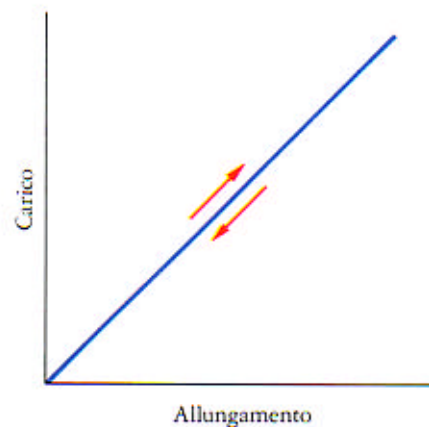


*Hooke: la teoria dell'elasticità

Hooke considerò una notevole varietà di cavi, molle e travi di legno e le sottopose a carichi via via crescenti, aggiungendo pesi sul piatto di una bilancia.

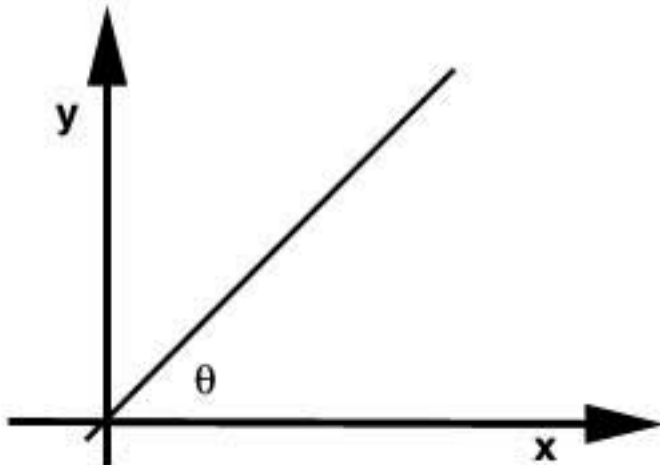
Ottenne così un grafico della deformazione in funzione della variazione del carico che in tutti i casi era una linea retta. Inoltre quando il carico veniva progressivamente rimosso, anche il ritorno alle condizioni iniziali era lineare e, nei margini d'errore delle sue misure, tutti gli oggetti riacquistavano la loro lunghezza originale.

Comportamento
completamente elastico
(reversibile) o hookiano.
L'allungamento dipende
linearmente dall'intensità della
forza applicata:
«*ut tensio, sic vis* »



NOTA

Se due quantità sono tra loro proporzionali, riportando in un grafico l'una in funzione dell'altra si ottiene una retta, o una linea. In questo caso si parla di relazione *lineare* tra le due quantità.



