Formule approssimate

• Supponiamo di avere una funzione f(x) tabulata, cioè se ne conoscano i valori f_i in corrispondenza di punti discreti x_i dell'asse x.

Si pongono i seguenti problemi:
-Come derivarla
-Come integrarla
-Che valore assume per $x_i < x < x_{i+1}$

Formule approssimate per la derivata di una funzione data per punti

Supponiamo che i punti della tabella siano ugualmente spaziati di una quantità h:

$$x_i = x_o \pm ih \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Supponiamo poi che la funzione sia derivabile su tutto l'intervallo delle x in cui interessa elaborarla, ed inoltre che h sia abbastaza piccolo in modo tale che la funzione non compia forti oscillazione in quell'intervallo h. In queste condizioni avrà senso usare le formule approssimate che si ottengono per le derivate e gli integrali. Per semplicità di notazione

si indica $f(x_i)$ con f_i e

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x_i) \qquad \text{con} \qquad f_i^k.$$

Il valore f_m di $f(x)$ in ogni punto x_m si può esprimere in termini di $f(x)$ e della sua derivata in un altro punto x_i per mezzo di uno sviluppo in serie di Taylor intorno ad x_i:

$$f_m = f(x_i \pm mh) = f_i \pm mhf_i' + \frac{(mh)^2}{2!}f_i'' \pm \frac{(mh)^3}{3!}f_i''' \cdots$$

Quindi per $m = 1$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' + \frac{h^3}{6}f_i''' + \cdots$$

Una espressione approssimata per la derivata di $f(x)$ in x_i è:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \left(\frac{h}{2}f_i'' + \frac{h^2}{6}f_i''' + \cdots\right)$$

Trascurando i termini tra parentesi si ottiene

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

L'errore è dato dai termini entro parentesi, dei quali il termine predominante è $-hf_i''/2$.

Per $m = -1$ si ottiene:

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' - \frac{h^3}{6}f_i''' + \cdots$$

Sottraendo f_{i-1} da f_{i+1} si ottiene un'altra espressione approssimata per la derivata prima:

$$\boxed{f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad \Delta f_i' = -\frac{h^2}{6}f_i'''}$$

Sommando f_{i+1} con f_{i-1} si ottiene un'espressione approssimata per f_i'':

$$\boxed{f_i'' \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \qquad \Delta f_i'' = -\frac{h^2}{12}f_i^{iv}}$$

Formule approssimate per gli integrali di una funzione data per punti

Valgono le stesse ipotesi fatte al paragrafo precedente, e si usano le stesse notazioni. L'integrale di una funzione $f(x)$ si fa integrando il suo sviluppo in serie di Taylor termine per termine.

Indichiamo con I_i l'integrale di una funzione $f(x)$ da $x = x_i$ a $x = x_i + h = x_{i+1}$:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_0^h f(x_i + h)\,dh, \qquad h = x - x_i,$$

$$f(x_i + h) = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' + \frac{h^3}{6}f_i''' + \cdots$$

Integrando termine per termine si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x_i + h)\,dh &= \int_0^h f_i\,dh + \int_0^h hf_i'\,dh + \int_0^h \frac{h^2}{2}f_i''\,dh + \cdots \\ &= hf_i + \frac{h^2}{2}f_i' + \frac{h^3}{6}f_i'' + \cdots\end{aligned}$$

Sostituiamo a f_i' la formula a due punti della derivata, data dalla

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \left(\frac{h}{2}f_i'' + \frac{h^2}{6}f_i''' + \cdots\right)$$

da cui, trascurando i termini in h^3 e superiori, si ottiene

$$\boxed{I_i = hf_i + \frac{h^2}{2}\frac{f_{i-1} - f_i}{h}, \qquad \Delta I_i = -\frac{h^3}{12}f_i''.}$$

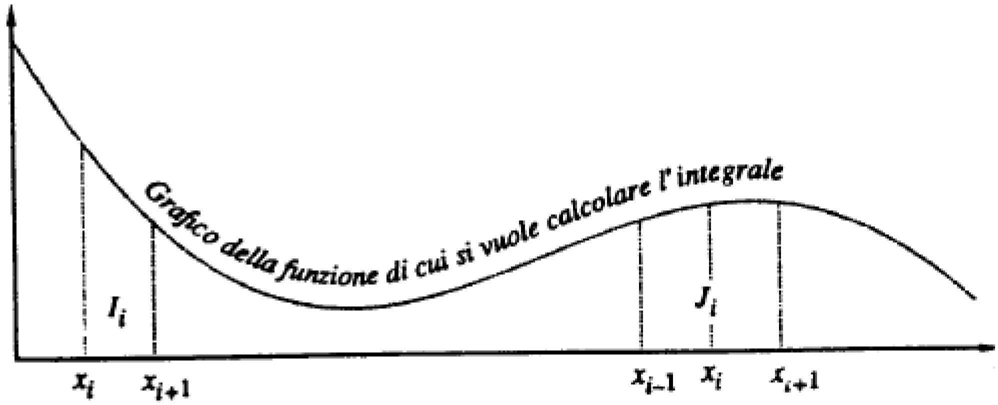

Figura 6.1: Significato di I_i e di J_i.

