# *Analisi delle dipendenze funzionali: il fit dei dati*

• Dati *n* punti (Xi, Yi) il problema di *fit* o *best fit* consiste nel cercare una curva semplice che si adatti nel migliore dei modi ai dati

• Spesso ci sono ragioni per preferire una data funzione ( teoria, analogia) : si tratta di scegliere i parametri da cui questa funzione dipende in modo che sia la migliore possibile.

• Esistono vari criteri per dire che una curva è la migliore possibile:
-Un fit di tipo generale
- e metodi particolari più semplici che richiedono però la verifica preventiva della seguente condizione :

l’errore propagato da X a Y attraverso la funzione deve essere trascurabile nei confronti dell’errore sperimentale stimato nella misura di Y

Tradotto in linguaggio matematico:

$$\left| \left( \frac{df}{dx} \right)_{X_i} \Delta X_i \right| \ll \Delta Y$$

## *Metodo dei minimi quadrati*

• Chiamiamo $D_i = Y_i - f(X_i)$ la differenza tra il valore misurato Yi e il corrispondente $y = f(X_i)$ valore della curva

• Si costruisce $S = \Sigma\ (Di)^2 = \Sigma\ [Yi\ -\ f(Xi)]^2$

• Il metodo dei minimi quadrati stabilisce che i valori per i parametri della funzione f(x) sono quelli che minimizzano la somma S

• *Osservazione*: il principio che sta alla base del metodo tratta tutte le misure Yi sullo stessi piano, accettabile solo se le misure hanno lo stesso errore

---

• *Esempio1*:

supponiamo che Y sia direttamente proporzionale ad X : allora y=f(x) diventa semplicemente y = mx , cioè una retta che passa per l'origine caratterizzata da un solo parametro, il coefficiente angolare m. La somma S diventa

$$S = \Sigma(Di)^2 = \Sigma[Yi\ -\ mXi]^2$$

il valore di m che rende minima la somma S sarà quello che annulla la derivata dS/dm

Calcoliamo allora la derivata

$$dS/dm = -2\ \Sigma(Yi\ -\ mXi)\ Xi$$

e poniamola uguale a zero

$$-2\ \Sigma(Yi\ -\ mXi)\ Xi = 0$$

e successivamente

$$\Sigma Yi\,Xi - m\Sigma Xi^2 = 0$$

da cui infine si può ricavare m

$$m = \frac{\Sigma Yi\,Xi}{\Sigma Xi^2}$$

---

• *Esempio2*:

si misura una quantità $y$ varie volte, ottenendo $n$ valori distinti $Y_i$. Sia $x$ il tempo; $f(x) = \text{cost} = a$. Per trovare il miglior valore di $a$ bisogna minimizzare la quantità

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i - a)^2 \\ \frac{dS}{da} &= -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i &= \sum_{i=1}^{n} a = na \\ a &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \end{aligned}$$

$$(\Delta a)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial a}{\partial Y_i}\right)^2 \Delta Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta Y^2}{n^2} = \frac{\Delta Y^2}{n}$$

*La media aritmetica rende minima la somma dei quadrati degli scarti.*

• *Esempio3*:

... la funzione ipotizzata sia lineare: $f(x) = a + bx$, e $\{X_i, Y_i, i = 1 \dots n\}$ siano le misure. Per trovare i migliori valori di $a$ e $b$ perchè la retta si adatti il meglio possibile ai dati sperimentali costruiamo la funzione

$$S = \sum_{i=1}^{n}[Y_i - f(X_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i)^2.$$

Bisogna cercare il minimo di $S$ al variare di $a$ e $b$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum(Y_i - a - bX_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2\sum(Y_i - a - bX_i)X_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Na + b\Sigma X_i = \Sigma Y_i \\ a\Sigma X_i + b\Sigma X_i^2 = \Sigma X_i Y_i \end{cases}$$

$$a = \frac{\Sigma Y_i \cdot \Sigma X_i^2 - \Sigma X_i \cdot \Sigma X_i Y_i}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}$$

$$b = \frac{n\Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i \cdot \Sigma Y_i}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}$$

$$(\Delta a)^2 = \Sigma_i \left(\frac{\partial a}{\partial Y_i}\right)^2 (\Delta Y_i)^2 = \frac{(\Delta Y)^2 \Sigma X_i^2}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}$$

$$(\Delta b)^2 = \Sigma_i \left(\frac{\partial b}{\partial Y_i}\right)^2 (\Delta Y_i)^2 = \frac{(\Delta Y)^2 n}{n\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2}$$

○ **Esercizio**: ricavare con il metodo dei minimi quadrati il miglior valore di $a$ per le seguenti funzioni:

- $f(x) = ax$,
- $f(x) = ax^2$,
- $f(x) = ae^{-x}$.

