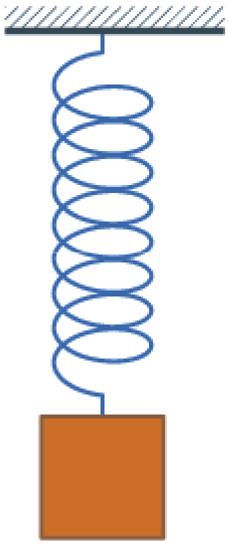
Richiami sulle oscillazioni smorzate

•Il **moto armonico** è il moto descritto da un ***oscillatore armonico***, cioè un sistema meccanico che, quando perturbato dalla sua posizione di equilibrio, è soggetto ad una forza di richiamo F proporzionale allo spostamento subito x. $F = -kx$

Esempi meccanici di oscillatori armonici sono il pendolo(con piccoli angoli di oscillazione), ed una massa attaccata ad una molla.



•Nello studio di fenomeni fisici reali i corpi in movimento sono di solito soggetti a forze smorzanti il moto stesso.

•In tal caso l'equazione dell'oscillatore è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

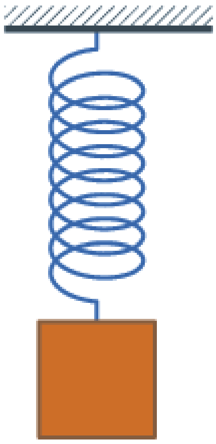
•Dividendo per m e ponendo $c = \gamma$ m , $k = \omega^2$ m l'equazione dell'oscillatore è

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

<andreozz@df.unipi.it>

•Ci interessiamo qui solo alle soluzioni dell'equazione differenziale nel caso di sottosmorzamento, che avviene per

$$\gamma^2 < 4\omega^2$$



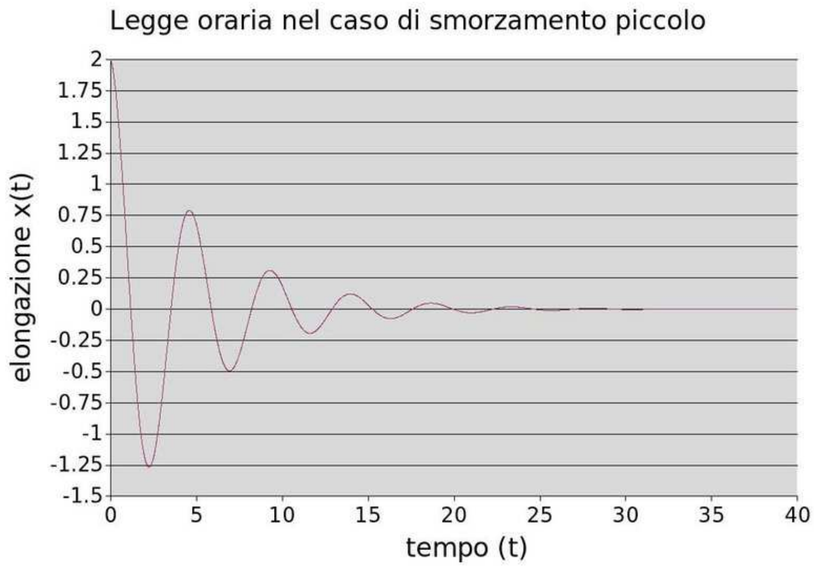
•La soluzione dell'equazione differenziale contiene un termine con esponenziale complesso, il quale rappresenta un termine "oscillante".

•Ponendo $$\omega_1 = (\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2})/2$$

si ha come soluzione la legge oraria

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t)$$

che è una oscillazione di frequenza $\omega_1/2\pi$ la cui ampiezza decresce esponenzialmente nel tempo



