## *Ritorniamo su la propagazione degli errori*

• La trattazione sulla propagazione dell'errore massimo, commesso quando si eseguono operazioni cons grandezze a,b,c…affette da errori Δa, Δb, Δc,.., si applica quando non si hanno strumenti sensibili e non si hanno fluttuazioni casuali, per cui Δa, Δb, Δc, … sono le risoluzioni degli strumenti stessi.

• Quando si hanno misure più raffinate, si hanno fluttuazioni casuali e in genere si conosce non *gli errori della grandezza misurata*,( altrimenti si conoscerebbe il valore "vero" della grandezza) , ma una ***stima dell'errore***.

• Si è visto che una buona stima dell'errore è data dalla ***deviazione standard.*** COME COMBINARE LE DEVIAZIONI STANDARD?

## *Propagazione degli errori (dimostrazione formule anticipate nelle trasparenze lezioni n 2)*

❶ Consideriamo dapprima il caso semplice: $y = f(x)$. Sia $X$ il valor medio di $x$ e $\sigma_x$ la sua deviazione standard.

Anche per $y$ possiamo ipotizzare l'esistenza di una funzione di distribuzione che dia la probabilità di determinare i vari valori della $y$ e quindi definire:

$$\begin{aligned} Y &= E[y] \\ \sigma_y^2 &= E[(y-Y)^2] \\ \sigma_y &= \sqrt{E[(y-Y)^2]} \end{aligned}$$

Il problema della propagazione degli errori è ricondotto a vedere se $Y$ e $\sigma_y^2$ possono essere legate a $X$ e $\sigma_x^2$ e sotto quali ipotesi lo sono. Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor, la funzione $y$, per i valori di $x$ intorno ad $X$, è:

$$y = f(X) + (x - X)\left(\frac{df}{dx}\right)_X + \frac{1}{2}(x - X)^2\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_X + \cdots$$

$$E[y] = E[f(X)] + E\left[(x - X)\left(\frac{df}{dx}\right)_X\right] + E\left[\frac{1}{2}(x - X)^2\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_X\right] + \cdots$$

Essendo $f(X)$, $(df/dx)_X$, $(d^2f/dx^2)_X$ costanti ne segue che:

$$E[y] = f(X) + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_X E[(x - X)^2] + \cdots$$

Se ne deduce che

$$\boxed{Y = f(X)}$$

quando la funzione $f(x)$ è lineare o comunque quando si possono trascurare i termini del 2º ordine o successivi. Assunto $Y = f(X)$ si ha:

$$\sigma_y^2 = E\left[[f(x) - f(X)]^2\right]$$

e trascurando i termini al secondo ordine nello sviluppo in serie di $f(x)$ ne segue:

$$\sigma_y^2 = E\left[(x - X)^2\left(\frac{df}{dx}\right)_X^2\right] = \left(\frac{df}{dx}\right)_X^2 E[(x - X)^2] = \left(\frac{df}{dx}\right)_X^2 \sigma_x^2$$

$$\sigma_y = \left|\frac{df}{dx}\right| \sigma_x$$

• Nel caso di più variabili INDIPENDENTI, per es sia $f = f(x, y)$. nelle stesse approssimazioni del caso precedente, si può dimostrare che

$$\boxed{\sigma_f^2 = f_x^2\sigma_x^2 + f_y^2\sigma_y^2}$$

con
$$f_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{X,Y}, \qquad f_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{X,Y}$$

In generale
$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2\sigma_{x_i}^2, \qquad \sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2\sigma_{x_i}^2}.$$

C'è da osservare che anche nel caso in cui si prende come errore la risoluzione dello strumento, quando si calcola una grandezza che è funzione di molte altre, conviene usare

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2\sigma_{x_i}^2, \qquad \sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2\sigma_{x_i}^2}.$$

) perchè è pessimistico pensare che tutti gli errori contribuiscano nello stesso verso; è più significativo l'errore statistico.