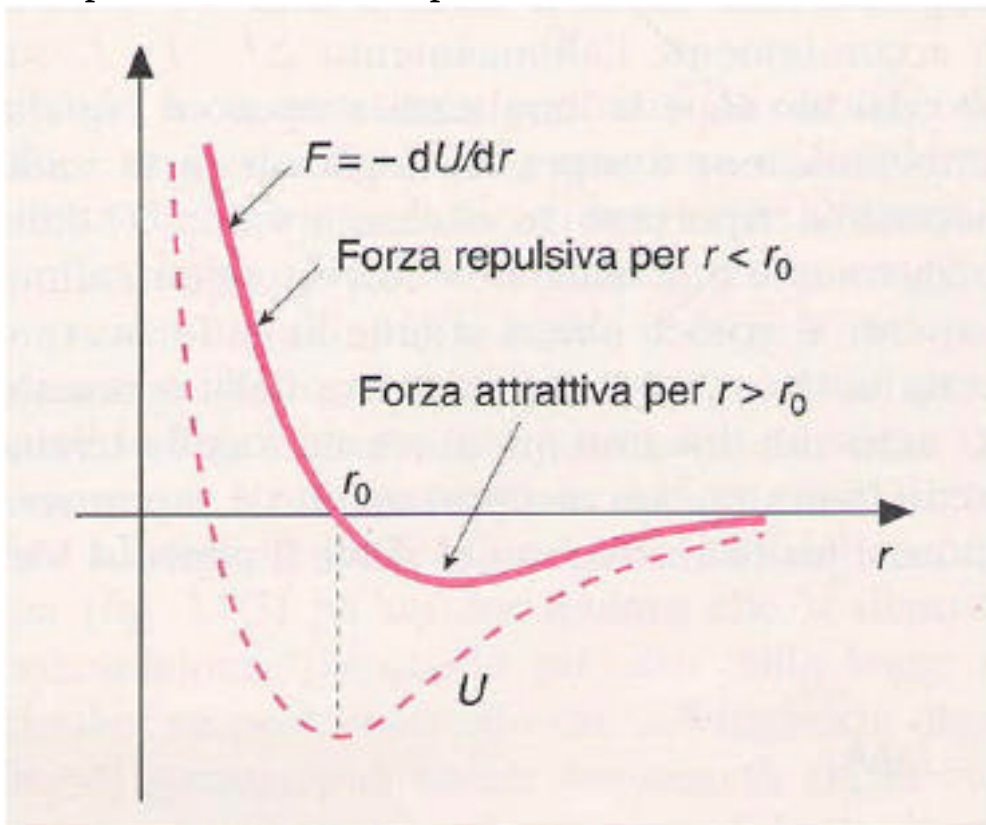
$$y = \tan \theta * x$$

Punti principali della teoria HOOKE

I. Un materiale solido può resistere a una forza applicata solo cedendo ad cioè contraendosi se sottoposto a compressione o allungandosi se sottoposto trazione.

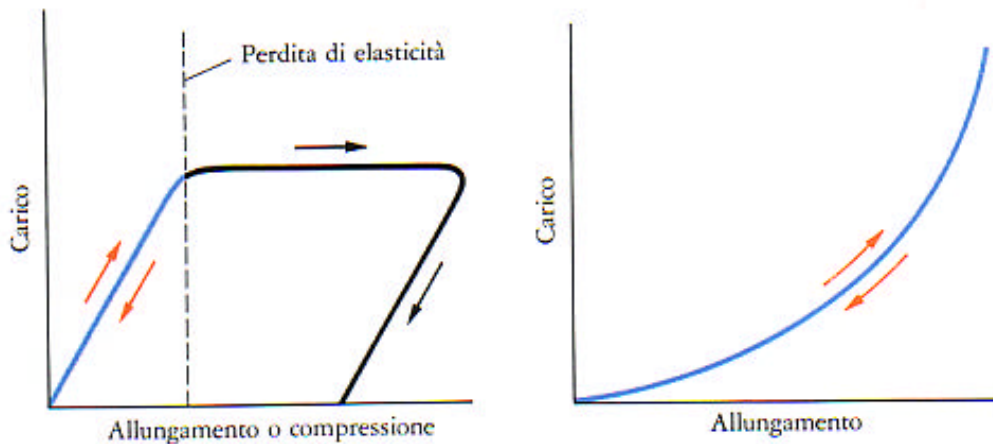
Ogni cambiamento nella configurazione normale (di riposo) di un corpo sia in dimensione che in forma e' una deformazione. Questo cambiamento e' il risultato di una forza che agisce o sulla superficie o sul corpo come un tutto. Alla nuova configurazione assunta sotto l'azione di forze esterne corrisponde una variazione delle forze interne al solido in modo da equilibrare quelle esterne

Interpretazione microscopica:



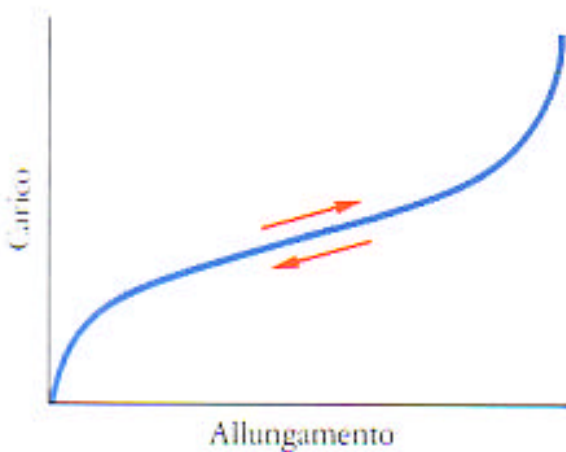
II I materiali solidi sono elastici: vale a dire, riacquistano forma e dimensione originale quando viene rimosso un carico che era stato loro applicato in precedenza.