Translational Mechanical	Torsional Mechanical	Series RLC Circuit	Parallel RLC Circuit
Position x	Angle θ	Charge q	Voltage e
Velocity $\frac{dx}{dt}$	Angular velocity $\frac{d\theta}{dt}$	Current $\frac{dq}{dt}$	$\frac{de}{dt}$
Mass M	Moment of inertia I	Inductance L	Capacitance C
Spring constant K	Torsion constant μ	Elastance $1/C$	Susceptance $1/L$
Friction γ	Rotational friction Γ	Resistance R	Conductance $1/R$
Drive force $F(t)$	Drive torque $\tau(t)$	e	di/dt
Undamped resonant frequency f_n:			
$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{I}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$
Differential equation:			
$M\ddot{x}+\gamma\dot{x}+Kx=F$	$I\ddot{\theta}+\Gamma\dot{\theta}+\mu\theta=\tau$	$L\ddot{q}+R\dot{q}+q/C=e$	$C\ddot{e}+\dot{e}/R+e/L=\dot{i}$

Decadimento esponenziale

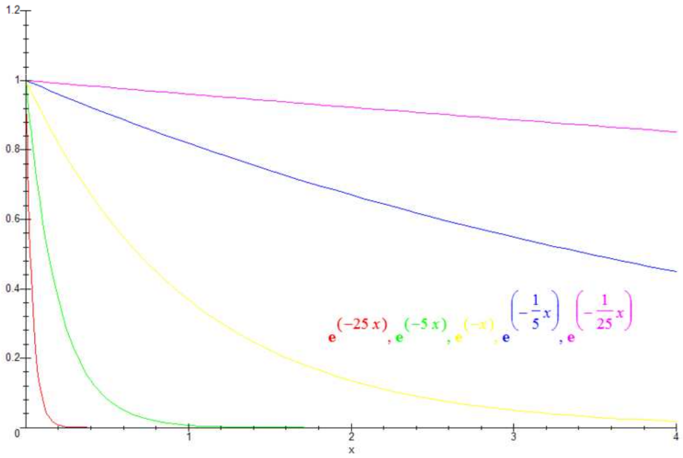
•Una quantità subisce un **decadimento esponenziale** se in ogni istante decresce proporzionalmente al proprio valore. Può essere espresso dalla seguente equazione differenziale , dove *N* è la quantità e λ è un numero chiamato **costante di decadimento**.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

•La soluzione di questa equazione è $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

•In alternativa si può scrivere $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

con τ = 1/λ detta costante tempo, è il tempo necessario a ridurre la quantità iniziale a circa il 63.21%



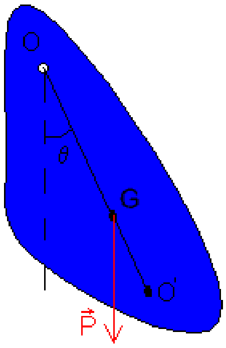
Tempo di dimezzamento

Un parametro caratteristico del decadimento esponenziale è il tempo di dimezzamento, definito come il tempo occorrente per ridurre la quantità del 50%. Esso è legato alla costante di tempo dalla formula:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2.$$

Valore previsto per il periodo di oscillazione del pendolo fisico

- Si definisce **pendolo composto** (o **pendolo fisico**) qualunque corpo rigido in grado di oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale fisso non passante per il centro di massa.



Schematizzazione di un pendolo composto, G è il centro di massa, P è la forza peso e O e O' sono gli assi reciproci

•Se si sposta il pendolo composto dalla posizione di equilibrio statico di un angolo Θ , il momento di richiamo della forza peso, (componente tangenziale alla forza di gravità, vale

$$M = -mgh \operatorname{sen}\theta$$

dove *h* la distanza tra la traccia del centro di rotazione *O* ed il centro di massa.

•Non esistono momenti di forze di attrito nella rotazione attorno all'asse e gli eventuali momenti dovuti alle reazioni dei supporti sono ortogonali all'asse stesso e pertanto l'equazione del moto è

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z\alpha = I_z\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgh\sin\theta$$

•Questo significa che

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgh\sin\theta}{I_z} = 0$$

•I_z è momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione orizzontale *z*; per il teorema di Huygens-Steiner $I_z = I_c + mh^2$.

