Lezione II

2.3.3 Il concetto di deformazione

Dopo Cauchy la scienza ha abbandonato l'antica e gloriosa tradizione consistente nel confondere deformazione e sforzo. Nella terminologia scientifica la deformazione è la conseguenza di uno sforzo applicato a un materiale. Lo sforzo ci dice con quanta forza vengono allontanati o avvicinati gli atomi in un dato punto di un solido, la deformazione di quanto vengono allontanati o avvicinati, vale a dire in che proporzione i legami interatomici - e il materiale stesso - vengono allungati o compressi (figura 2.4).

La deformazione è generalmente indicata col simbolo ε: così se un'asta di lunghezza iniziale L viene allungata di un tratto δ1, è soggetta alla deformazione

$$\varepsilon = \delta l / L \qquad (2.3)$$

La deformazione è quindi la misura della variazione di lunghezza di un materiale dovuta ad allungamento o compressione forzati.

Dato che la deformazione è un rapporto fra due lunghezze, è una grandezza adimensionale.

Nei materiali usati in ingegneria la deformazione è spesso un numero molto piccolo, generalmente 10^{-3} o anche meno, ed è solitamente espressa mediante una percentuale: per esempio 0,1 per cento. Benché le deformazioni elastiche nei materiali solitamente usati in ingegneria siano quasi sempre al di sotto dell'1,0 per cento, altri materiali come la gomma possono essere deformati elasticamente dell'800 per cento e alcuni materiali biologici ancora di più.

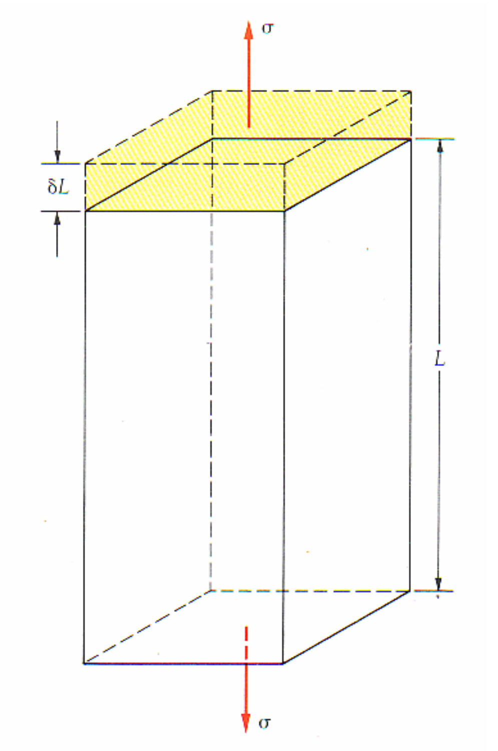


Figura 2.8 Definizione di deformazione

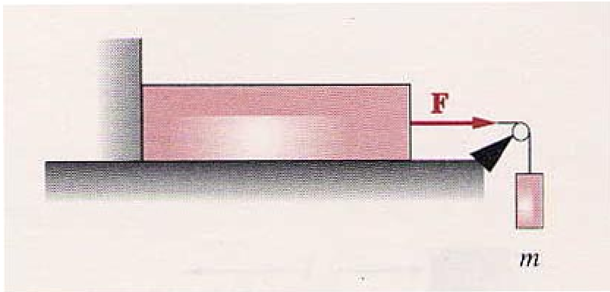


Figura 2.9 Un semplice dispositivo per studiare il comportamento in trazione

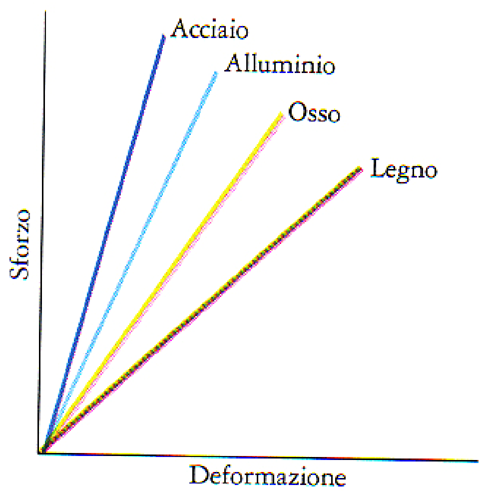


Figura 2.10 Il modulo di Young E e' dato dalla pendenza della prima parte della curva sforzo-deformazione ed ha un valore caratteristicoper ciascun materiale