Il metodo dei minimi quadrati dà risultati semplici in tutti i casi in cui la funzione $f(x)$ dipende in modo lineare dai parametri: infatti in questi casi le condizioni di minimo conducono a sistemi di equazioni lineari nei parametri.

# *Metodo dei minimo chi quadro*

Supponiamo di avere delle misure $X_i$, $Y_i$ tali che l'errore su $Y_i$ sia $\sigma_i$ mentre manteniamo per ora l'ipotesi che l'errore sulle $X_i$ sia molto piccolo.

Invece di calcolare le differenze $D_i = Y_i - f(X_i)$ si usa

$$D_i = \frac{Y_i - f(X_i)}{\sigma_i},$$

cioè ogni differenza viene pesata col relativo errore: si cercherà poi il minimo della funzione:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{Y_i - f(X_i)}{\sigma_i} \right)^2$$

Questo metodo viene indicato come il metodo del minimo $\chi^2$. Infatti se si assume che le $Y_i$ abbiano una distribuzione gaussiana, le $D_i$ sono variabili gaussiane con media zero e varianza uno ed $S$ è una variabile che ha la distribuzione del $\chi^2$.

---

❑ **Esempio**: Sia $f(x) = \mathrm{Cte} = a$. Applichiamo il metodo appena imparato:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{Y_i - a}{\sigma_i} \right)^2 = \text{minimo} \\ \frac{dS}{da} &= -2 \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{Y_i - a}{\sigma_i} \right) \frac{1}{\sigma_i} = 0 \end{aligned}$$

$$a = \frac{\sum Y_i/\sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2}, \qquad (\Delta a)^2 = \frac{1}{\sum 1/\sigma_i^2}.$$

cioè i valori delle $Y_i$ sono pesati con l'inverso dei quadrati dell'errore. Si usa tutte le volte che le misure hanno precisione differente. Questa importante formula è detta *media pesata* delle $Y_i$.

❑ **Esempio**: Prendiamo come funzione $f(x) = a + bx$.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{Y_i - a - bX_i}{\sigma_i} \right)^2 = \text{ minimo}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum \dfrac{1}{\sigma_i} \left( \dfrac{Y_i - a - bX_i}{\sigma_i} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum \dfrac{x_i}{\sigma_i} \left( \dfrac{Y_i - a - bX_i}{\sigma_i} \right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \sum \dfrac{1}{\sigma_i^2} + b \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2} = \sum \dfrac{Y_i}{\sigma_i^2} \\ a \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2} + b \sum \dfrac{X_i^2}{\sigma_i^2} = \sum \dfrac{Y_i X_i}{\sigma_i^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum \dfrac{Y_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i^2}{\sigma_i^2} - \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i Y_i}{\sigma_i^2}}{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \\ \\ b = \dfrac{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i Y_i}{\sigma_i^2} - \sum \dfrac{Y_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta a)^2 = \sum \left( \dfrac{\partial a}{\partial Y_i} \right)^2 \sigma_i^2 = \dfrac{\sum \dfrac{X_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \\ (\Delta b)^2 = \sum \left( \dfrac{\partial b}{\partial Y_i} \right)^2 \sigma_i^2 = \dfrac{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2}}{\sum \dfrac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum \dfrac{X_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum \dfrac{X_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \end{cases}$$

# *Test del chi quadro*

Richiamiamo la definizione della variabile "$\chi^2$ a $n$ gradi di libertà": date $n$ variabili $x_i$ gaussiane con media $\mu_i$ e deviazione standard $\sigma_i$, costruite le variabili standard

$$z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i},$$

la quantità

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

si chiama $\chi^2$ ad $n$ gradi di libertà.