•Per piccole oscillazioni si ha

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgh\theta}{I_z} = 0$$

che è l'equazione del moto armonico (pendolo fisico senza smorzamento)

La pulsazione è

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$$

e il periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove $l = I_z/mh$ rappresenta la **lunghezza ridotta del pendolo composto** e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

Valore previsto per il periodo di oscillazione del pendolo fisico smorzato

La teoria prevede per il moto armonico smorzato una pulsazione

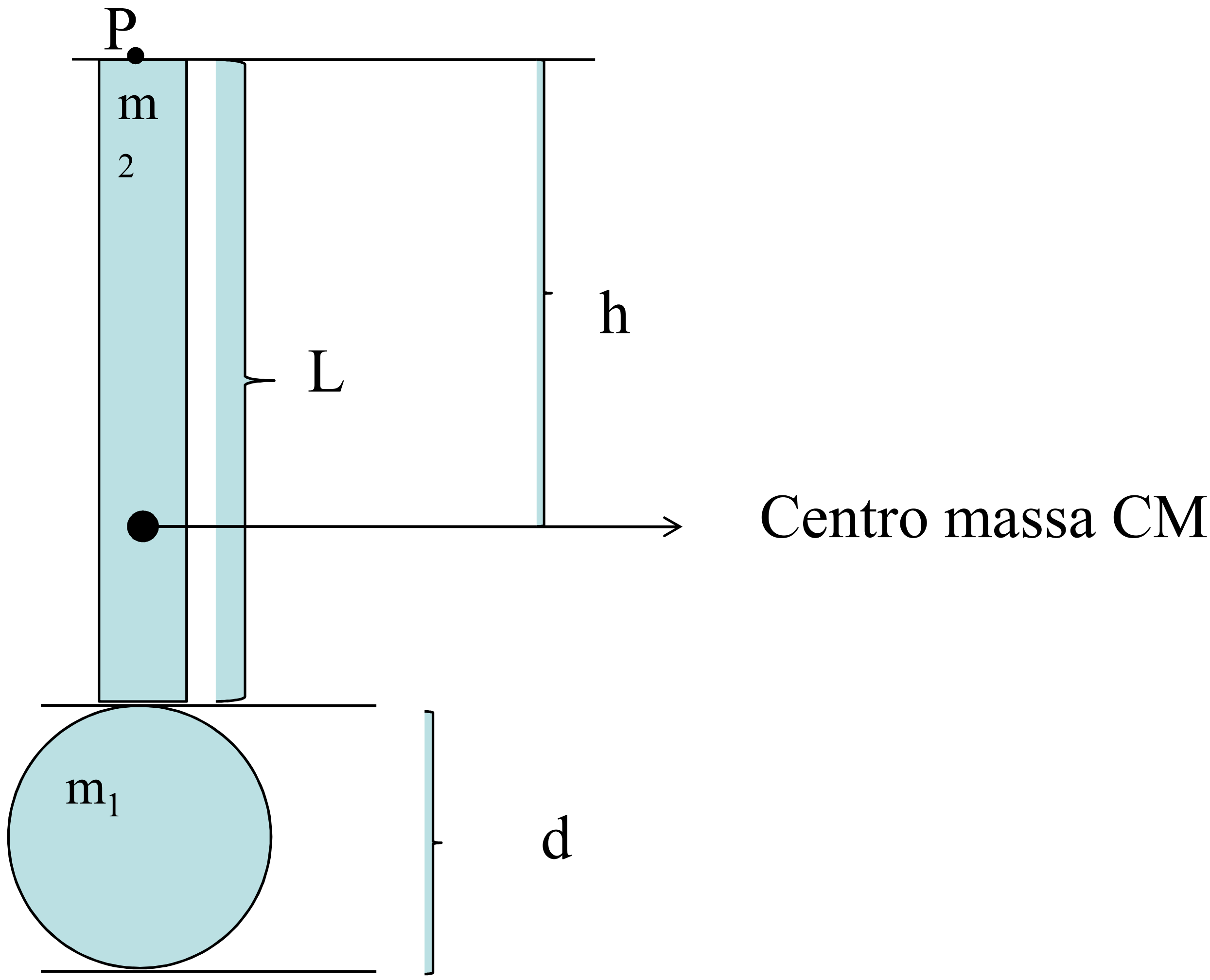
$$\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} \quad \text{dove } \gamma = 1/\tau$$