2.4 Elasticita' per trazione e compressione

L'idea che ciascun tipo di materiale abbia una rigidezza caratteristica e' dovuta allo scienziato Thomas Young (1773-1829). Il lavoro di Young dimostro' che la deformazione totale di una struttura che deve resistere ad un dato carico e' dovuta agli effetti combinati della rigidezza del materiale da un lato , della dimensione e della forma della struttura dall'altro. La definizione che Young dette di modulo (modulus in latino significa piccola misura) e' la seguente: *''Il modulo dell'elasticita' di una qualsiasi sostanza e' una colonna della stessa sostanza, in grado riprodurre una pressione alla sua base che sta al peso che causa un certo grado di compressione come la lunghezza della sostanza sta alla diminuzione della sua lunghezza.''* Questa idea era molto difficile da esprimere senza i concetti di sforzo e deformazione. E' stata espressa in una moderna forma matematica, facendo uso dei concetti di sforzo e deformazione di Cauchy, da un altro francese, Claude-Louis-Marie-Henry Navier (1785-1836). La formula e'

Modulo di Young (E)= σ / ε (2.4)

Il modulo E e' la pendenza della curva sforzo-deformazione (figura 2.10) ed esprime il rapporto tra lo sforzo applicato e la deformazione risultante. Un modulo di Young relativamente piccolo indica che il materiale richiede uno sforzo di modesta entita' per ottenere una unita' di deformazione: il materiale e' flessibile. Un modulo grande significa sforzo di notevole entita' per ottenere una unita' di deformazione: il materiale e'rigido.

Poiche' il rapporto e' dato da uno sforzo diviso un rapporto dimensionale (la deformazione) anche il modulo e' uno sforzo e viene espresso in Pa.Il modulo di Young e' uguale allo sforzo che , in teoria, raddoppierebbe la lunghezza del campione in esame se non si rompesse prima. Pe questo motivo il modulo di un materiale ragionevolmente rigido e' un numero molto grande.

Valori approssimativi del modulo di Young di vari solidi

Solido	E in psi $\times 10^6$	E in MN/m^2
Tessuti biologici molli	0,00003	0,2
Gomma	0,001	7
Legno (abete)	1,6	11 000
Calcestruzzo ordinario	2,5	17 000
Osso	3,0	21 000
Vetro ordinario	10,0	70 000
Magnesio metallo	6,0	42 000
Leghe di alluminio	10,5	73 000
Acciaio	30,0	210 000
Diamante	170,0	1 200 000
Fibra di nylon	0,8	5 500
Fibra di Kevlar 29	9,0	62 000
Fibra di Kevlar 49	19,0	130 000

Tabella 2.3 Valori approssimativi del modulo di Young di vari solidi

Un materiale che si comporta in trazione o compressione secondo la (2.4) e' detto elastico hookiano.
A partire dalla (2.4), ricordando la (1.2), la (2.1) e (2.3)e ribattezzando la forza in (2.1) come F si ha F/A=E (δl/L) da cui si ottiene la relazione che lega la costante elastica k del materiale di (1.2) al suo modulo di Young E:

k=E (A/L) (2.5)