$$\begin{aligned} P(S) &= \frac{S^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-S/2} \\ E[S] &= n \\ \sigma_S^2 &= 2n \end{aligned}$$

La tavola riportata nell'ultima pagina dà qual'è il valore $\gamma$ di $S$ tale che per un assegnato $n$ ad una assegnata probabilità $\wp$

$$P(S \leq \gamma) = \wp.$$

Ad esempio sia $n = 10$, ci si domanda qual'è il valore $\gamma$ di $\chi^2$ tale che la probabilità che $S \leq \gamma$ sia il 95%:

$$P(S_{10} \leq \gamma) = 95\%,$$

Le tavole[2] in corrisponedenza della riga 10, colonna 4 danno $\gamma = 18.3$.

| $n$ | $\chi^2_{.995}$ | $\chi^2_{.99}$ | $\chi^2_{.975}$ | $\chi^2_{.95}$ | $\chi^2_{.90}$ | $\chi^2_{.75}$ | $\chi^2_{.5}$ | $\chi^2_{.25}$ | $\chi^2_{.10}$ | $\chi^2_{.05}$ | $\chi^2_{.025}$ | $\chi^2_{.01}$ | $\chi^2_{.005}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.88 | 6.63 | 5.02 | 3.84 | 2.71 | 1.32 | .455 | .102 | .0158 | .0039 | .0010 | .0002 | .0000 |
| 2 | 10.6 | 9.21 | 7.38 | 5.99 | 4.61 | 2.77 | 1.39 | .575 | .211 | .103 | .0506 | .0201 | .0100 |
| 3 | 12.8 | 11.3 | 9.35 | 7.81 | 6.25 | 4.11 | 2.37 | 1.21 | .584 | .352 | .216 | .155 | .072 |
| 4 | 14.9 | 13.3 | 11.1 | 9.49 | 7.78 | 5.39 | 3.36 | 1.92 | 1.06 | .711 | .484 | .297 | .207 |
| 5 | 16.7 | 15.1 | 12.8 | 11.1 | 9.24 | 6.63 | 4.35 | 2.67 | 1.61 | 1.15 | .831 | .554 | .412 |
| 6 | 18.5 | 16.8 | 14.4 | 12.6 | 10.6 | 7.84 | 5.35 | 3.45 | 2.20 | 1.64 | 1.24 | .872 | .676 |
| 7 | 20.3 | 18.5 | 16.0 | 14.1 | 12.0 | 9.04 | 6.35 | 4.25 | 2.83 | 2.17 | 1.69 | 1.24 | .989 |
| 8 | 22.0 | 20.1 | 17.5 | 15.5 | 13.4 | 10.2 | 7.34 | 5.07 | 3.49 | 2.73 | 2.18 | 1.65 | 1.34 |
| 9 | 23.6 | 21.7 | 19.0 | 16.9 | 14.7 | 11.4 | 8.34 | 5.90 | 4.17 | 3.33 | 2.70 | 2.09 | 1.73 |
| 10 | 25.2 | 23.2 | 20.5 | $\boxed{18.3}$ | 16.0 | 12.5 | 9.34 | 6.74 | 4.87 | 3.94 | 3.25 | 2.56 | 2.16 |
| 11 | 26.8 | 24.7 | 21.9 | 19.7 | 17.3 | 13.7 | 10.3 | 7.58 | 5.58 | 4.57 | 3.82 | 3.05 | 2.60 |
| 12 | 28.3 | 26.2 | 23.3 | 21.0 | 18.5 | 14.8 | 11.3 | 8.44 | 6.30 | 5.23 | 4.40 | 3.57 | 3.07 |
| 13 | 20.8 | 27.7 | 24.7 | 22.4 | 19.8 | 16.0 | 12.3 | 9.30 | 7.04 | 5.89 | 5.01 | 4.11 | 3.57 |
| 14 | 31.3 | 29.1 | 26.1 | 23.7 | 21.1 | 17.1 | 13.3 | 10.2 | 7.79 | 6.57 | 5.63 | 4.66 | 4.07 |
