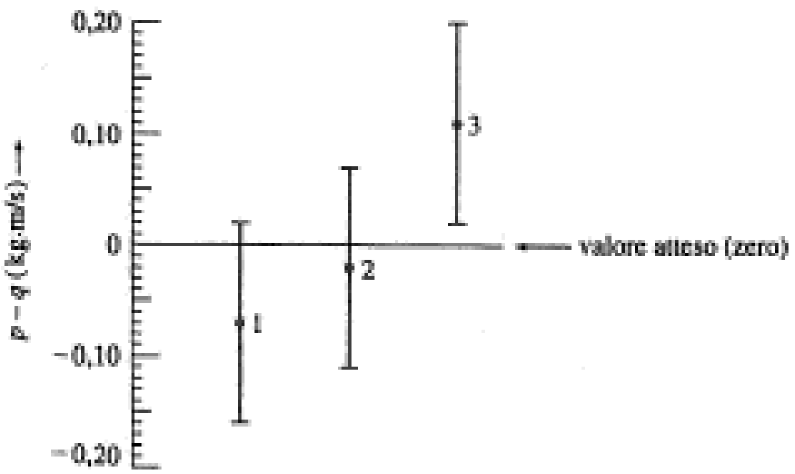


Esempio: verifica della conservazione della quantità di moto nell'urto dei due carrelli:
q. moto iniziale $p=1.49 \pm 0.03$ *Kg m/s*
q. moto finale $q=1.56 \pm 0.06$ *Kg m/s*
i risultati ottenuti sono consistenti con la conservazione della quantità di moto.

Ripeto misure che riporto in tabella (qtà moto in *Kg m/s*)

prova	*p iniziale* ($\pm 0{,}03$)	*q finale* ($\pm 0{,}06$)	*differenza* $(p-q)$ ($\pm 0{,}09$)
1	1,49	1,56	−0,07
2	3,10	3,12	−0,02
3	2,16	2,05	0,11
ecc.			

Più comodo graficare *p-q* per ogni coppia di misure



Nota: come è stimata l'incertezza sulla differenza?

Propagazione dell'errore

Supponiamo di voler calcolare l'incertezza sulla differenza delle quantità di moto dell'esempio precedente o quella sul calcolo del volume V di un cilindro di raggio r e altezza h, con incertezze δr e δh rispettivamente.
Vediamo come si propaga l'errore per le quattro operazioni

Somma: $S = a+b$, con $a \pm \delta a$ e $b \pm \delta b$

casi peggiori: $(a+\delta a) + (b+\delta b) = (a+b) + (\delta a+\delta b)$
$(a-\delta a) + (b-\delta b) = (a+b) - (\delta a+\delta b)$

$$\boxed{\text{errore massimo } \Delta S = \delta a + \delta b}$$

Differenza: $D = a-b$, con $a \pm \delta a$ e $b \pm \delta b$

casi peggiori: $(a+\delta a) - (b-\delta b) = (a-b) + (\delta a+\delta b)$
$(a-\delta a) - (b+\delta b) = (a-b) - (\delta a+\delta b)$

$$\boxed{\text{errore massimo } \Delta D = \delta a + \delta b}$$

Nota: l'errore massimo per la differenza **NON** è $(\delta a-\delta b)$

Prodotto: P= ab, con $a\pm\delta a$ e $b\pm\delta b$

casi peggiori:

$$(a+\delta a)(b+\delta b) = (ab)+(b\delta a+a\delta b+\delta a\delta b)$$

$$(a-\delta a)(b-\delta b) = (ab)-(b\delta a+a\delta b-\delta a\delta b)$$

se $\delta a<<a$ e $\delta b<<b$ è possibile trascurare $\delta a\delta b$

$$\boxed{\text{errore massimo } \Delta P=b\delta a+a\delta b}$$

Esempi :1) a=b, $P=a^2$, $\Delta P= 2a\,\delta a$

2) $P=a^3=a*a^2$, $\Delta P= a^2\delta a+a\delta(a^2)= 3a^2\,\delta a$

3) $P= a^n$, $\Delta P= n\,a^{n-1}\,\delta a$

4) $P = na$, $\Delta P= n\,\delta a$

Nota su 3: incertezza relativa in una potenza:

sia data la grandezza $G=a^n\,b^m\,c^p$, con n,m,p esatti

$$\Delta G = |na^{n-1}b^m c^p|\Delta a + |ma^n b^{m-1}c^p|\Delta b + |pa^n b^m c^{p-1}|\Delta c$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|n\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|m\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|p\frac{\Delta c}{c}\right|$$