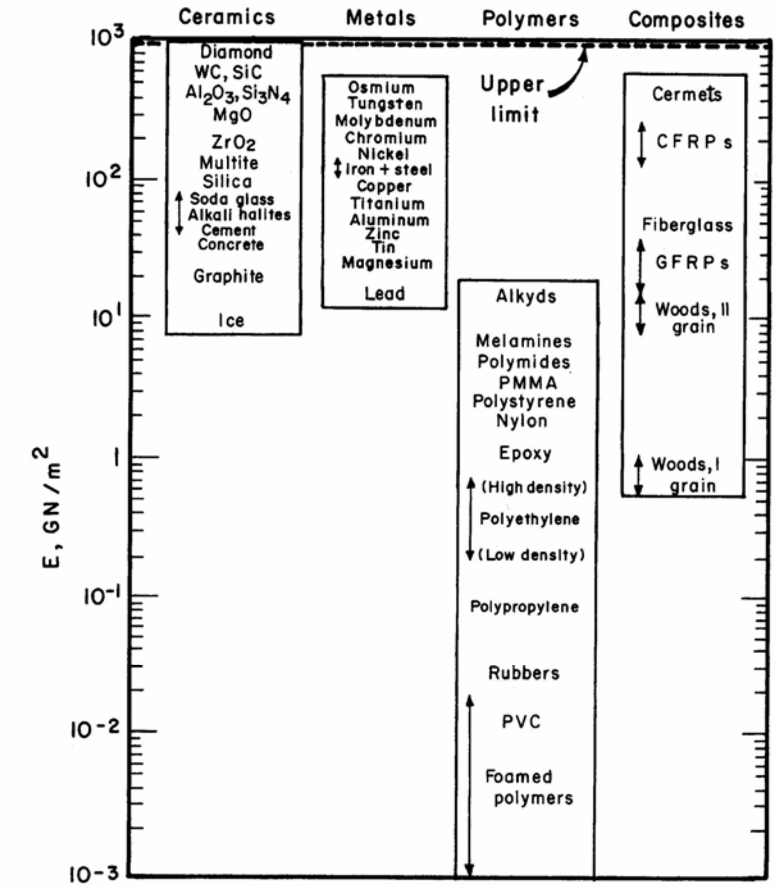


Figura 2.11 Grafico a barre di dati del modulo di Young

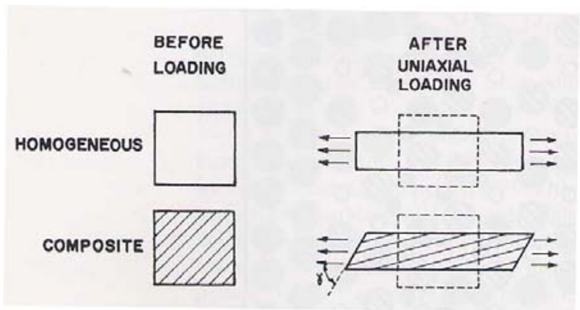


Figura 2.12 Materiale omogeneo e isotropo (sopra) e materiale composito sotto carico

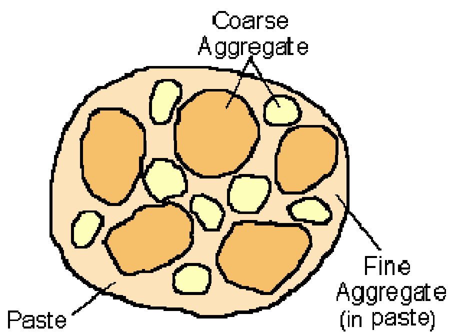


Figura 2.13 Materiale non omogeneo

NOTA In generale, nel discutere le relazioni sforzo-deformazione nei materiali, e' opportuno considerare le loro proprieta' di isotrpia ed omogeneita'. Nei materiali isotropi la deformazione in ogni punto e' indipendente dalla direzione, in altre parole le proprieta' elastiche dei materiali sono le stesse in ogni direzione. In particolare le proprieta' elastiche del solido sono invarianti sotto ogni operazione di rotazione. Negli anisotropi, viceversa, le proprieta' elastiche in ogni punto sono diverse nelle diverse direzioni. Un esempio di questi materiali sono le fibre, o i cristalli. La maggior parte dei solidi sono policristallini, cioe' formati da microcristalli, detti grani, orientati a caso nel solido. Questa orientazione casuale produce nel solido proprieta' di isotropia, al contrario un monocristallo e' anisotropo.
Nei materiali omogenei le proprieta' elastiche dei materiali sono le stesse in ogni punto, e quindi invarianti per ogni traslazione.

Limitiamo in queste dispense la discussione a solidi *isotropi* ed *omogenei*, cioe' che presentano le stesse proprieta' elastiche in ogni punto. Materiali non omogenei e non isotropi sono per esempio i materiali compositi.

2.4 La deformazione in tre dimensioni

Finora abbiamo considerato l'effetto di uno sforzo applicato a un materiale da un punto di vista monodimensionale. In altre parole, il materiale verrà deformato nella direzione dello sforzo applicato secondo la formula (2.4). Questa descrizione è corretta, ma non tiene conto di quello che lo sforzo provoca nel materiale nelle altre due dimensioni, cioè nelle direzioni perpendicolari alla direzione dello sforzo applicato.

Siméon Denis Poisson (1781-1840) ebbe l'idea di usare il comportamento elastico macroscopico di un materiale come uno strumento per comprenderne la struttura molecolare; in altre parole, uno strumento per comprendere il comportamento dei legami interatomici. Con questo proposito Poisson considerò le deformazioni elastiche non in una dimensione sola, ma in tre.

Quando per esempio si tira un nastro di gomma, è facile vedere che la gomma diventa più lunga e più sottile. Il materiale non solo si allunga nella direzione della trazione, ma si contrae nelle altre due dimensioni.