| 15 | 32.8 | 30.6 | 27.5 | 25.0 | 22.3 | 18.2 | 14.3 | 11.0 | 8.55 | 7.26 | 6.26 | 5.23 | 4.60 |
| 16 | 34.3 | 32.0 | 28.8 | 26.3 | 23.5 | 19.4 | 15.3 | 11.9 | 9.31 | 7.96 | 6.91 | 5.81 | 5.14 |
| 17 | 35.7 | 33.4 | 30.2 | 27.6 | 24.8 | 20.5 | 16.3 | 12.8 | 10.1 | 8.67 | 7.56 | 6.41 | 5.70 |
| 18 | 37.2 | 34.8 | 31.5 | 28.9 | 26.0 | 21.6 | 17.3 | 13.7 | 10.9 | 9.39 | 8.23 | 7.01 | 6.26 |
| 19 | 38.6 | 36.2 | 32.9 | 30.1 | 27.2 | 22.7 | 18.3 | 14.6 | 11.7 | 10.1 | 8.91 | 7.63 | 6.84 |
| 20 | 40.0 | 37.6 | 34.2 | 31.4 | 28.4 | 23.8 | 19.3 | 15.5 | 12.4 | 10.9 | 9.59 | 8.26 | 7.43 |
| 21 | 41.4 | 38.9 | 35.5 | 32.7 | 29.6 | 24.9 | 20.3 | 16.3 | 13.2 | 11.6 | 10.3 | 8.90 | 8.03 |
| 22 | 42.8 | 40.3 | 36.8 | 33.9 | 30.8 | 26.0 | 21.3 | 17.2 | 14.0 | 12.3 | 11.0 | 9.54 | 8.64 |
| 23 | 44.2 | 41.6 | 38.1 | 35.2 | 32.0 | 27.1 | 22.3 | 18.1 | 14.8 | 13.1 | 11.7 | 10.2 | 9.26 |
| 24 | 45.6 | 43.0 | 39.4 | 36.4 | 33.2 | 28.2 | 23.3 | 19.0 | 15.7 | 13.8 | 12.4 | 10.9 | 9.89 |
| 25 | 46.9 | 44.3 | 40.6 | 37.7 | 34.4 | 29.3 | 24.3 | 19.9 | 16.5 | 14.6 | 13.1 | 11.5 | 10.5 |
| 26 | 48.3 | 45.6 | 41.9 | 38.9 | 35.6 | 30.4 | 25.3 | 20.8 | 17.3 | 15.4 | 13.8 | 12.2 | 11.2 |
| 27 | 49.6 | 47.0 | 43.2 | 40.1 | 36.7 | 31.5 | 26.3 | 21.7 | 18.1 | 16.2 | 14.6 | 12.9 | 11.8 |
| 28 | 51.0 | 48.3 | 44.5 | 41.3 | 37.9 | 32.6 | 27.3 | 22.7 | 18.9 | 16.9 | 15.3 | 13.6 | 12.5 |
| 29 | 52.3 | 49.6 | 45.7 | 42.6 | 39.1 | 33.7 | 28.3 | 23.6 | 19.8 | 17.7 | 16.0 | 14.3 | 13.1 |
| 30 | 53.7 | 50.9 | 47.0 | 43.8 | 40.3 | 34.8 | 39.3 | 24.5 | 29.6 | 18.5 | 16.8 | 15.0 | 13.8 |
| 40 | 66.8 | 63.7 | 59.3 | 55.8 | 51.8 | 45.6 | 39.3 | 33.7 | 29.1 | 26.5 | 24.4 | 22.2 | 20.7 |
| 50 | 79.5 | 76.2 | 71.4 | 67.5 | 63.2 | 56.3 | 49.3 | 42.9 | 37.7 | 34.8 | 32.4 | 29.7 | 28.0 |
| 60 | 92.7 | 88.4 | 83.3 | 79.1 | 74.4 | 67.0 | 59.3 | 52.3 | 46.5 | 43.2 | 40.5 | 37.5 | 35.5 |
| 70 | 104.2 | 100.4 | 95.0 | 90.5 | 85.5 | 77.6 | 69.3 | 61.7 | 55.3 | 51.7 | 48.8 | 45.4 | 43.3 |
| 80 | 116.3 | 112.3 | 106.6 | 101.9 | 96.6 | 88.1 | 79.3 | 71.1 | 64.3 | 60.4 | 57.2 | 53.5 | 51.2 |
| 90 | 128.3 | 124.1 | 118.1 | 113.1 | 107.6 | 98.6 | 89.3 | 80.6 | 73.3 | 69.1 | 65.6 | 61.3 | 59.2 |
| 100 | 140.2 | 135.2 | 129.6 | 124.3 | 118.5 | 109.1 | 99.5 | 90.1 | 82.4 | 77.9 | 74.2 | 70.1 | 67.3 |