L'integrale fatto in questo modo non converge molto rapidamente, cioè bisogna prendere molti intervallini per avere una buona approssimazione. Molto usata è invece la *formula di Simpson*:

$$\boxed{J_i = \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right), \qquad \Delta J_i = -\frac{h^5}{90} f_i^{iv}}$$

Dove J_i è l'integrale fra x_{i-1} e x_{i+1}. Vediamo come si ricava questa formula:

$$J_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{-h}^{h} f(x_i + h)\,dh, \qquad h = x - x_i$$

$$f(x_i + h) = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + \frac{h^4}{24} f_i^{iv} \cdots$$

Integrando termine per termine si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} f(x_i + h)\,dh &= \int_{-h}^{h} f_i\,dh + \int_{-h}^{h} hf_i'\,dh + \int_{-h}^{h} \frac{h^2}{2} f_i''\,dh + \\
&\quad + \int_{-h}^{h} \frac{h^3}{6} f_i'''\,dh + \int_{-h}^{h} \frac{h^4}{24} f_i^{iv}\,dh + \cdots \\
&= 2hf_i + 0 + 2\frac{h^3}{6} f_i'' + 0 + 2\frac{h^5}{120} f_i^{iv} + \cdots \\
&= 2hf_i + \frac{h^3}{3}\frac{1}{h^2}\left(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}\right) - \left(\frac{h^3}{3} \cdot \frac{h^2}{12} f_i^{iv} - \frac{h^5}{60} f_i^{iv}\right) + \cdots
\end{aligned}$$

Dove si è fatto uso dell'espressione $f_i'' \approx \dfrac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$ per la derivata seconda.

Interpolazione

Interpolazione significa calcolare $f(x)$ in un punto x compreso tra due punti successivi della tabella. La valutazione di $f(x)$ fuori dall'intervallo della tavola è chiamata *estrapolazione*. La prima idea è approssimare la curva ad una retta, scrivere l'equazione della

retta che passa per x_i ed x_{i+1} e quindi calcolare $f(x)$; o in altre parole[1]

$$f(x) \approx f_i + f_i'(x - x_i),$$

dove per f_i' si prende l'approssimazione

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h.}$$

Otteniamo così la formula di *interpolazione lineare*:

$$f(x) \approx f_i + (x - x_i)\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

Se invece lo sviluppo in serie viene troncato al 2º ordine e f_i'' viene approssimata con la (6.3) si ottiene la formula di *interpolazione quadratica a tre punti.*

$$f(x) \approx f_i + (x - x_i)\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + (x - x_i)^2\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}.$$

Esempio numerico step1

Lo spazio s percorso nel tempo t da un oggetto in caduta libera (trascurando l'attrito con l'aria) è ben descritto dall'espressione

$s=kt^2$ dove $k=g/2 \simeq 5$ (m/s^2). Prendiamo $\Delta t = 0.4$ s e siano $t_{i-1}=1.6$ $t_i=2$ $t_{i+1}=2.4$ (in secondi); i valori di s saranno allora $s_{i-1}=12.8$ $s_i=20$ $s_{i+1}=28.8$ (naturalmente in metri).

Calcoliamo la derivata (esatta) di s rispetto a t nel punto $t_i=2$ secondi. Risulta facilmente $ds/dt = 2kt = 20$ (m/s, si tratta della velocità).

Supponiamo ora di non conoscere la forma analitica della funzione che fornisce s in funzione di t, ma di conoscere soltanto i tre valori tabulati. Proviamo ad applicare quanto visto nella lezione precedente allo scopo di stimare il valore della derivata prima.

$$S_i' = \frac{1}{\Delta x}\left(S_{i+1} - S_i \right) = (28.8-20)/0.4 = 22 \quad \text{e} \quad \Delta S_i' = -\frac{\Delta t}{2} S_i''$$

per calcolare la correzione ci serve una stima (anche senza correzione) della derivata seconda

$$S_i'' = (S_{i+1} + S_{i-1} - 2\, S_i)/(\Delta t)^2 = (28.8 + 12.8 - 40)/0.16 = 10 \;;$$

tenendo conto di questo risultato la stima della derivata prima diventa

$$S_i' = \frac{1}{\Delta x}\left(S_{i+1} - S_i \right) - \frac{\Delta t}{2} S_i'' = 22 - 2 = 20$$

Esempio numerico step2

Riprendiamo l'esempio precedente supponendo ora che i valori di s siano frutto di una vera misura sperimentale (prima erano stati calcolati dalla legge teorica) e quindi affetti da incertezze.