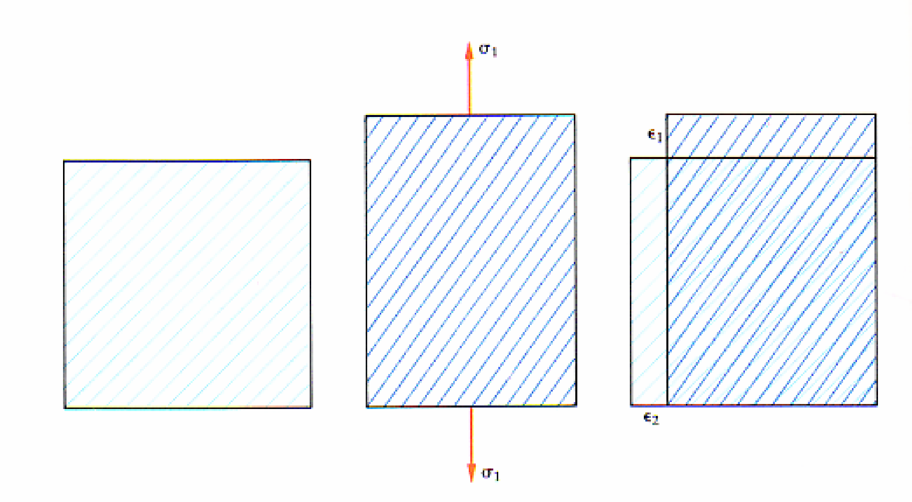


Figura 2.14 Deformazioni primaria e secondarie sotto trazione

Quando un materiale elastico hookiano è soggetto allo sforzo σ_1, diretto lungo un certo asse si verificherà naturalmente una deformazione ε_1 lungo quest'asse: $\varepsilon_1 = \sigma_1/E$
Poisson ha dimostrato che lo sforzo causa anche delle deformazioni ε_2 ed ε_3 lungo gli assi perpendicolari alla direzione dello sforzo (fig. 2.13),e che queste deformazioni secondarie sono legate alla deformazione e allo sforzo primari dalla relazione

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\, \varepsilon_1 = -\nu\, \sigma_1 / E \qquad (2.6)$$

La costante di proporzionalità ν (ni) è conosciuta col nome di coefficíente di Poisson (o anche Poisson ratio). Si noti che il segno di ε_2 e di ε_3 deve essere opposto a quello di ε_1.

La formula di Poisson mostra che se gli sforzi e le deformazioni primari sono di trazione, le deformazioni secondarie saranno di compressione; se gli sforzi e le deformazioni primari sono di compressione, le deformazioni secondarie saranno di trazione. Per la maggior parte dei materiali, il coefficiente di Poisson ha un valore compreso fra un quarto e un terzo, generalmente circa 0.3. Si può facilmente mostrare che, se il coefficiente di Poisson è minore di 0.5, il materiale aumenta di volume quando è in trazione, mentre diminuisce quando viene compresso. Più grande è il coefficiente di Poisson, meglio le deformazioni secondarie riescono a compensare la deformazione primaria, e minore è la variazione di volume del materiale. Quando il coefficiente di Poisson è uguale a 0.5, teoricamente non si dovrebbe avere alcuna variazione di volume. Questo è il caso dei liquidi, che non possono resistere a uno sforzo assiale, ed è pressoché vero per le sostanze gelatinose, come il cristallino dell'occhio studiato da Young.

Esempio: calcolo ν nell'ipotesi V= cost.

Sia V_0=1; Il volume del corpo deformato per piccole deformazioni vale $V = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \approx 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

Poiche' per ipotesi $V = V_0$, allora $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$

Poiche' nel caso isotropo $\varepsilon_2=\varepsilon_3$ si ottiene infine $+2\,\varepsilon_2 = -\,\varepsilon_1$

In un materiale omogeneo e isotropo, il coefficiente di Poisson non può essere superiore a 0.5. Tuttavia molti materiali biologici hanno una morfologia molecolare molto complicata che li rende anisotropi. Per esempio, come possiamo verificare tastando i muscoli del braccio, che si ingrossano considerevolmente quando vengono contratti, il coefficiente di Poisson può essere molto più grande di 0.5; spesso è vicino a 1.0.