•1) Il $\chi^2$ può fornire *un criterio generale ed obbiettivo* per decidere se una certa equazione descriva bene oppure no i risultati sperimentali

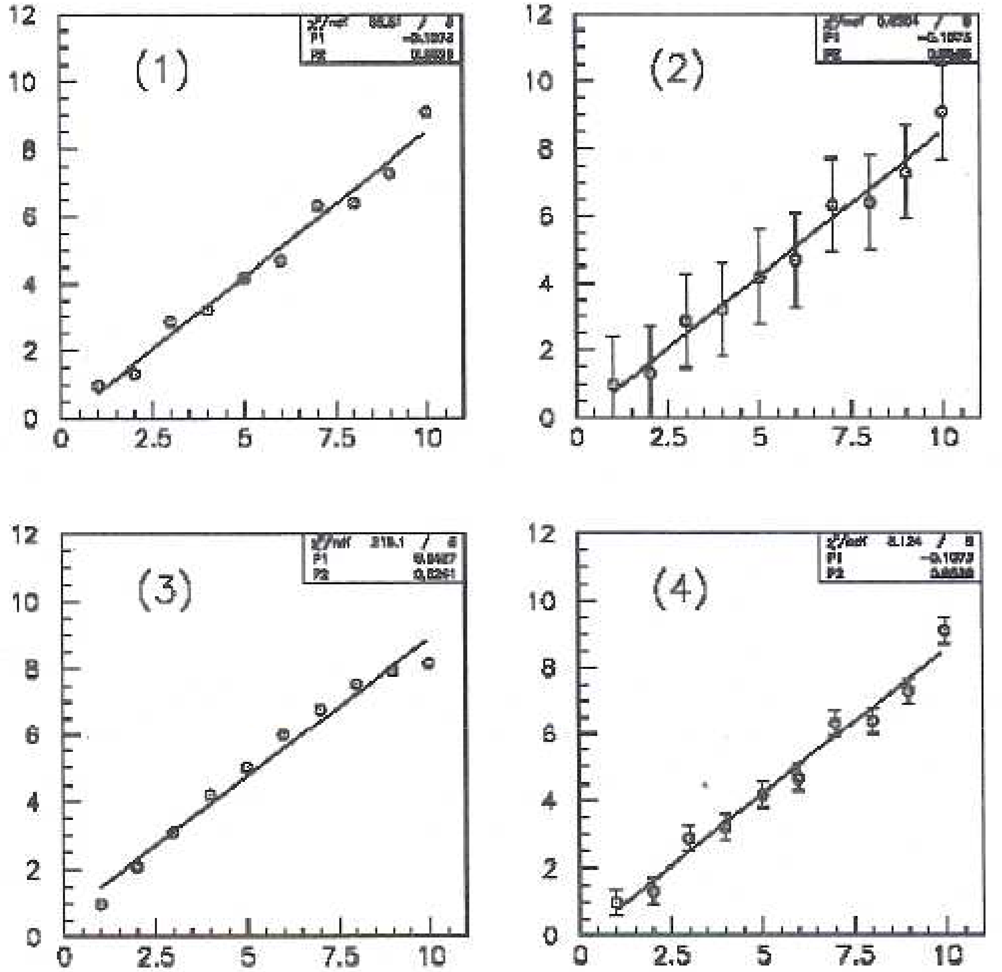



**Fig.3.4.** Sono i 4 casi di fit rettilineo descritti nel testo. Nei riquadri sono riportati per ogni fit il valore del $\chi^2$, di N-2 e dei 2 parametri della retta, rispettivamente c ed m ottenuti dal fit.