e il periodo vale

$$T = 2\pi / \omega$$

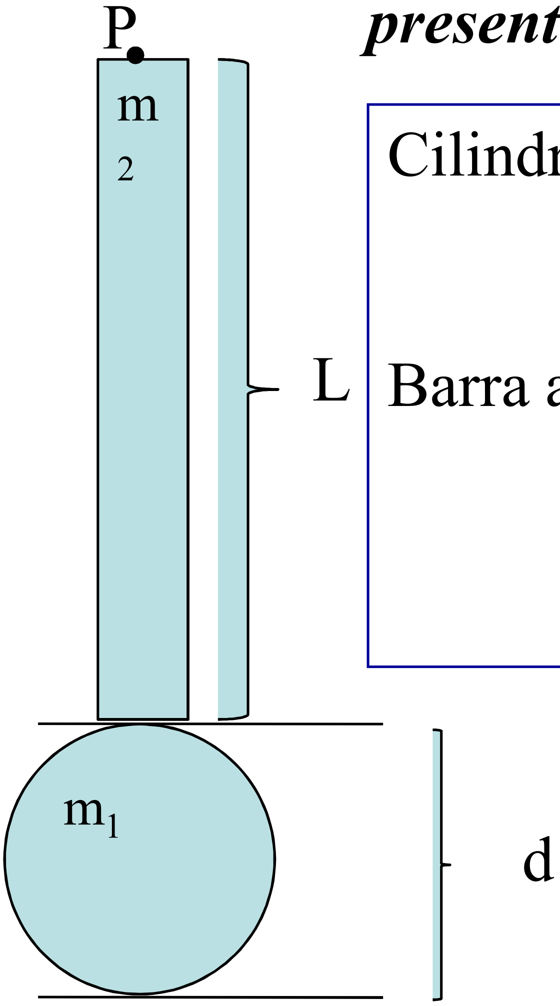
Se γ è piccolo nei confronti di ω_0, T non differisce molto da T_0,(cioè i valori misurabili in laboratorio coincidono) .

Calcolo di h distanza del punto P dal centro di massa del sistema



$$\boxed{h = [1/(m_1+m_2)]\,[m_1\,(L+ d/2) + m_2\,\,L/2]}$$

Calcolo del momento di inerzia del pendolo fisico presente in laboratorio



Cilindro d= 69.60±0.05 mm
spessore = 12.20±0.05 mm
densità ottone = 8.4 gr/cm^3
Barra a sezione quadrata
lato a =8.00±0.05 mm
altezza L = DA MISURARE
densità alluminio= 2.7 gr/cm^3