**Incertezza in una funzione di parecchie variabili**

Supponiamo che $x,\ldots,z$ siano misurate con incertezze $\delta x,\ldots,\delta z$, e i valori misurati utilizzati per calcolare la funzione $q(x,\ldots,z)$. Se le incertezze in $x,\ldots,z$ sono indipendenti e casuali, allora l'incertezza in $q$ è

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

In ogni caso, essa non è mai più grande della somma ordinaria

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \ldots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z$$

# *Cenno alla teoria dei campioni*

•L'insieme delle misure sperimentali ( che è una piccola parte di tutte le misure effetuabili) è un ***campione*** di tutte le possibili misure

- ***Si postula l'esistenza*** di una distribuzione dei risultati di tutte le misure effettuabili: questa viene chiamata ***distribuzione generatrice (parent distribution)***

- Dal campione dobbiamo approssimare la media $\mu$ e la varianza $\sigma^2$ della distribuzione generatrice

•Vediamo allora gli estimatori del campione di misure

# *Stime di tendenza centrale*

- Oltre ai grafici è necessario fornire dei numeri riassuntivi al fine di stimare il miglior valore e l'incertezza. Si vuole cioè definire dei *descrittori globali del campione.*

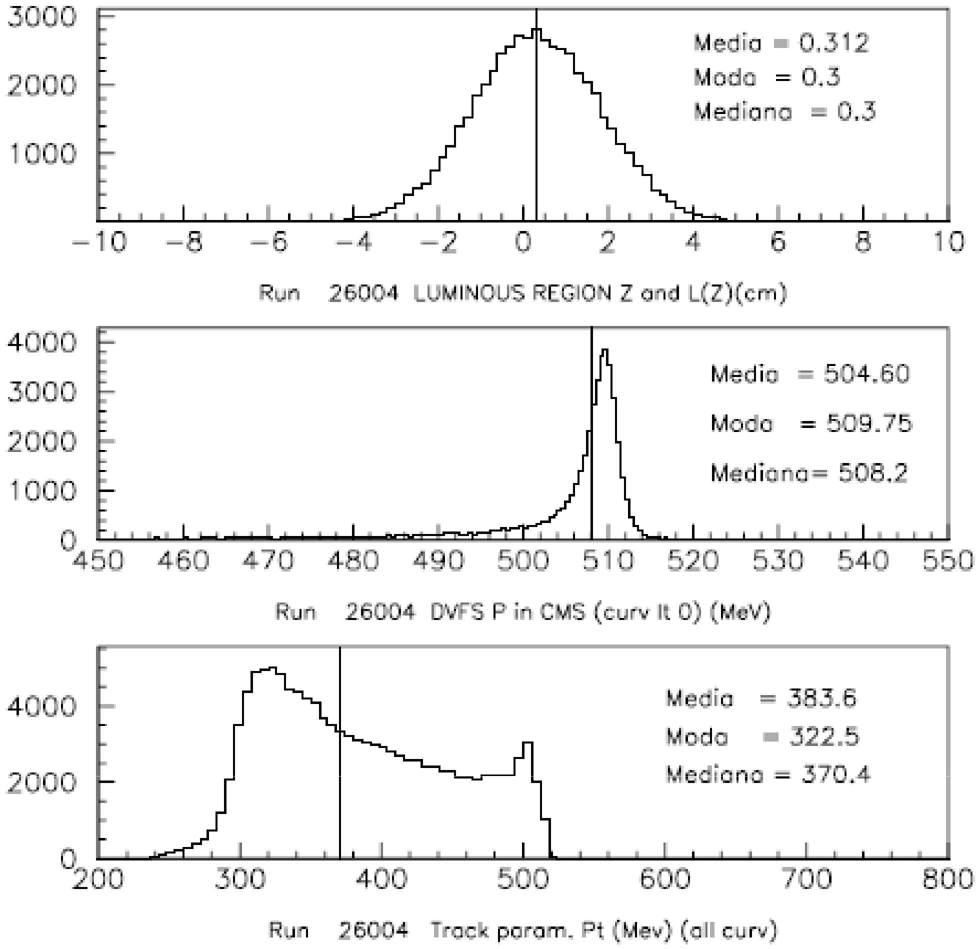
*Moda:* è il valore corrispondente al massimo della frequenza, cioè il valore che si è presentato il maggior numero di volte: tale stima si chiama *moda del campione, e* si può indicare con il simbolo $\hat{x}$.