III La legge di Hooke.- nei materiali o nelle strutture la deformazione è sempre proporzionale al carico applicato.



A sinistra Comportamento elastico e plastico dei metalli duttili.

A destra Curva tipica del comportamento completamente elastico dei tessuti animali.



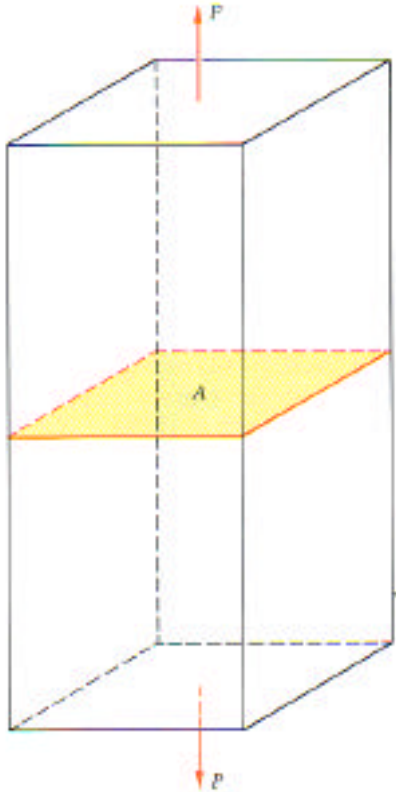
Curva a S tipica dei comportamento completamente elastico della gomma.

I concetti di sforzo e di deformazione

*Come si possono applicare i risultati di Hooke alla progettazione e all'analisi di altre strutture fatte di altri materiali? In che misura il comportamento di una struttura è influenzato dal materiale da cui è costituita e in quale misura è invece governato dalla sua forma e dimensione?

Lo studio delle condizioni che si verificano in un arbitrario punto interno a un materiale soggetto a forze meccaniche porta ai concetti di sforzo e di deformazione.

L'enunciazione dei concetti di sforzo e deformazione in una forma utilizzabile e non ambigua è opera di Augustin Cauchy (1789-1857).



Lo sforzo (stress)

sforzo = la forza per unità di superficie della sezione trasversale passante per un punto particolare del materiale.

$$s = F/A$$

Resistenza a trazione approssimativa di vari materiali comuni

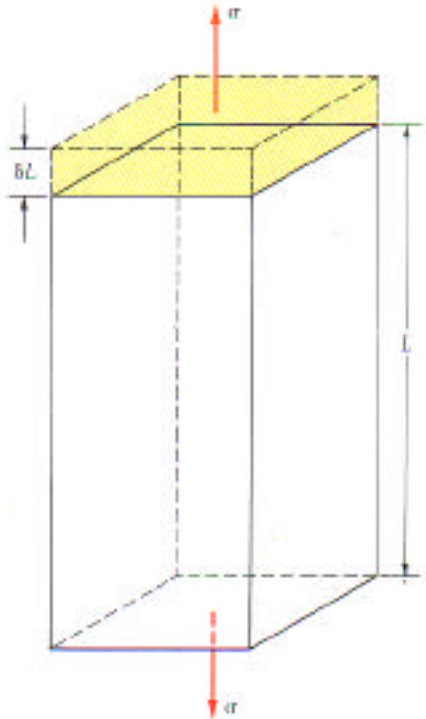
Materiale	psi	MN/m ²
<i>Metalli</i>		
Corde di pianoforte in acciaio (molto fragili)	450 000	3000
Acciaio ad alta resistenza utilizzato in ingegneria	225 000	1500
Acciaio dolce commerciale	60 000	400
Ferro battuto tradizionale	20 000-40 000	140-280
Ghisa tradizionale	10 000-20 000	70-140
Ghisa moderna	20 000-40 000	140-280
Alluminio puro	10 000	70
Leghe di alluminio	20 000-80 000	140-550
Rame	20 000	140
Ottone	18 000-60 000	120-400
Leghe di magnesio	30 000-40 000	200-280
Leghe di titanio	100 000-200 000	700-1400
<i>Non metalli</i>		
Legno di abete (lungo la vena)	15 000	100
Legno di abete (trasversalmente alla vena)	500	3
Vetro ordinario	5 000-25 000	30-170
Mattone ordinario	800	5
Calcestruzzo ordinario	600	4
Fibra di lino	100 000	700
Fibra di cotone	50 000	350
Budello	50 000	350
Ragnatela	35 000	240
Tendine umano	10 000	65
Fune di canapa	12 000	80
Cuoio	6 000	40
Osso umano	20 000	140
Fibra di nylon	140 000	1000
Fibra di Kevlar 29	400 000	2700

