Grafici

•Illustrazione dell'uso dei grafici con un *esempio*.

•Verifica della legge di Hooke: F= -kx

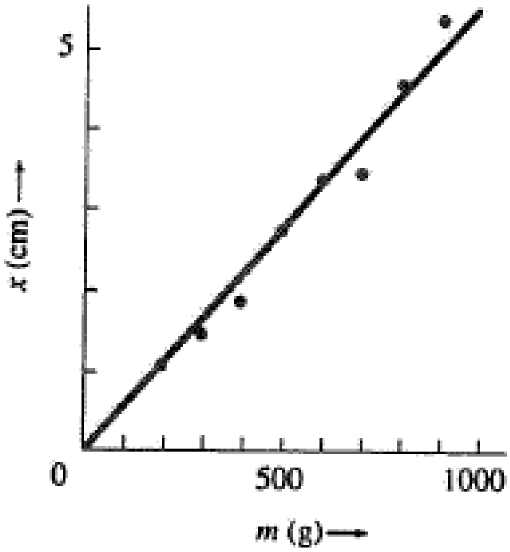
•Se viene appesa alla molla, sospesa verticalmente, una massa m si ottiene per l'allungamento x

$$x = \frac{mg}{k} = \left(\frac{g}{k}\right) m$$

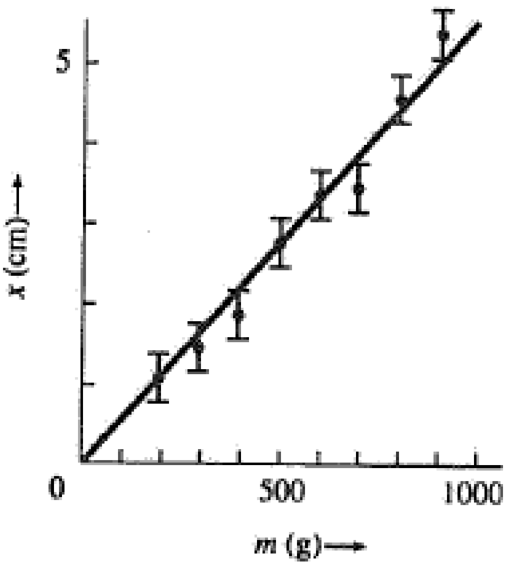
•L'allungamento risulta proporzionale al carico m e un grafico di x in funzione di m sarà una linea retta passante per l'origine.

•Tabella carico-allungamento per 8 diverse misure

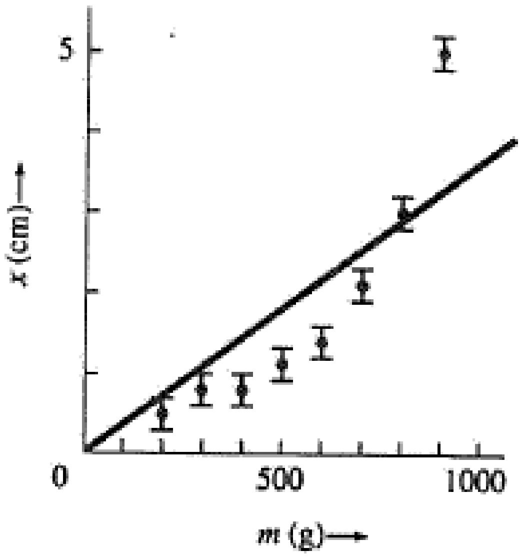
m(g) (δm trascurabile)	200	300	400	500	600	700	800	900
x(cm) (±0,3)	1,1	1,5	1,9	2,8	3,4	3,5	4,6	5,4



(a)



(b)

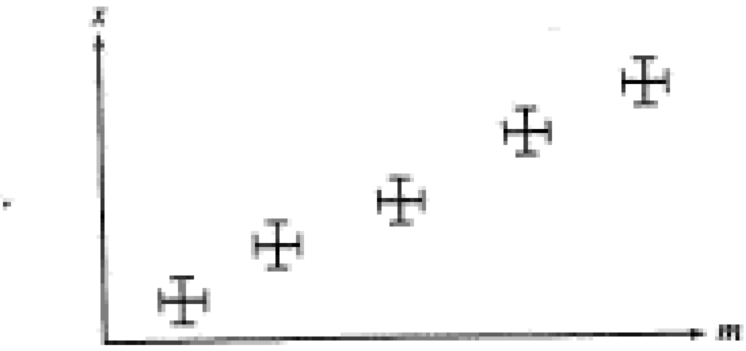


(c)

Tre grafici dell'allungamento x di una molla in funzione del carico m. **(a)** I dati della Tabella 2.3 senza le barre di errore. **(b)** Gli stessi dati con le barre di errore per mostrare le incertezze in x. (Le incertezze su m sono assunte essere trascurabili.) Questi dati sono consistenti con l'attesa proporzionalità di x e m. **(c)** Un diverso gruppo di dati che sono inconsistenti con la prevista proporzionalità fra x e m.