*Mediana* $\tilde{x}$ è definita come quel valore che divide l'istogramma dei dati in due parti di uguale area. Nel diagramma della frequenza cumulativa relativa è definita dall'ascissa corrispondente all'ordinata del 50%.

*Media aritmetica*: ***la miglior stima della tendenza centrale di un campione è la media aritmetica*** $\bar{x}$ dei valori osservati, definita attraverso la

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Tale scelta è legata alle proprietà statistiche della media, come abbiamo visto (teorema di Tschebyscheff)




Tre *esempi* di istogrammi. Per ciascuno sono indicati i valori dei 3 descrittori globali del campione di misure: media, mediana e moda. Le 3 linee sono disegnate in corrispondenza delle mediane

# *La media aritmetica espressa tramite le frequenze*

•Siano $x_i$, *con* $i = 1, \ldots, N$, gli N valori del campione di cui vogliamo calcolare la media aritmetica;

supponiamo che qualcuno dei valori ottenuti sia *ripetuto*, ad esempio che il valore x1 si sia presentato n1 volte, x2 si sia presentato n2 volte e così via*:*

*la media aritmetica si può calcolare come*

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots}{N} \qquad (N = n_1 + n_2 + \cdots)$$

Siano *xj (j = 1, 2, . . . ,M)* gli M valori distinti di x presenti nel campione:

-*nj è la frequenza assoluta con cui abbiamo ottenuto il valore xj* nel corso delle nostre misure,

-ed il rapporto *nj/N è la frequenza relativa fj* dello stesso evento casuale

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} n_j x_j = \sum_{j=1}^{M} \frac{n_j}{N} x_j = \sum_{j=1}^{M} f_j x_j$$

Formula di media pesata

# *Stime di dispersione*

•Oltre alla posizione è da stimare la *dispersione* ( che è legata alla incertezza sulla misura) , cioè la *larghezza* dell'istogramma o della *banda* di fluttuazione, ovvero la valutazione della larghezza dell'intervallo in *x in cui le misure stesse sono distribuite attorno* al valore centrale.

•*Semidispersione massima e range*

-La più grossolana delle stime statistiche di dispersione si effettua trovando il massimo ed il minimo valore osservato: la *semidispersione massima è* definita come la semidifferenza tra questi due valori,

$$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

-Difetti:

*ignora* la maggior parte dei dati e soprattutto quelli prossimi al centro della distribuzione;

inoltre normalmente *aumenta* all'aumentare del numero di misure, invece di tendere ad un valore determinato.

-Il doppio della semidispersione massima

$$R = x_{max} - x_{min}$$

viene chiamato *range.*

*•Varianza e deviazione standard (campionaria)*

-La più importante (e più usata, non solo in fisica) stima di dispersione è la *deviazione standard (oppure scarto o deviazione quadratica media) s,* che si definisce come la radice quadrata della *varianza, $s^2$*

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

-Il significato della deviazione standard campionaria s è intuitivo, indicando quanto si scarta in media dalla media

-Rispetto alla variazione massima , considera tutte le misure ed è meno soggetta ad eventuali fluttuazioni che si possono presentare al variare del campione considerato

•Altro modo di calcolare la varianza e quindi deviazione standard

$$N s^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + N\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + N\bar{x}^2 - 2N\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2$$

da cui

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2$$

-Questa formula, utilizzando la differenza tra media dei quadrati e il quadrato della media, permette un calcolo più agevole della varianza e della deviazione standard campione

Tuttavia c'è un problema con questa definizione di varianza

•La definizione andrebbe benissimo se le quantità $(x_i - m)$ fossero indipendenti tra loro, ma non lo sono. Infatti:

$$\sum(x_i - m) = \sum x_i - \sum m = \sum x_i - nm =$$
$$= \sum x_i - n\sum(x_i/n) = \sum x_i - \sum x_i = 0$$

•Fisicamente questo dipende dal fatto che il valore di m è stato ricavato proprio dagli x e quindi le quantità indipendenti sono N-1

•Allora si prende come varianza campione la quantità

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

---

•*Elaborazione dati della esercitazione della SOMMA ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO* :

Calcolare la media *m* e la deviazione standard *s* del campione di somme degli angoli interni

•*Elaborazione dati della esercitazione della MISURA DI g*:

Calcolare la media *m* e la deviazione standard *s* del periodo $T_i$ per ciascuna massa

# *Incertezza sulla media m del campione*

- Quasi sempre interessa sapere qual è *la varianza della media* m delle $x_i$.