Fattori di conversione per le unità di misura dello sforzo

MPa (MN/m ²)	kg/m ²	psi
1	10,2	146
0,098	1	14,2
0,00685	0,07	1

La deformazione (strain)

La deformazione è la conseguenza di uno sforzo applicato a un materiale.



La deformazione è generalmente indicata col simbolo e : se un'asta di lunghezza iniziale L viene allungata di un tratto dL , è soggetta alla deformazione

$$e = dL/L$$

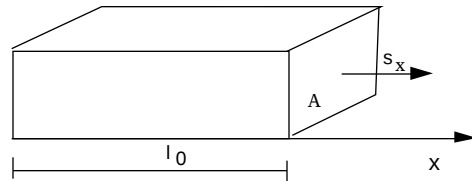
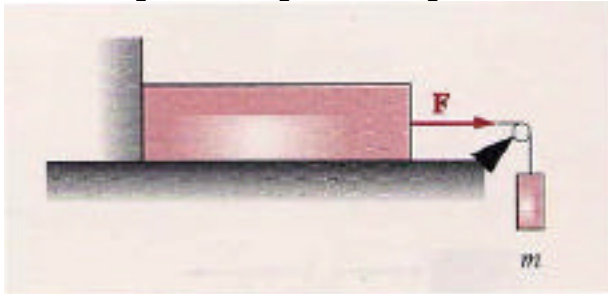
la deformazione è un rapporto fra due lunghezze, è una grandezza adimensionale.

Nei materiali strutturali la deformazione è spesso un numero molto piccolo, generalmente 10^{-3} o anche meno, ed è solitamente espressa mediante una percentuale: per esempio 0,1 per cento.

Ma... la gomma può essere deformata elasticamente dell'800 per cento e alcuni materiali biologici ancora di più.

Elasticit  per trazione e compressione

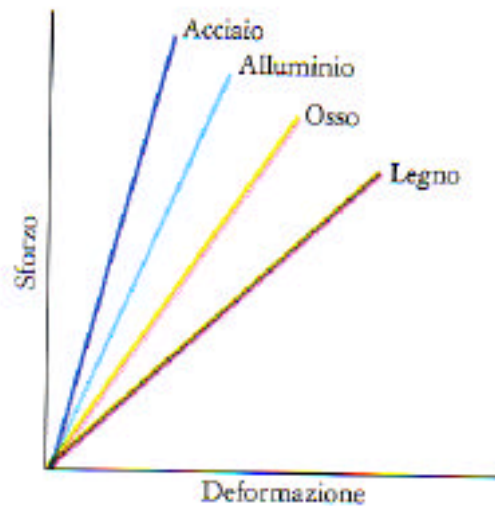
Un semplice dispositivo per studiare il comportamento in *trazione*



La legge di Hooke fornisce

$$s = E e$$

La quantita' E e' chiamata **modulo di Young**, del materiale e fornisce una misura della durezza del materiale. Maggiore e' il suo valore , maggiore e' la resistenza del materiale alla deformazione di tipo tensile.



Il modulo di Young (E)   dato dalla pendenza della prima parte della curva sforzo-deformazione e ha un valore caratteristico per ciascun materiale.