L. Andreozzi
<andreozz@df.unipi.it>

•Misure con incertezze su entrambe le variabili

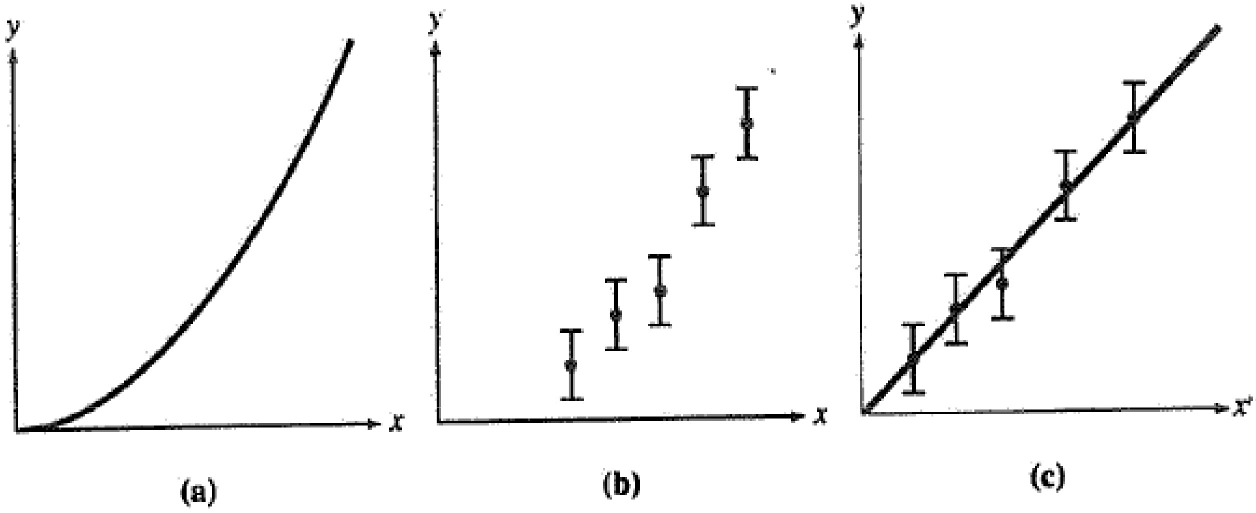


Misure con incertezze su entrambe le variabili possono essere rappresentate con croci fatte con una barra d'errore per ciascuna variabile.

Scale non lineari

•Se una grandezza è una potenza di un'altra . (*Esempio*: lo spazio s percorso da un corpo in caduta libera in un tempo t) in questo caso la relazione da verificare è

$$y = Ax^2$$



(a) Se y è proporzionale a x^2, un grafico di y in funzione di x sarà una parabola con questa generica forma. (b) È difficile valutare ad occhio, da un grafico di y in funzione di x, se una serie di misure giace o no su una parabola. (c) D'altra parte, il grafico di y in funzione di x^2 sarà una retta passante per l'origine, e questo è facile da controllare. (Nel caso considerato, vediamo facilmente che i punti giacciono su una retta passante per l'origine.)

• Quando la dipendenza funzionale tra due variabili non è lineare, si usa introdurre ***nuove variabili*** scelte in modo tale che tra esse ci sia ***dipendenza lineare***.

•Analogamente se $y=x^n$ un grafico di x in funzione di x^n dovrebbe essere una retta.

•Il modo più generale per linearizzare le funzioni del tipo $Y = k (X)^a$ consiste nel prendere il logaritmo di entrambi i membri della relazione precedente . Si ha facilmente

•$\log (Y) = \log[k (X)^a]$
$\log (Y) = \log (k)+ a \log (X)$
si trasformano le variabili ponendo
$Z =\log(X)$ e $W = \log (Y)$

• ottengo $W = K + a Z$
con $K = \log k$

•Nel caso di dipendenza esponenziale $y = Ae^{Bx}$, il logaritmo naturale di y dipende linearmente da x.