- Anche la media campione è infatti una variabile casuale con la sua funzione di distribuzione.

- La stima della varianza $s^2_m$ della distribuzione della media campione si può effettuare così:

$$m = \frac{1}{n}\sum x_i, \qquad s_m^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 = s^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)^2,$$

dove $\sigma^2_m = s^2$ è la varianza sulle $x_i$ ed è stata usata una propagazione dell' errore in quadratura dove compare la varianza invece dell'errore massimo

- Poiché $\frac{\partial m}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$; si ricavano

$$s_m^2 = s^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{s^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2.$$

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}.$$

• Esercizio: Qual è il significato fisico di $s_m$ e in cosa differisce da s?

•*Elaborazione dati della esercitazione della SOMMA ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO*:

Calcolare l'errore $s_m$ sulla media m

•*Elaborazione dati della esercitazione della MISURA DI g*:

Calcolare l'errore $s_m$ sulla media m del periodo $T_i$ per ciascuna massa

I valori sperimentali in tabella sono ottenuti per il modulo di Young E e quello di shear G dell'acciaio

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $E / 10^{10}\ N m^{-2}$ | 21.1 | 21.0 | 20.9 | 20.6 |
| $G / 10^{10}\ N m^{-2}$ | 8.12 | 8.15 | 8.13 | 8.08 |

La formula $(E/2G) - 1 = \nu$ è usata per calcolare il Poisson ratio $\nu$. Trova $\nu$ e stima l'errore massimo.

R $\quad \nu = \dfrac{\langle E \rangle}{2\langle G \rangle} - 1 \qquad$ con $\langle\ \rangle = \bar{\ }$

$\langle E \rangle = ( \qquad\qquad ) / 4 = 20.9$

$\langle G \rangle = 8.12$

$\Delta E_{MAX} = \dfrac{21.1 - 20.6}{2} = 0.25 \qquad \dfrac{\Delta E_M}{E} = 1.2\ \%$

$\Delta G_{MAX} = \dfrac{8.15 - 8.08}{2} = \dfrac{0.07}{2} = 0.035 \qquad \dfrac{\Delta G_M}{G} = 0.4\ \%$

Si ha allora $\qquad \dfrac{\Delta \nu}{\nu} = \left|\dfrac{\Delta E}{E}\right| + \left|\dfrac{\Delta G}{G}\right|$

$\nu = 0.287 \mp 1.8\ \% = 0.287 \mp 0.052$ (Rem)

Rifare l'esercizio sul Poisson ratio utilizzando la nozione di media campione, errore standard sulle medie e propagazione degli errori statistica

$$\nu = \frac{\langle E \rangle}{2\langle G \rangle} - 1 \qquad \langle E \rangle = 20.9 \qquad \langle E^2 \rangle = 436.845$$

$$\sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sigma_E = 0.19 \qquad \sigma_m(E) = \frac{0.19}{\sqrt{3}} \simeq 0.11$$

$$\frac{\sigma_m(E)}{\langle E \rangle} = \frac{0.11}{20.9} = 0.5\%$$

$$\langle G \rangle = 8.12 \qquad \cancel{\sigma_m}(G)$$

$$\frac{\sigma_m(G)}{\langle G \rangle} = 0.2\%$$

$$\frac{\sigma^2(\nu)}{\nu^2} = \frac{\sigma_E^2}{E^2} + \frac{\sigma_G^2}{G^2} \Rightarrow \frac{\sigma(\nu)}{\nu} = \sqrt{25\,10^{-6} + 4\,10^{-6}} = 10^{-3}\,5$$

$$\sigma(\nu) \simeq 0.5\% \qquad \nu = 1.287 \mp 0.5\%$$

MA 01/02 ore



L. Andreozzi
<andreozz@df.unipi.it>

• Nota: si è trovato dal calcolo precedente che la relazione tra varianza $s^2$ del campione e la varianza $s^2_m$ della media campione

$$s_m^2 = s^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{s^2}{n}$$

In altre parole l'operazione di media ha il potere di smorzare le fluttuazioni: facendo la media di tutte le N misure, questa *fluttua N volte meno della singola misura.*

---

• Quando si hanno misure i cui risultati fluttuano, una volta verificato che tutto è stato fatto con la massima cura, e le variazioni non sono dovute a errori dell'osservatore, ***il risultato delle misure si scrive:***

$$m \pm s_m \qquad \text{od anche} \qquad m \pm 2s_m$$

• ***Che significato dare a questa scrittura***?