Substance	E, Young's modulus (Pa)	G, Shear modulus (Pa)	k, bulk's modulus (Pa)	Poisson 's ratio
Aluminium	7.0×10^{10}	2.4×10^{10}	7.5×10^{10}	0.34
Cast bronze	8.1×10^{10}	3.4×10^{10}	9.6×10^{10}	0.18
Copper	12.3×10^{10}	4.5×10^{10}	13.1×10^{10}	0.34
Gold	8.0×10^{10}	2.8×10^{10}	16.6×10^{10}	0.42
Lead	1.6×10^{10}	0.54×10^{10}	5.0×10^{10}	0.45
Silver	7.8×10^{10}	2.8×10^{10}	10.9×10^{10}	0.37
Steel	20.6×10^{10}	8.9×10^{10}	18.1×10^{10}	0.33
Tin	4.5×10^{10}	1.67×10^{10}	5.1×10^{10}	0.31
Quartz fiber	5.2×10^{10}	3.0×10^{10}	1.4×10^{10}	0.37
Glass, crown	7.0×10^{10}	3.0×10^{10}	5.0×10^{10}	0.24
Phosphor bronze	12.0×10^{10}	4.3×10^{10}	-	0.36

Per confronto si noti che il valore di E per il caucciù è $\sim 10^7$ Pa.

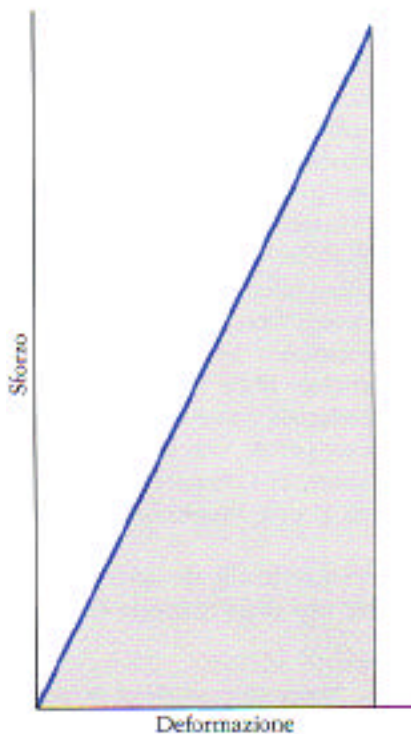
ENERGIA DI DEFORMAZIONE: L'ENERGIA DI UNA MOLLA

-Quando un materiale elastico viene deformato, immagazzina energia.

-Quest'energia viene restituita quando la deformazione viene meno.

-L'energia E immagazzinata in un materiale elastico, hookiano, soggetto a uno sforzo assiale S , che produce una deformazione e , è data da