Poisson ratio	Interpretazione
0.5	No volume change during stretch
0.0	No lateral contraction
0.49 - 0.499	Typical values for elastomers
0.2 - 0.4	Typical value for plastics

Tabella 2.4 La tabella fornisce l'interpretazione per i valori di ν

Materiale	Poisson ratio
acciaio	0.30
alluminio	0.33
caucciu’	0.50
ferro	0.30
ottone	0.35
piombo	0.40
platino	0.38
rame	0.34
sughero	0.0
vetro per finestre	0.25

Tabella 2.5 Valori di ν *per varie sostanze. Vedi anche tabella 2.6*

2.5 Energia di deformazione

Quando un materiale elastico viene deformato, immagazzina energia. Quest'energia viene restituita quando la deformazione viene meno. I valori di energia in gioco possono essere molto alti. L'energia di deformazione immagazzinata negli archi e nelle catapulte è stata utilizzata per millenni a scopo militare. La vibrazione di una corda di violino, di un diapason o di una campana è dovuta al meccanismo di interscambio ritmico fra energia cinetica ed energia di deformazione che si verifica in queste strutture.

L'energia E_n immagazzinata in un materiale elastico hookiano soggetto a uno sforzo assiale σ che produce una deformazione ε è data da

$$E_n = (1/2)\,\sigma\varepsilon = (1/2)\,E\varepsilon^2 = (1/2E)\,\sigma^2 \qquad (2.7)$$

La 2.7 fornisce la densita’ di energia volumica del materiale, cioe’ l’energia immagazzinata in un volume unitario del mezzo.

L'energia di deformazione è l'area sottesa alla curva sforzo-deformazione e nel sistema MKS e’ espressa in J/(m^3)

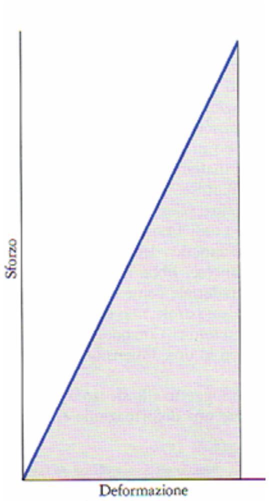


Figura 2.15 Energia di deformazione

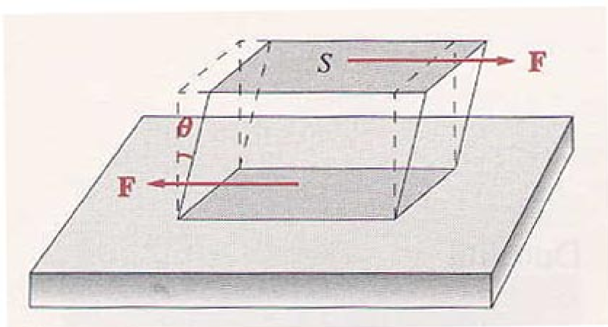


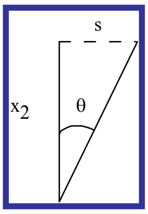
Figura 2.16 Sollecitazione di taglio

2.6 Elasticita' di scorrimento

Se la trazione può essere intuitivamente associata all'azione di tirare e la compressione a un'azione di spinta, il taglio è associato a uno scorrimento, o più precisamente a una resistenza alla tendenza a scorrere quando viene applicata una forza (figura 2.16). Fortunatamente i concetti di taglio, sforzo di taglio o sforzo tangenziale, deformazione di taglio e modulo di taglio sono analoghi ai loro equivalenti nel caso della tensione e della compressione. La figura 2.16 mostra come applicando forze tangenti alle superfici si osserva uno scorrimento della faccia superiore rispetto alla inferiore. Lo sforzo di taglio e' indicato con la lettera greca τ (tau)e le sue unità di misura sono le stesse dello sforzo di trazione e di compressione.

La deformazione (strain) di scorrimento (shear) γ e' definita come lo spostamento della superficie superiore del blocco (in figura 2.17 e' indicato con s) diviso il suo spessore (nella figura x_2):

$$\gamma = s/ x_2 = tg\theta \approx \theta \qquad (2.8)$$



In 2.8 l'ultima uguaglianza vale per piccole deformazioni, per cui la deformazione di taglio γ è un angolo, espresso in radianti.