$I_1 = ½\, m_1\, (d/2)^2 + m_1\, (L + d/2)^2$
$I_2 = 1/3\, m_2\, L^2$

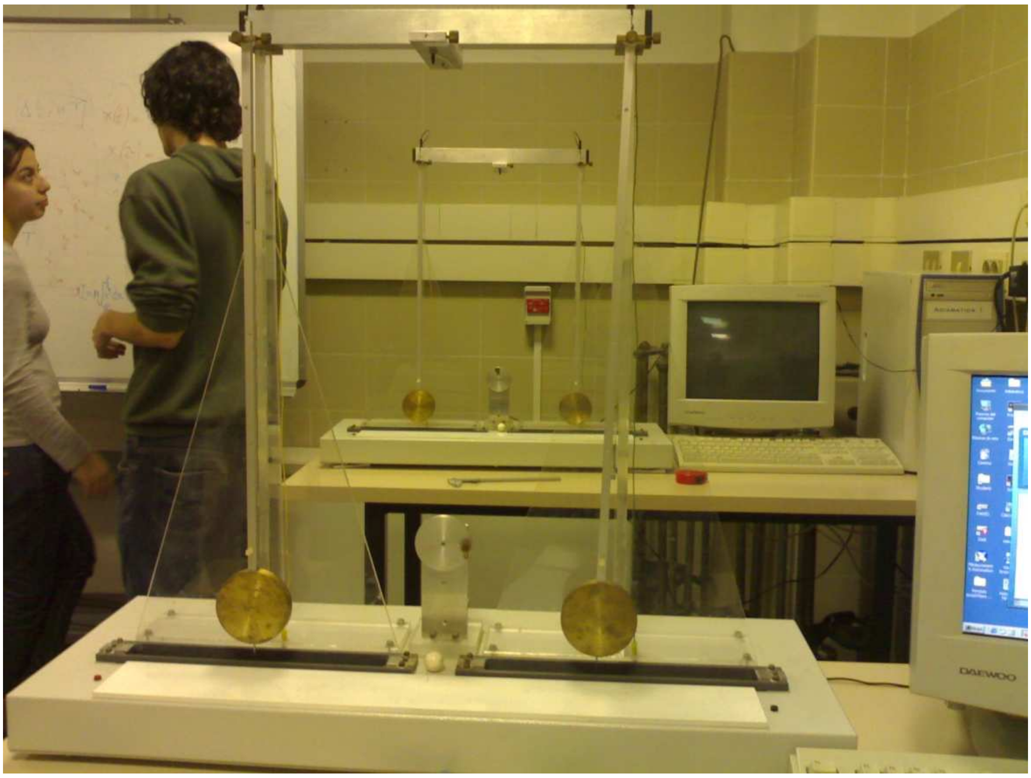
$I_z = I_1 + I_2$
$m = m_1 + m_2$

Nota: le masse VANNO CALCOLATE usando i volumi e le densità dei materiali

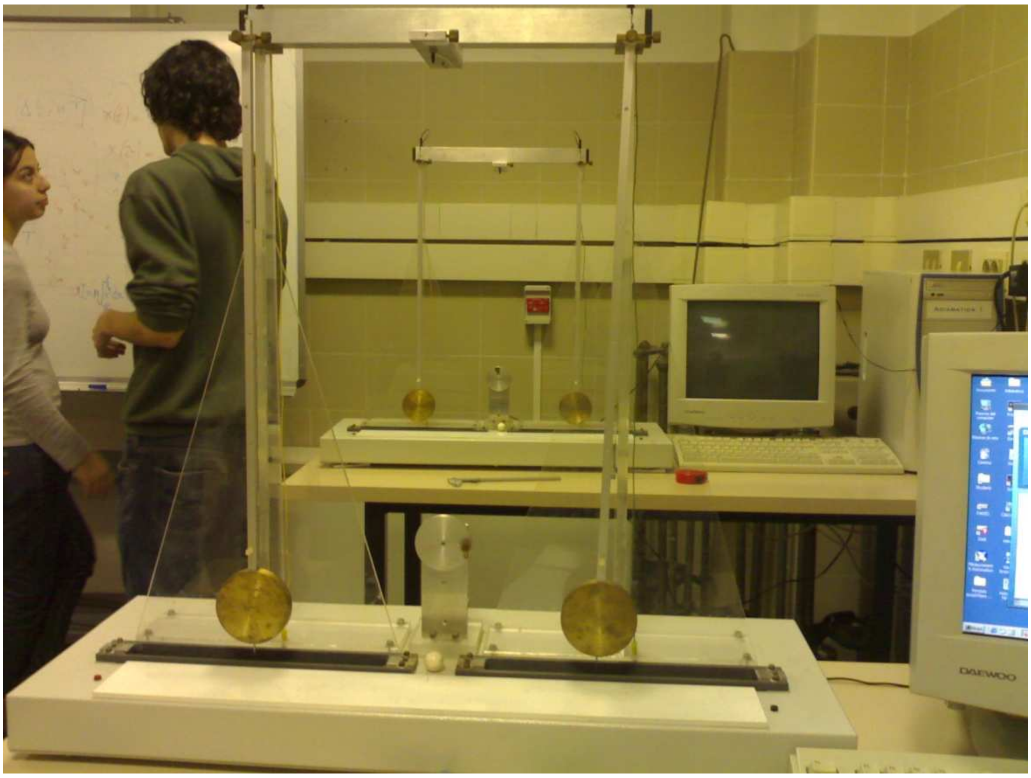
Calcolo della lunghezza ridotta l del pendolo composto per la valutazione del periodo

$$l = I_z/mh = (I_1 + I_2) / [h\,(m_1 + m_2)]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Procedura sperimentale



•Misurare col metro a nastro che si trova sul tavolo la lunghezza L della barra in alluminio. Gli altri dati sono forniti.