(| | indica il valore assoluto)

Gli errori relativi si sommano con un peso pari all'esponente della potenza. E' bene che nelle misure le grandezze entrino con errori relativi dello stesso o.d.g.

Nota su 4: utile quando si misura qualcosa di piccolo ma disponibile molte volte assieme, come lo spessore di un foglio di carta:

se lo spessore S di 200 fogli è S= 3.3± 0.1 cm, spessore s del foglio s=0.0165±0.0005 cm

Quoziente: Q= c/d, con $c \pm \delta c$ e $d \pm \delta d$

casi peggiori: valore più grande

$$(c+\delta c)/(d-\delta d) = (c/d)*[1+(\delta c/d)]/[1+(\delta d/d)]$$

se $\delta c \ll c$ e $\delta d \ll d$, il fattore $[1+(\delta c/d)]/[1+(\delta d/d)]$ è della forma $(1+a)/(1-b)$ con a e b <<1

1) b<<1, per il teorema binomiale si approssima

$$1/(1-b) \approx 1 + b$$

Quindi usandola nel caso del quoziente

2) valore più grande di q

$(c/d)*[1+(\delta c/d)]/[1+(\delta d/d)] =$

$(c/d)*[1+(\delta c/d)+(\delta d/d)]$

dove si e' trascurato il prodotto $(\delta c/d)*(\delta d/d)$

3) Analogo risultato si ottiene per il valore più piccolo di q.

Riportando in forma standard si ha

$$\boxed{\text{errore massimo } \Delta Q=(c\delta d+d\delta c)d^2}$$

Esercizio: provare che la formula per l'errore relativo del quoziente è uguale a quella del prodotto

Ricapitolando…

a) quando le grandezze misurate si sommano o sottraggono***, si sommano gli errori assoluti***

b) quando le grandezze misurate si moltiplicano o dividono***, si sommano gli errori relativi***

Funzioni arbitrarie di una variabile

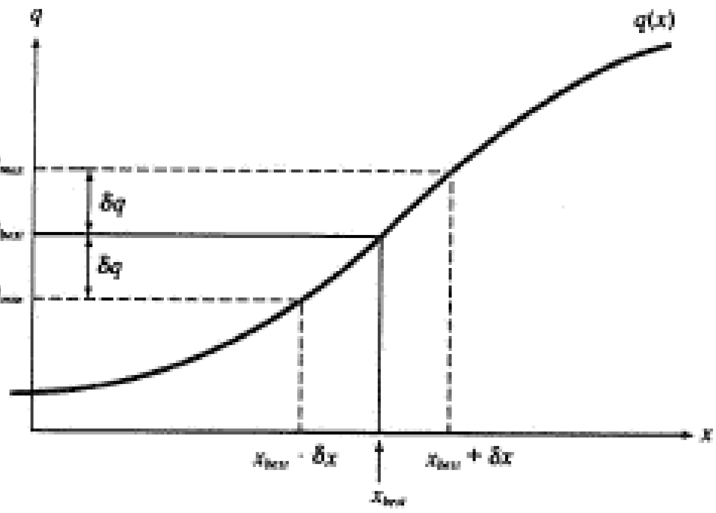


Grafico di $q(x)$ in funzione di x. Se x è misurato come $x \pm \delta x$, allora la miglior stima per $q(x)$ è $q_{best} = q(x_{best})$. Il più grande e il più piccolo valore probabile di $q(x)$ corrispondono ai valori $x_{best} \pm \delta x$ di x.