Figura 2.17 Definizione di deformazione di scorrimento

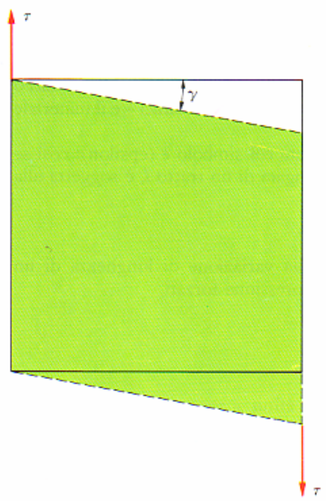
Il rapporto tra lo shear stress e lo shear strain fornisce il modulo di taglio (shear modulus) indicato con la lettera G. Il modulo di taglio G (o modulo di elasticità tangenziale) è lo sforzo che produrrebbe nel materiale una deformazione pari a un radiante. Si ha in materiali elastici

$$\tau = G\,\gamma \qquad (2.9)$$

Valori di G sono riportati in tabella 2.6.

E' da notare come G sia dello stesso ordine di grandezza di E. Dalla teoria della elasticita', si dimostra che tra E, G e il Poisson ratio vale la relazione

$$G=E/2(1+\nu) \qquad (2.10)$$



Poiche' $0 \le \nu \le 0.5$, si ricava $2G \le E \le 3G$

Figura 2.18 Deformazione di scorrimento

.

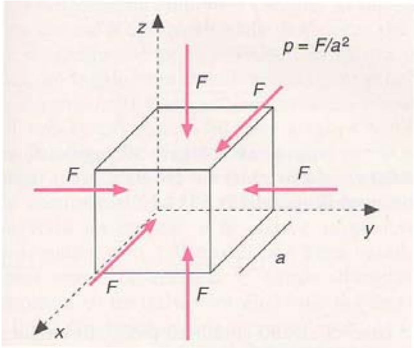
E' da notare che la sollecitazione di scorrimento mantiene il volume rigorosamente costante. Infatti il solido puo' essere schematizzato come composto da piani di spessore infinitesimo che la sollecitazione di shear fa scorrere l'uno sull'altro. Quando la forza tangenziale e' rimossa , in regime elastico il fenomeno e' reversibile e la deformazione viene recuperata completamente.

2.7 Compressione uniforme

Una sollecitazione di compressione uniforme consiste nell'applicare al corpo una pressione ovunque costante, per esempio immergendolo in un fluido, mantenuto a sua volta sotto pressione. In figura 1.8 e' mostrato un cubo compresso su ogni faccia da forze perpendicolari alla superficie. Se V_0 e' il volume del corpo quando la pressione esterna vale p_0, se la pressione viene variata di una quantita' Δp in modo da ottenere il valore finale $p = p_0 + \Delta p$, si avra' in corrispondenza una variazione di volume ΔV per raggiungere il nuovo valore $V=V_0+\Delta V$. Il modulo di compressibilita' k (o *bulk modulus*) e' definito dalla relazione:

$$k = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} \qquad (2.11)$$

Il segno negativo sta ad indicare che ad un aumento della pressione corrisponde una diminuzione del volu me e viceversa. Le unita' di misura del modulo k sono Pa.



Dalla teoria dell'elasticita' si ricava la seguente relazione

$$k=E/3(1-2\nu) \qquad (2.12)$$

Figura 2.19 Compressione di un solido.

Substance	E, Young's modulus (Pa)	G, Shear modulus (Pa)	k, bulk's modulus (Pa)	Poisson's ratio
Aluminium	7.0×10^{10}	2.4×10^{10}	7.5×10^{10}	0.34
Cast bronze	8.1×10^{10}	3.4×10^{10}	9.6×10^{10}	0.18
Copper	12.3×10^{10}	4.5×10^{10}	13.1×10^{10}	0.34
Gold	8.0×10^{10}	2.8×10^{10}	16.6×10^{10}	0.42
Lead	1.6×10^{10}	0.54×10^{10}	5.0×10^{10}	0.45
Silver	7.8×10^{10}	2.8×10^{10}	10.9×10^{10}	0.37
Steel	20.6×10^{10}	8.9×10^{10}	18.1×10^{10}	0.33
Tin	4.5×10^{10}	1.67×10^{10}	5.1×10^{10}	0.31
Quarz fiber	5.2×10^{10}	3.0×10^{10}	1.4×10^{10}	0.37
Glass, crown	7.0×10^{10}	3.0×10^{10}	5.0×10^{10}	0.24
Phosphor bronze	12.0×10^{10}	4.3×10^{10}	-	0.36

Tabella 2.6 Moduli elastici a temperatura ambiente per alcuni materiali e Poisson ratio

James E. Gordon, Strutture sotto sforzo, Zanichelli editore, Bologna 1991
Sergio Rosati, Fisica generale, Casa editrice Ambrosiana, Milano 1994