•Accendere il computer, se necessario, ed accedere alla modalità windows

•Utente : studente; Password: laboratorio

•Avviare il programma: pendulum view

•Accendere il computer, se necessario, ed accedere alla modalità windows

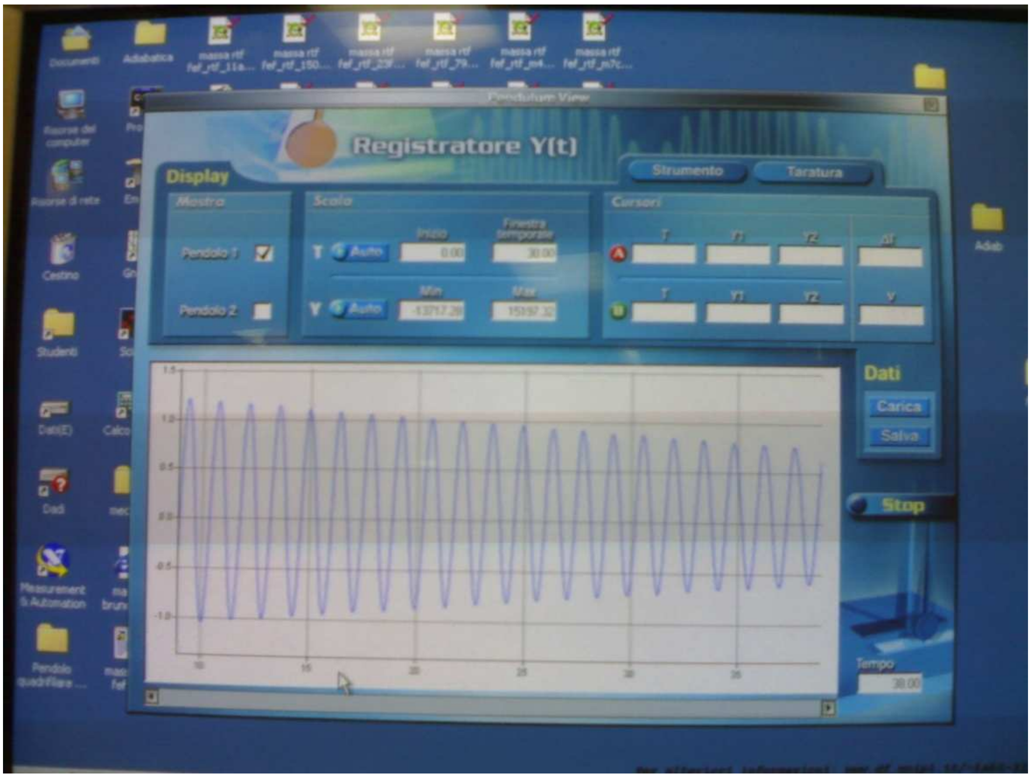
•Utente : studente; Password: laboratorio

•Avviare il programma: pendulum view

1) Taratura dello strumento:

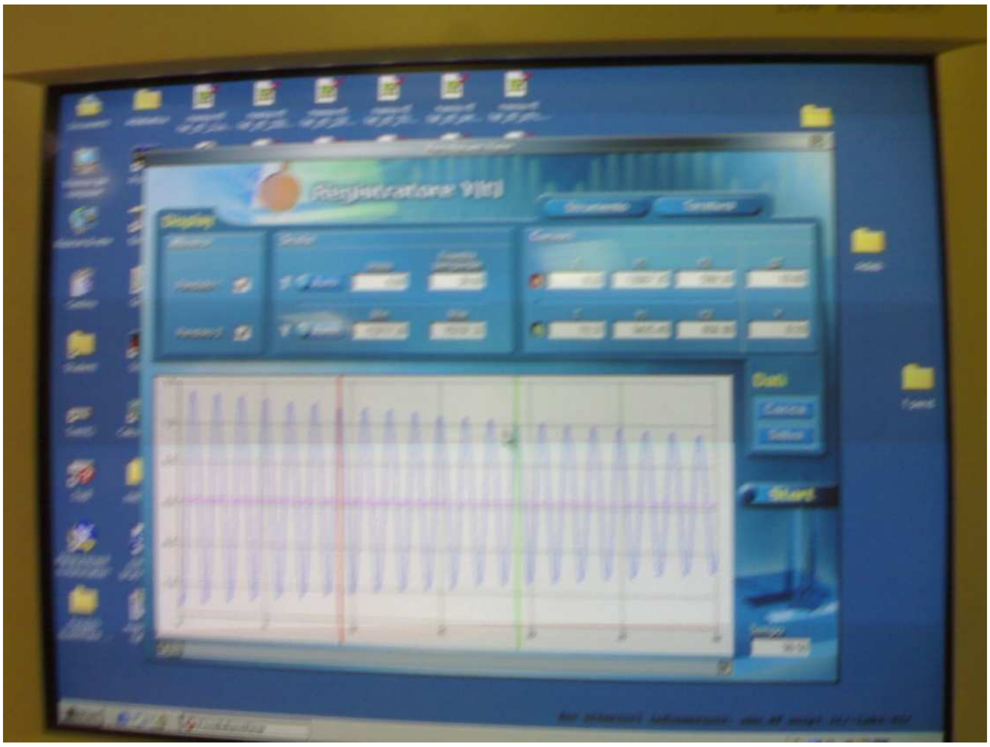
a)   Dare stop; b) seleziona taratura e dai start
c) aspetta e esegui le indicazioni fornite dal programma