• Bisogna conoscere la distribuzione della media campione

• ***Teorema del limite centrale***

**Premessa**: consideriamo una somma di $n$ variabili casuali indipendenti

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n$$

dove ogni $x_i$ ha media $m_i$ e deviazione standard $s_i$. Si può mostrare che la media $m$ e la s.d. $s$ della somma $x$ sono date da:

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_n, \\ s^2 &= s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_i^2 + \cdots + s_n^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

**TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE**: *Qualunque sia la distribuzione delle variabili casuali indipendenti* $x_i$, *sotto condizioni molto deboli, la* somma $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n$ *è asintoticamente normale* $(m, s)$ *dove* $m$ *e* $s$ *sono date dalla (4.5).*

In particolare *se le variabili indipendenti* $x_i$ *hanno la stessa distribuzione di probabilità ed ogni* $x_i$ *ha media* $\overline{m}$ *e s.d.* $\bar{s}$ finite *la somma* $x = \sum x_i$ *è asintoticamente normale* $(n\overline{m}, \sqrt{n}\bar{s})$.

*Segue che* la media aritmetica $\sum x_i/n$ è asintoticamente normale $(\overline{m}, \bar{s}/\sqrt{n})$ *cioè la media campione tende ad avere una distribuzione di Gauss al tendere all'infinito delle dimensioni del campione.*

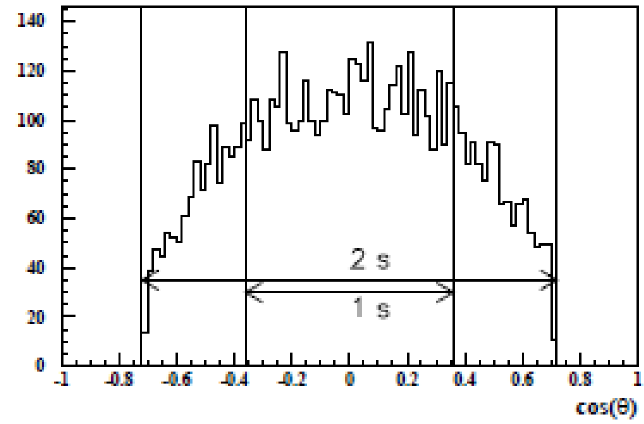
L'importanza del teorema sta inoltre nel fatto che la convergenza è rapida; già per la media di 6 misure la distribuzione è ragionevolmente gaussiana. Quando il campione è di 20 o più misure la distribuzione è praticamente indistinguibile da una gaussiana in quasi tutti i casi sperimentali.

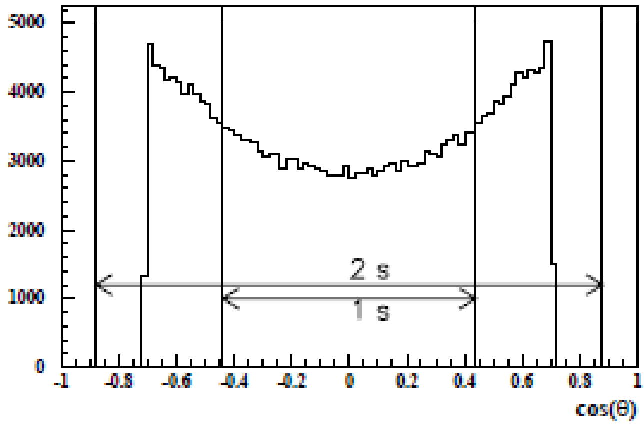

<andreozz@df.unipi.it>

# *Caratteristiche di s e intervalli di confidenza*

•Un intervallo centrato nella media *m* e di semilarghezza pari alla deviazione standard *s*, questo intervallo non é un intervallo massimo e rappresenta solo una parte della larghezza della distribuzione del campione.