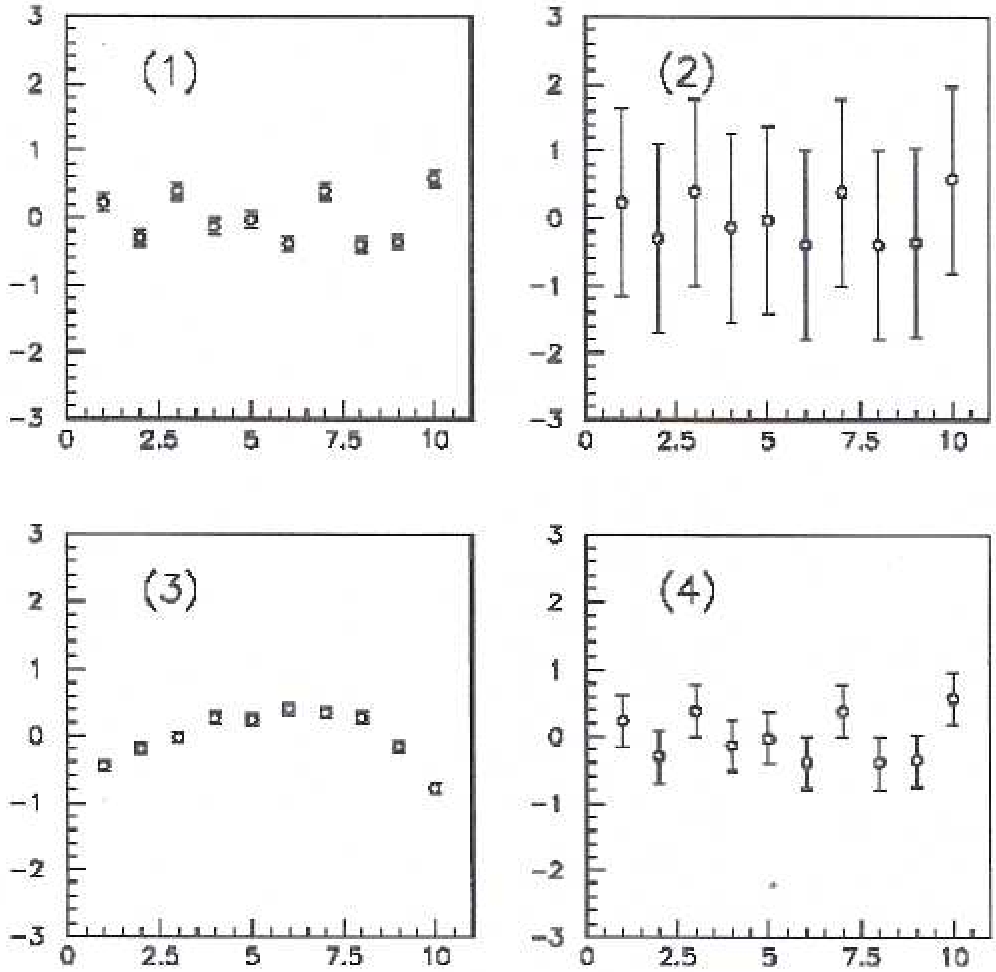
Caso (1): i punti mostrano un andamento rettilineo ma le incertezze sono molto piccole per cui i punti scartano dalla retta per "molte deviazioni standard";

Caso (2): i punti mostrano un andamento rettilineo ma le incertezze sono molto grandi, per cui i punti scartano dalla retta solo per "frazioni di deviazioni standard";

Caso (3): i punti mostrano un andamento diverso da quello lineare. Gli scarti dei punti dalla retta hanno a loro volta un andamento;

Caso (4): i punti mostrano un andamento rettilineo con le incertezze tali per cui i punti scartano mediamente una o poco più deviazioni standard.

$$res_i = y_i - \hat{m}x_i - \hat{c}$$




Osserviamo che: nei casi (1) e (2) l'andamento rettilineo è ragionevole, ma probabilmente non sono ben stimate le incertezze dei punti. Nel primo caso la media del modulo dei residui è molto maggiore e nel secondo molto minore delle singole incertezze ($\sigma$) stimate dai dati. Nel caso (3) si potrebbe ipotizzare un andamento diverso da quello lineare. Infine il caso (4) è quello "buono", cioè l'andamento è rettilineo e le incertezze sono ben stimate.