$$\delta q = q(x_{best} + \delta x) - q(x_{best})$$

Se δx è sufficientemente piccolo si ha

$$\delta q = \frac{dq}{dx}\delta x$$

Se q(x) è nota, ***l'errore*** si calcola analiticamente secondo la formula generale

$$\boxed{\delta q = |dq/dx|\, \delta x}$$

:valida se possono essere trascurati termini del tipo $(\delta x)^2$

Esempio: stimare la frequenza f di un pendolo dalla misura del periodo T. Si ha:

$f=1/T$, dove T è stato misurato con un errore ΔT

$\Delta f= \Delta T\ (1/T^2)$

per l'errore relativo si avrà

$\Delta f/f= (\Delta T\ /T^2)\ (1/f) \ = \Delta T\ /T$

Ciò vuol dire, come è ovvio che sia che se si misura il periodo ao 2%, anche la stima indiretta dedlla frequenza risulta affetta da un errore percentuale del 2%

Incertezza in una qualunque funzione di una variabile

Se x è misurato con incertezza δx ed è utilizzato per calcolare la funzione $q(x)$, allora l'incertezza δq è

$$\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right| \delta x \qquad (3.23)$$

Esempio. Incertezza nel coseno
Come semplice applicazione della regola (3.23), supponiamo di aver misurato un angolo θ come

$$\theta = 20 \pm 3°$$

e di voler calcolare $\cos\theta$. La miglior stima di $\cos\theta$ è, naturalmente, $\cos 20° = 0{,}94$ e, secondo la (3.23), l'incertezza è

$$\delta(\cos\theta) = \left|\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right| \delta\theta$$

$$= |\sin\theta|\, \delta\theta \text{ (in rad)} \qquad (3.24)$$

Abbiamo indicato che $\delta\theta$ deve essere espresso in radianti, perché la derivata di $\cos\theta$ è $-\sin\theta$ solo se θ è espresso in radianti. Perciò riscriviamo $\delta\theta = 3°$ come $\delta\theta = 0{,}05$ rad; allora la (3.24) dà

$$\delta(\cos\theta) = (\sin 20°) \times 0{,}05$$

$$= 0{,}34 \times 0{,}05 = 0{,}02$$

Così il risultato finale è

$$cos\theta = 0{,}94 \pm 0{,}02$$

Funzioni arbitrarie di più variabili

Se q è funzione di più variabili q= q(a, b, c, d, ..), ***l'errore massimo*** si calcola secondo la formula generale

$$\boxed{\delta q = |dq/da|\ \delta a + |dq/db|\ \delta b + |dq/dc|\ \delta c + \ldots}$$

valida se possono essere trascurati termini del tipo $(\delta a)^2$, $(\delta a \delta b)$ …

Esempio :torniamo al problema iniziale per il calcolo dell'incertezza sul volume $V = \pi r^2 h$ del cilindro

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta h + \pi 2r\Delta r\, h$$

Nota: se le incertezze sono indipendenti e casuali la espressione precedente può essere sostituita con una ***somma in quadratura*** (da giustificare successivamente)

Sulla somma in quadratura degli errori

Nel caso di grandezze affette da errori indipendenti e casuali si dimostrerà che tutte le somme nella propagazione degli errori sono da sostituire con somme quadratiche. Le vecchie espressioni costituiscono ***limiti superiori*** per le incertezze (da dim.)