*Esempio*:




Due esempi di distribuzioni angolari molto diverse definite però nello stesso intervallo (-0.7:0.7). In entrambi i casi l'intervallo ***x* ± 2*s*** é sufficiente per includere tutta la distribuzione e costituisce pertanto un *intervallo di certezza*.
L'intervallo x ± s é invece parziale e racchiude il 61% degli eventi nel grafico in alto ed il 58% in quello in basso.

• *Osservazione empirica*: con intervalli di semilarghezza pari a 3s, si hanno generalmente intervalli all'interno dei quali tutti i valori sono contenuti ( ***intervalli di quasi certezza).***

---

# Costruzione dell'intervallo di confidenza

• Supponiamo di conoscere μ e σ della parent distribution

• Come conseguenza del T. limite centrale la distribuzione delle medie , ottenute da campioni di numerosità N, è gaussiana con media $\mu$ (quella della parent distribution) e deviazione standard $\sigma / (N)^{1/2}$

• Allora la variabile z è gaussiana in forma standard

$$z = \frac{X_{med} - \mu}{\sigma/(N)^{1/2}}$$

• L'integrale da -2 a 2 della G(z) vale 0.9544.

• Allora con un ***livello di confidenza*** del 95.44% posso scrivere

$$-2 \leq \frac{X_{med} - \mu}{\sigma/(N)^{1/2}} \leq +2$$

da cui con semplici calcoli si ricava ***l'intervallo di confidenza*** del 95.44 per la media

$$X_{med} - 2\,\sigma/(N)^{1/2} \leq \mu \leq X_{med} + 2\,\sigma/(N)^{1/2}$$

• Se non si conosce (come di solito) la deviazione standard, va sostituita con lo scarto quadratico medio *s* ottenuto dal campione

•Se il campione è di 20 o più misure,la distribuzione della media è praticamente indistinguibile da una gaussiana. Si hanno quindi le probabilità :

$$|x - m| \leq s = 68.26\ \%$$

$$|x - m| \leq 2s = 95.44\ \%$$

e valgono tutte le considerazioni precedenti

• In presenza di piccoli campioni le cose cambiano drasticamente. Infatti la variabile

$$t = \frac{X_{med} - \mu}{S/(N)^{1/2}}$$

non è più distribuita come una gaussiana in forma standard

•Per qualunque probabilità assegnata , bisogna allora introdurre un fattore correttivo che dipende dal numero di gradi di libertà cioè da N-1, numero delle grandezze indipendenti

❑ **Esempio**: Sia $n = 5$. Qual'è l'intervallo intorno a $m$ tale che ci sia il 95% di probabilità di trovarci la $\mu$? Questo intervallo è:

$$m \pm t_{95,n-1}\, s_m.$$

Tabella del t-di Student

| $n-1$ \ $P$ | 50% | 80% | 90% | 95% | 98% | 99% | 99.5% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 127.32 |
| 2 | 0.816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 14.089 |
| 3 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 7.453 |
| 4 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 5.598 |
| 5 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 4.773 |
| 6 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 4.317 |
| 7 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.029 |
| 8 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 3.833 |
| 9 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 3.690 |
| 10 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 3.581 |
| 11 | 0.697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 3.497 |
| 12 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.428 |
| 13 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.372 |
| 14 | 0.692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.326 |
| 15 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.286 |
| 16 | 0.690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.252 |
| 17 | 0.689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.223 |
| 18 | 0.688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.197 |
| 19 | 0.688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.174 |
| 20 | 0.687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.153 |
| 21 | 0.686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.135 |
| 22 | 0.686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.119 |
| 23 | 0.685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.104 |
| 24 | 0.685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.090 |
| 25 | 0.684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.078 |
| 26 | 0.684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.067 |
| 27 | 0.684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.057 |
| 28 | 0.683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.047 |
| 29 | 0.683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.038 |
| 30 | 0.683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.030 |
| 40 | 0.681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 2.971 |
| 50 | 0.679 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 2.937 |
| 60 | 0.679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 2.915 |
| 80 | 0.678 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 2.887 |
| 100 | 0.677 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 2.871 |
| 120 | 0.677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 2.860 |
| $\infty$ | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 2.807 |