Per semplicità trascuriamo invece gli errori sui tempi. Supponiamo che in corrispondenza dei tempi

$t_{i-1}=1.6 \quad t_i=2 \quad t_{i+1}=2.4$ (in secondi) i valori di s affetti da incertezza siano

$s_{i-1}=13.4 \quad s_i=19 \quad s_{i+1}=30$ (in metri).

Proviamo a rifare i calcoli. Naturalmente, dati gli errori sperimentali, ci aspettiamo che il valore stimato per la derivata prima non risulti esattamente uguale a quello previsto dalla teoria: siamo curiosi di vedere però quanto si discosta da tale valore. I conti danno

$$S_i' = \frac{1}{\Delta x} (S_{i+1} - S_i) = (30 - 19)/0.4 = 27.5$$

e per la stima della derivata seconda

$$S_i'' = (S_{i+1} + S_{i-1} - 2 S_i)/(\Delta t)^2 = (30 + 13.4 - 38)/0.16 = 33.75$$

la correzione per la derivata prima vale vale allora

$$\Delta S_i' = - \frac{\Delta t}{2} S_i'' = - (0.2)\, 33.75 = - 6.75$$ ed infine

$$S_i' = \frac{1}{\Delta x} (S_{i+1} - S_i) - \frac{\Delta t}{2} S_i'' = 27.5 - 6.75 = 20.75$$ che non è poi così male!

Esempio numerico step3

Si abbia ancora

$$x_{i-1}=1.6 \qquad x_i=2 \qquad x_{i+1}=2.4$$

$$f_{i-1}=12.8 \quad f_i=20 \quad f_{i+1}=28.8$$

e si voglia conoscere il valore della funzione nel punto x=2.15 . Sappiamo che f(x=2.15)=23.1125, perché conosciamo l'espressione analitica della funzione. Supponendo di non conoscere questo valore, né la forma della funzione, con la tecnica di interpolazione lineare si avrebbe

$$f(x) = f_i + f_i'(x-x_i) = f_i + (x-x_i)\frac{1}{\Delta x}(f_{i+1} - f_i) = 20 + \frac{0.15}{0.4}(28.8-20) = 23.3$$

risultato che può essere migliorato applicando la correzione alla derivata prima. necessita però una stima (anche se non corretta) della derivata seconda

$$f_i'' = (f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i)/(\Delta x)^2 = (28.8+12.8-40)/0.16=10$$

ed infine

$$f(x) = f_i + (x-x_i)\left[\frac{1}{\Delta x}(f_{i+1} - f_i) - \frac{\Delta x}{2} f_i''\right] = 23$$

Interpolazione quadratica a tre punti

$$f(x) = f_i + \frac{(x-x_i)}{2\Delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{(x-x_i)^2}{2\Delta x^2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i)$$

Introducendovi i numeri dell'esempio si ottiene allora

$$f(x) = 20 + 0.15\,\frac{28.8-12.8}{0.8} + 0.15^2\,\frac{28.8+12.8-40}{2X0.8^2} = 23.03$$

con notevole miglioramento.

l'esempio di $f(x) = 5x^2$

$x_i = 2$, $x_{i-1} = 1.6$ e $x_{i+1} = 2.4$ $\quad \Delta x = 0.4$

$f_i = 20$, $f_{i-1} = 12.8$ e $f_{i+1} = 28.8$

proviamo a calcolare $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx =$

$$= \int_{1.6}^{2} 5x^2\,dx + \int_{2}^{2.4} 5x^2\,dx \cong 6.507 + 9.707 \cong 16.214$$

questo è il calcolo esatto (conoscendo $f(x)$). Se non conoscessimo la forma analitica di $f(x)$, saremmo costretti ad applicare le formule approssimate appena trovate. Cominciamo con la regola del trapezio

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \Delta x\, f_i + \frac{\Delta x^2}{2}\,\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = 0.4 \times 20 + 0.2 \times 8.8 = 8 + 1.76 =$$

$= 9.76$ mentre il conto esatto darebbe 9.707

però si può migliorare il risultato calcolando la correzione

$$\Delta I_i = -\frac{\Delta x^3}{12} f''_i = -\frac{0.4^3}{12}\,\frac{28.8+12.8-40}{0.4^2} = -\frac{0.4}{12}\times 1.6 = -0.05$$

ed ottenere infine

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = I_i + \Delta I_i = 9.76 - 0.05 = 9.71$$

che non è poi così male.

Vediamo infine di applicare la formula di Simpson per calcolare

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \left(\text{che risolto in modo analitico ha dato}\right) = 16.214$$

$$I_i = \frac{\Delta x}{3}\left(f_{i-1} + f_{i+1} + 4 f_i\right) = \frac{0.4}{3}\left(12.8 + 28.8 + 80\right) = 16.213$$

che come si vede è già un'ottima approssimazione dell'integrale esatto. Non occorre cioè calcolare ulteriori correzioni.