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - \hat{m}x_i - \hat{c})^2}{\sigma_i^2}$$

il test consiste nel calcolare il valore di questa variabile e poi confrontarlo con il valore atteso(cioè il numero dei gradi libertà $\nu$): se dal test si ottiene un valore molto diverso da questo, è lecito sospettare qualche problema.

Riprendiamo, come esempio, i 4 casi enunciati, per i quali il valore del numerodei gradi di libertà è sempre 8, mentre il valore ottenuto per il $\chi 2$ vale, rispettivamente:
circa 86 nel caso 1): meno di 1 per il caso 2); 216 per il caso 3); circa 8 infine nel caso 4).

Risulta chiaro (vedere figura iniziale) che il valore troppo grande ottenuto nel caso1 ed il valore troppo piccolo ottenuto nel caso 2, sono essenzialmente da imputare alle stime entrambe errate delle incertezze sperimentali: sottostimate in 1, sovrastimate, invece, in 2.

Il caso 3 è il più sospetto: il valore ottenuto per il $\chi 2$ è molto elevato, come nel caso 1, ma non sembra imputabile stavolta ad una errata stima delle incertezze; è probabilmente errata l'ipotesi di linearità.

•1) Il $\chi^2$ può fornire ***un criterio generale ed obbiettivo*** per decidere se una certa equazione descriva bene oppure no i risultati sperimentali

-Supponiamo di aver misurato {Xi,Yi} legate tra loro da una funzione y=f(x,p) la cui forma è ipotizzata sulla base di considerazioni fisiche ecc e i cui paramatri sono stati stimati col metodo del minimo $\chi^2$.

Il $\chi^2$ in questo caso vale

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{[Y_i - f(X_i, p)]^2}{\sigma_{Y_i}^2} = S$$

-Quanti più S è piccolo tanto meno la curva teorica si discosta dai dati sperimentali

-che significato ha S?

Si cerca sulle tavole in corrispondenza al numero di gradi di libertà dove si trova $S$. Quando si fa un fit il numero di gradi di libertà $\nu$ è il numero $n$ delle misure meno il numero $n_p$ di parametri della funzione $f(x,p)$

$$\nu = n - n_p$$

Per esempio supponiamo $S = 7.2$, $\nu = 5$. Si ottiene $P(\chi^2 \leq S) \approx 80\%$. Questo significa che ripetendo le misure tante volte ci si aspetta che nell'80% dei casi si otterrà un valore minore di 7.2, cioè 7.2 è un valore non molto buono per il $\chi^2$, ma nemmeno assurdo, nel 20% dei casi può succedere che venga un risultato più alto.

Convenzionalmente si accetta come limite per i risultati buoni quello del 95% da un lato, e quello dello 5% dall'altro, perchè, anche se a prima vista sembra che la cosa migliore sia ottenere dei $\chi^2$ molto piccoli (o addirittura zero), in realtà questi casi vanno guardati con sospetto. Di solito $\chi^2$ piccoli si ottengono perchè gli errori sono sovrastimati, oppure i risultati sono truccati, cioè lo sperimentatore (consciamente o no) tende ad attribuire al risultato delle misure il valore che gli piacerebbe.

•2) Altra applicazione del test del $\chi^2$

•Supponiamo di fare un esperimento che ha come oggetto l'osservazione di possibili eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ di cui registriamo la frequenza $O_1, O_2, \dots, O_k, \dots, O_n$ ('$O$' sta per Osservato)

•Facendo ipotesi sul processo conosciamo le frequenze teoriche $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Ci saranno differenze tra le frequenze osservate e quelle teoriche. Per determinare se le differenze sono significative (e quindi eventualmente rifiutare le ipotesi che hanno portato a calcolare $e_k$) si usa la quantità

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

che viene considerata ancora una variabile $\chi^2$: formalmente ricorda un $\chi^2$ perchè si suppone che sia Poissoniana la distribuzione di ognuna delle frequenze $O_i$ e l'$O_i$ misurato rappresenta il valor medio della distribuzione campione, $e_i$ rappresenta il valor medio della parent distribution. ed inoltre per la Poissoniana $\sigma_k^2 = e_k$.