Incertezze nelle somme e nelle differenze

Supponiamo che $x,\dots,w$ siano misurati con incertezze $\delta x,\dots,\delta w$ e i valori misurati utilizzati per calcolare

$$q = x + \dots + z - (u + \dots + w)$$

Se le incertezze in $x,\dots,w$ sono *indipendenti e casuali*, allora l'incertezza in q è la somma quadratica

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \dots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \dots + (\delta w)^2}$$

delle incertezze originarie. In ogni caso, δq non è mai più grande della loro somma ordinaria

$$\delta q \le \delta x + \dots + \delta z + \delta u + \dots + \delta w$$

Incertezza nei prodotti e nei quozienti

Supponiamo che $x,\dots,w$ siano misurate con incertezze $\delta x,\dots,\delta w$, e i valori misurati utilizzati per calcolare

$$q = \frac{x \times \dots \times z}{u \times \dots \times w}$$

Se le incertezze in $x,\dots,w$ sono *indipendenti e casuali*, allora l'incertezza relativa in q è la somma quadratica delle incertezze originarie

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2}$$

In ogni caso non è mai più grande della loro somma ordinaria,

$$\frac{\delta q}{|q|} \le \frac{\delta x}{|x|} + \dots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \dots + \frac{\delta w}{|w|}$$

Incertezza in una funzione di parecchie variabili

Supponiamo che $x,\ldots,z$ siano misurate con incertezze $\delta x,\ldots,\delta z$, e i valori misurati utilizzati per calcolare la funzione $q(x,\ldots,z)$. Se le incertezze in $x,\ldots,z$ sono indipendenti e casuali, allora l'incertezza in q è

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

In ogni caso, essa non è mai più grande della somma ordinaria

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \ldots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right| \delta z$$

Esempio : Calcolo efficienza di un motore elettrico in c.c. utilizzandolo per sollevare una massa m all'altezza h.
Il lavoro compiuto è mgh, mentre l'energia erogata dal motore è VIt , dove V è il voltaggio, I la corrente elettrica e t il tempo per cui il motore lavora.

$$\text{efficienza, } e = \frac{\text{lavoro fatto dal motore}}{\text{energia erogata dal motore}} = \frac{mgh}{VIt}$$

Supponiamo che m, h, V e I siano tutte misurate con l'accuratezza dell'1%,

$$(\text{incertezza relativa per } m,h,V\,e\,I) = 1\%$$

e che il tempo abbia un'incertezza del 5%,

$$(\text{incertezza relativa per } t) = 5\%$$

(Naturalmente g è nota con incertezza trascurabile.) Se ora calcoliamo l'efficienza e, secondo la nostra vecchia regola (le "incertezze relative si sommano"), avremo

$$\frac{\delta e}{e} \approx \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta I}{I} + \frac{\delta t}{t}$$
$$= (1 + 1 + 1 + 1 + 5)\% = 9\%$$

D'altra parte, se siamo convinti che le varie incertezze sono indipendenti e casuali, allora possiamo calcolare $\delta e/e$ con la somma quadratica e otteniamo

$$\frac{\delta e}{e} = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\delta t}{t}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(1\%)^2 + (1\%)^2 + (1\%)^2 + (1\%)^2 + (5\%)^2}$$
$$= \sqrt{29}\% \approx 5\%$$

Esempio : Misura della accelerazione di gravità **g** misurando la lunghezza l e il suo periodo di oscillazione

La teoria prevede per piccole oscillazioni che $T = 2\pi (l/g)^{1/2}$ e quindi

$$g = (4\pi^2 l)T^2$$

si tratta di una misura indiretta

Si sia misurato:

$l = 99.6 \pm 0.2$ cm e $T = 2.01 \pm 0.02$s

- L'errore su l (quest'ultimo definito come la distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa della sferetta appesa al filo) è stato stimato in 2 mm (anziché 1 mm del metro a nastro) a causa della incertezza nella determinazione del centro di massa

•L'errore su T è stato stimato con una serie di misure ripetute (errore statistico di cui parleremo in seguito)

1) Calcolo di g dall'espressione fornita:

$g = 9.7325571\ m/s^2$

2) Calcolo dell'errore relativo

$\Delta g/g = \Delta l/l + 2\ \Delta T/T = 0.002 + 0.02 = 0.022$

3) Calcolo dell'errore assoluto

$\Delta g = 0.2$

4) Risultato finale

$g = 9.7 \pm 0.2\ m/s^2$

Nota 1: non si è fatto uso dell asomma in quadratura per il calcolo dell'errore relativo. Il calcolo è comunque corretto perché uno dei due errori relativi da sommare è molto più piccolo dell'altro. Sommando in quadrature si otterrebbe:
$\Delta g/g = [(\Delta l/l\ )^{1/2} + (2\ \Delta T/T\ )^{1/2}] = [0.002^{\,2} + 0.02^{\,2}]^{1/2} = 0.0201$

Nota2: ai punti 3 e 4 il risultato numerico è stato presentato con solo le cifre significative. Discuteremo nella prossima lezione il significato di questa procedura.