Richiami sulle proprietà dei logaritmi

•Si definisce ***logaritmo*** in base a di x l'esponente z cui bisogna elevare la base a per ottenere x

$$z = \log_a x \qquad se \qquad a^z = x$$

•Proprietà dell'operatore logaritmo

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad e \quad \log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_b x = (\log_a x)\,(\log_b a)$$

•Proprietà cambiamento di base tra la base 10 (logaritmi decimale) e la base e=2.718…(logaritmi naturali)

$$\log_e x = (\log_{10} x)\,(\log_e 10) = 2.3 \log_{10} x$$

$$\log_{10} x = (\log_e x)\,(\log_{10} e) = 0.434 \log_e x$$

Carta logaritmica

- Per evitare il calcolo dei logaritmi di tutti i punti sperimentali esistono carte per grafici costruite con scale logaritmiche (logaritmi decimali)

- Una scala logaritmica è una scala in cui sono riportati *segmenti proporzionali* ai logaritmi dei numeri reali , solitamente in base 10 [al numero 1 corrisponde un segmento di lunghezza nulla (log 1=0), al numero 2 un segmento proporzionale a log2 = 0.30103, al numero 10 un segmento proporzionale ad 1, al numero 100 un segmento proporzionale a 2 ecc.]

- Due tipi di carta logaritmica: *semilogaritmica* e *bilogaritmica*

Esempio: determinazione delle costanti *k* ed *a* della espressione $Y = k X^a$ linearizzata col cambiamento di variabili in $W = K + aZ$
- quest'ultima rappresenta l'espressione analitica della retta oppenuta riportando i dati sperimentali x_i e y_i su una carta bilogaritmica
- K ed a rappresentano l'intercetta e il coefficiente angolare della retta

- La carta logaritmica linearizza le espressioni a potenza, *ma tale relazione è lineare solo se espressa nei logaritmi delle variabili*

- Ricaviamo *a* dal grafico: per def. del coefficiente angolare si ha:

$$a = (W_2 - W_1)/(Z_2 - Z_1) = (\log Y_2 - \log Y_1)/(\log X_2 - \log X_1) =$$
$$= (\log Y_2/Y_1)/(\log X_2/X_1)$$

- Poichè in una scala logaritmica i segmenti sono proporzionali ai logaritmi (base 10) dei numeri reali, se le scale sui due assi sono uguali, il rapporto dei logaritmi che compare nell'espressione di *a* è equivalente al rapporto delle distanze misurate dal grafico con un righello.

Carta semiligaritmica

- E' usata per linearizzare espressioni del tipo

$$Y = k\, e^{aX}$$

- Infatti prendendo il logaritmo in base 10 di ambo i membri e applicando le proprietà dei logaritmi e si ottiene:

$$log(Y)=log(k\, e^{aX}) \rightarrow log(Y)=log(k) + log(e^{aX}) \rightarrow$$
$$\rightarrow log(Y)=log(k) + log_{10}(e) log_e(e^{aX})$$

e infine

$$log(Y)=log(k) + 0.434\, aX$$

- Occorre una carta lineare per asse x e logaritmica per asse y!
- Usare una carta semilogaritmica corrisponde al seguente cambiamento di variabili

$Z = X$ e $W = log(Y)$ che linearizza $Y = k\, e^{aX}$ in

$W = K + 0.434aZ$ [dove $K = log(k)$]

- Per X =Z = 0, $W=K=log(k)$ e K si può stimare dal grafico, ricavando l'intercetta con l'asse delle ordinate.
  - Per stimare *a*, occorre stimare dal grafico la pendenza della retta e porla uguale a 0.434a, cioè

$$0.434\,a = (W_2-W_1)/(Z_2-Z_1) = (\log Y_2 - \log Y_1)/(X_2-X_1)$$

Nota: Il calcolo di $\log Y_2 - \log Y_1$ risulta particolarmente facile quando Y_2 e Y_1 stanno agli estremi di una decade

P. es., se

$Y_2 = 100$ e $Y_1 = 10$ allora è $\log Y_2 - \log Y_1 = 2-1=1$

Suggerimenti per un buon grafico

• inserire didascalia

• indicare su assi variabili e unità di misura

• variabile indipendente su asse ascisse

• una buona scelta di scala rende i grafici leggibili: usare la maggior parte del foglio di carta millimetrata

• non riportare sugli assi i valori (xi, yi) è preferibile una scansione regolare (es. 0, 10, 10, 30, ..,100) da cui sia deducibile l'unità di scala

• potrebbe essere utile avere una falsa origine (cioè incrocio assi in punto diverso da origine (0,0). È ammesso ma va opportunamente segnalato

• riportare gli errori delle misure come barrette di errore. Misure eventualmente ripetute devono cadere all'interno di queste regioni

• se sul grafico compare una curva che rappresenta la supposta relazione funzionale , non è necessario che tocchi tutti i punti, ma e' lecito aspettarsi che tocchi tutte le regioni idei dati ndividuate dalle barrette di errore