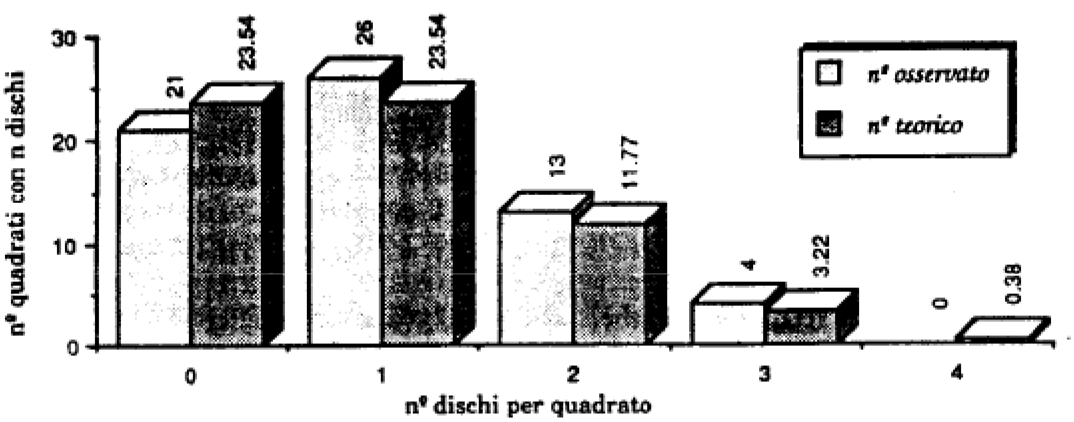
I gradi di libertà sono $n-m-1$ dove $n$ è il numero delle osservazioni fatte, $m$ è il numero dei parametri che servono per calcolare le probabilità degli eventi $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_n$ e quindi le frequenze teoriche; inoltre c'è la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} O_i = n$$

e questa relazione causa la perdita di un altro grado di libertà.

❑ **Esempio**: si supponga di avere un foglio di carta diviso in 64 quadrati numerati (da 1 a 64). Si prendono 64 dischi e si lasciano cadere sul foglio di carta uno alla volta, in modo che si distribuiscano pressochè uniformemente sul quadrato. Quindi si fa una tavola suddividendo i quadrati in funzione del numero dei dischi che essi contengono:

| $k$: n$^o$ dei dischi per quadrato. | $O_k$: n$^o$ quadrati con $k$ dischi. | $e_k$: frequenza teorica |
|---|---|---|
| 0 | 21 | 23.54 |
| 1 | 26 | 23.54 |
| 2 | 13 | 11.77 |
| 3 | 4 | 3.22 |
| 4 | 0 | 0.38 |




Per calcolare le frequenze teoriche, si è fatta l'ipotesi che la distrbuzione della variabile $k$ sia una Poissoniana:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}.$$

Ovviamente $\mu$ vale uno (64 dischi in 64 quadrati cioè in media un disco per quadrato). Le frequenze teoriche si calcolano moltiplicando $P(k)$ per il numero totale $n = 64$ dei quadrati:

$$e_k = \frac{64}{e}\frac{1}{k!},$$

cioè

$$e_0 = \frac{64}{e}, \qquad e_1 = \frac{64}{e}, \qquad e_2 = \frac{64}{e} \cdot \frac{1}{2}, \qquad e_3 = \frac{64}{e} \cdot \frac{1}{3!}, \qquad e_4 = \frac{64}{e} \cdot \frac{1}{4!}.$$

Adesso prendiamo la calcolatrice e troviamo $S$:

$$S = \sum_{i=0}^{3} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(21 - 23.54)^2}{23.54} + \frac{(26 - 23.54)^2}{23.54} + \frac{(13 - 11.77)^2}{11.77} + \frac{(4 - 5.15)^2}{5.15}.$$

Calcolando la somma $S$ si ottiene $S \approx 0.91$. I gradi di libertà sono $4 - 1 - 1 = 2$. Utilizzando le tavole si trova:

$$P(\chi^2 \leq S) \approx 35\%.$$