Cifre significative

- La precisione di un numero sperimentale è implicita nel modo in cui è scritto

- Il numero di ***cifre significative*** in un risultato è determinato dalle seguenti regole:

① La cifra più significativa è quella più a sinistra diversa da zero.

② Se *non* c'è la virgola decimale la cifra meno significativa è quella più a destra diversa da zero.

③ Se c'è la virgola decimale la cifra meno significativa è quella più a destra anche se è zero.

④ Tutte le cifre comprese fra la più e la meno significativa sono cifre significative.

Esempio: indicando la cifra meno significativa con una sottolineatura e quella più significativa con una sopralineatura si ha (si tenga presente che le cifre significative sono quelle comprese tra la più e la meno significativa:

$\overline{3}11\underline{5}$	$\overline{3}212.\underline{5}$	$0.0\overline{3}2\underline{5}$
$\overline{3}01\underline{5}$	$\overline{3}21.0\underline{5}$	$0.0\overline{3}0\underline{0}$
$\overline{1}99\underline{3}$	$\overline{3}00.0\underline{0}$	$\overline{3}0.03\underline{0}$

Nota: la convenzione 2 è la più diffusa, ma non universalmente accettata per cui leggendo il numero 3200 può rimanere ambiguità se le cifre significative sono 2 o 4.

•Per sapere quante cifre significative devono essere riportate nel risultato di un esperimento bisogna valutare gli errori commessi: *si riportano tutte le cifre fino alla prima influenzata dall'errore inclusa*

•Quando le cifre non significative vengono tagliate da un numero, le rimanenti devono essere ***arrotondate*** per una maggior accuratezza

•Per arrotondare un numero lo si tronca fino ad ottenere il numero di cifre significative desiderato, e le cifre in più si trattano come una frazione decimale

① Se la frazione è *maggiore* di $^1/_2$ si incrementa di una unità l'ultima cifra significativa

② Se la frazione è *minore* di $^1/_2$ il numero è già pronto.

③ Se la frazione è *uguale* ad $^1/_2$, allora se l'ultima cifra è dispari si procede come al punto ①, non si fa niente se è pari.

Quando i risultati di misure vengono usati per calcolare altre grandezze, bisogna fare attenzione gli errori che si possono compiere nei calcoli numerici

Esempio : se a= 3.658 e b= 24.763, con quante cifre significative è ragionevole scrivere il prodotto?

R: il risultato dell'operazione è : 90.583054

Ma per come si conoscono i numeri, il prodotto può essere un numero qualunque compreso tra i due seguenti:

$$3.6585 \times 24.7635 = 90.59726457$$
$$3.6575 \times 24.7625 = 90.56884375$$

Allora il prodotto va scritto con 4 cifre significative e l'errore è sulla quarta cifra.

Verificarlo utilizzando la legge di propagazione degli errori massimi in un prodotto con $\Delta a = \Delta b = 5\ 10^{-4}$

Appendice: il teorema binomiale

3.8.** Il teorema binomiale stabilisce che per qualunque numero n e qualunque x con $|x| < 1$,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \ldots$$

(a) Dimostrate che se n è un intero positivo, questa serie ha soltanto un numero finito di termini non nulli. Scrivetela esplicitamente per il caso $n = 2$ e $n = 3$. **(b)** Scrivete la serie binomiale per $n = -1$. Questo caso dà una serie infinita per $1/(1+x)$, ma quando x è piccolo, si ha una buona approssimazione se si considerano soltanto i primi due termini:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$