2) Spostare il pendolo di un piccolo angolo dalla posizione di equilibrio, selezionare lo start .



3) Alla fine del processo, dare stop. Si può salvare il file dei dati

4) Analisi dati. Aiutandosi con i cursori verde e rosso



NOTA: La gestione del programma è facile

.

IMPORTANTE poiché l'acquisizione dati avviene tramite la scheda audio del computer

NON TOCCARE la funzionalità che regola IL VOLUME

Esercitazione pratica sulle oscillazioni armoniche: pendolo semplice

• Il periodo delle oscillazioni del pendolo, può essere espresso dalla formula

$$T = 2\,\pi\,(l/g)^{1/2}$$

dove l è la lunghezza del pendolo semplice equivalente (vedi poi).

•L'andamento dell'ampiezza massima di oscillazione Y in condizioni di smorzamento ha l'andamento teorico

$$Y(t) = Y_0\,e^{-\gamma t}$$

con γ costante di smorzamento, e tempo di rilassamento $\tau = 1/\gamma$.

•I massimi Y_n dell'oscillazione si verificano ad intervalli di tempo

$$T = 1/\nu = 2\,\pi\,(l/g)^{1/2} \qquad (1)$$

•Nell'ipotesi di smorzamento lento τ ($=1/\gamma$) << T vale:

$$\tau = nT / \ln (Y_0 / Y_n) \qquad (2)$$

•Il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ delle ampiezze che decadono esponenzialmente vale

$$T_{1/2} = \ln 2 * \tau \quad (\text{circa } 0.7\,\tau) \qquad (3)$$

L. Andreozzi
<andreozz@df.unipi.it>

1) Misurare il periodo T (o la frequenza ν= 1/T) delle oscillazioni del pendolo nelle condizioni di moto armonico smorzato, dopo averne visualizzato le oscillazioni al computer. La misura si effettui considerando la singola oscillazione ; valutare l'incertezza sulla misura spostando di uno scatto il cursore sul video.

2) Ripetere la misura del periodo T considerando un intervallo di tempo che valga un multiplo intero di oscillazioni (per esempio 10) invece che una sola oscillazione , ricavare il valore del periodo T e la relativa incertezza.

3) Confrontare i valori del periodo T ottenuti al punto 1 e 2 con il valore ottenuto con la formula (1) dopo aver valutato l, lunghezza del pendolo semplice equivalente attraverso il procedimento descritto in seguito.

4) Valutare τ con la formula (2) avendo misurato sul computer l'ampiezza della prima oscillazione Y_0 e quella Y_n relativa ad una oscillazione successiva al tempo nT pari a n periodi di oscillazione (scegliere un valore di n a piacere)

5) Valutare il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ dal grafico sul computer misurando il tempo che intercorre per dimezzare l'ampiezza dell'oscillazione (partire da un massimo di oscillazione prossimo all'inizio dell'oscillazione smorzata e cercare sul monitor una oscillazione successiva il cui massimo di ampiezza valga la metà di quello selezionato come iniziale) Valutare $T_{½}$ come la differenza tra gli istanti relativi ai due massimi.

6) Valutare $T_{1/2}$ dalla formula (3) e confrontare col valore ottenuto al punto 5