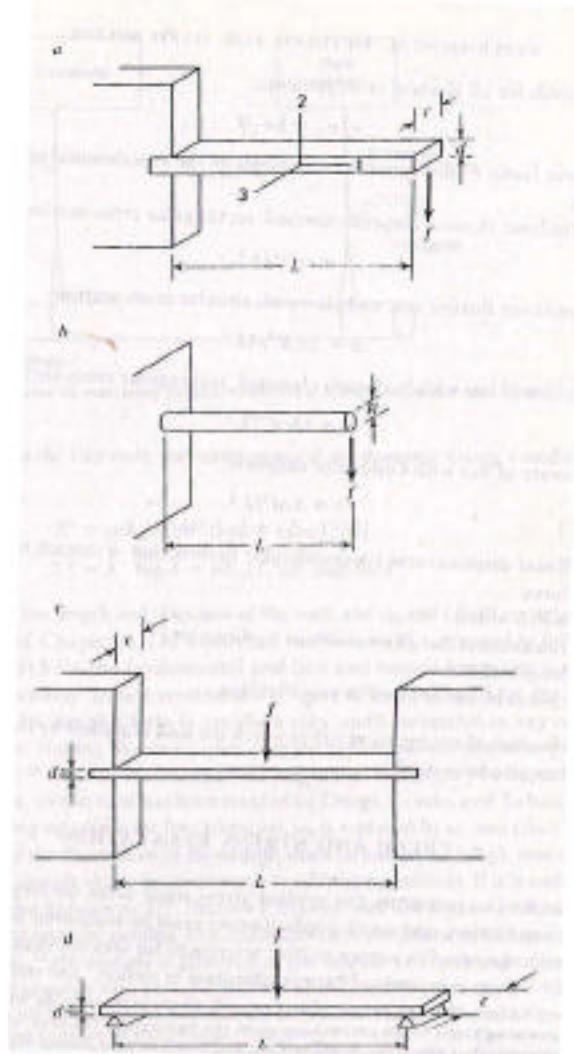
$$E = \frac{1}{2} es$$



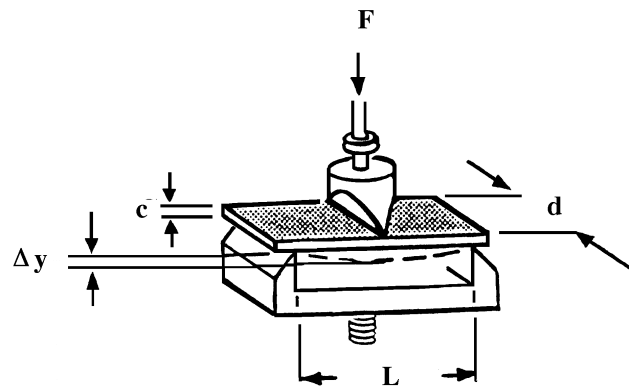
E è l'area sottesa alla curva sforzo-deformazione

Geometrie per esperimenti di tipo tensile, (in flessione).

Esperimenti di tipo tensile, che forniscono il valore del modulo di Young sono tutti quelli in flessione che si effettuano su solidi con modulo maggiore di 10^8 Pa.



a) Cantilever rettangolare, b) cantilever cilindrico, c) flessione di una sbarra rettangolare con estremita' bloccate, d) flessione di una sbarra rettangolare su un supporto di "coltelli"



– La freccia di flessione e' indicata in figura con Δy ed e' la quantita' corrispondente a Dl negli esperimenti di trazione. Geometria flessurale di "three point bending".

Uno strumento per esperimenti di tipo tensile in trazione

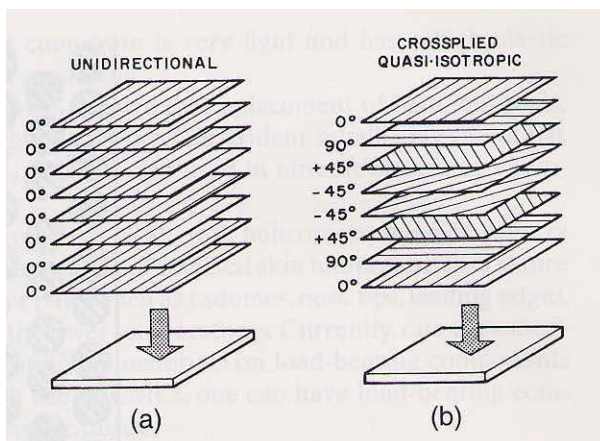
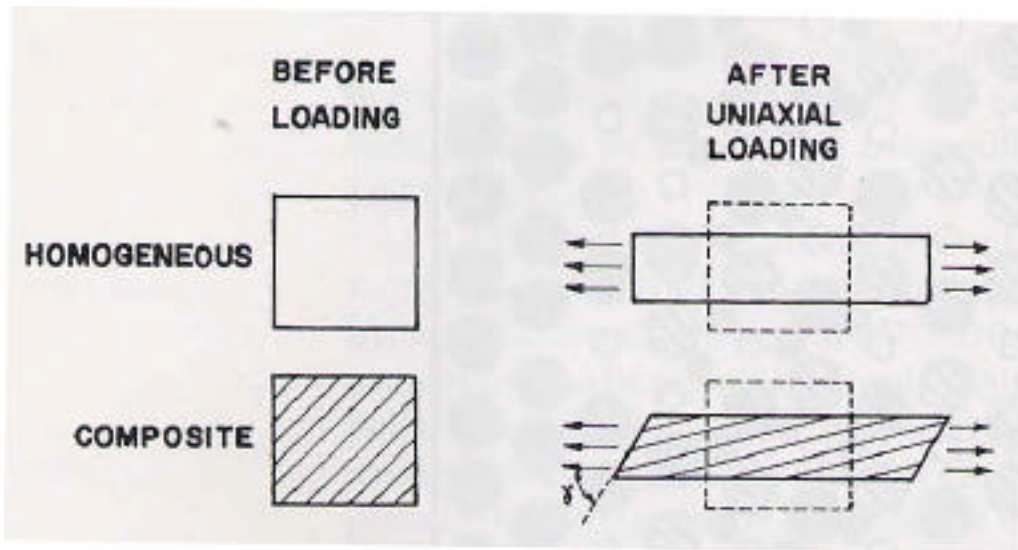


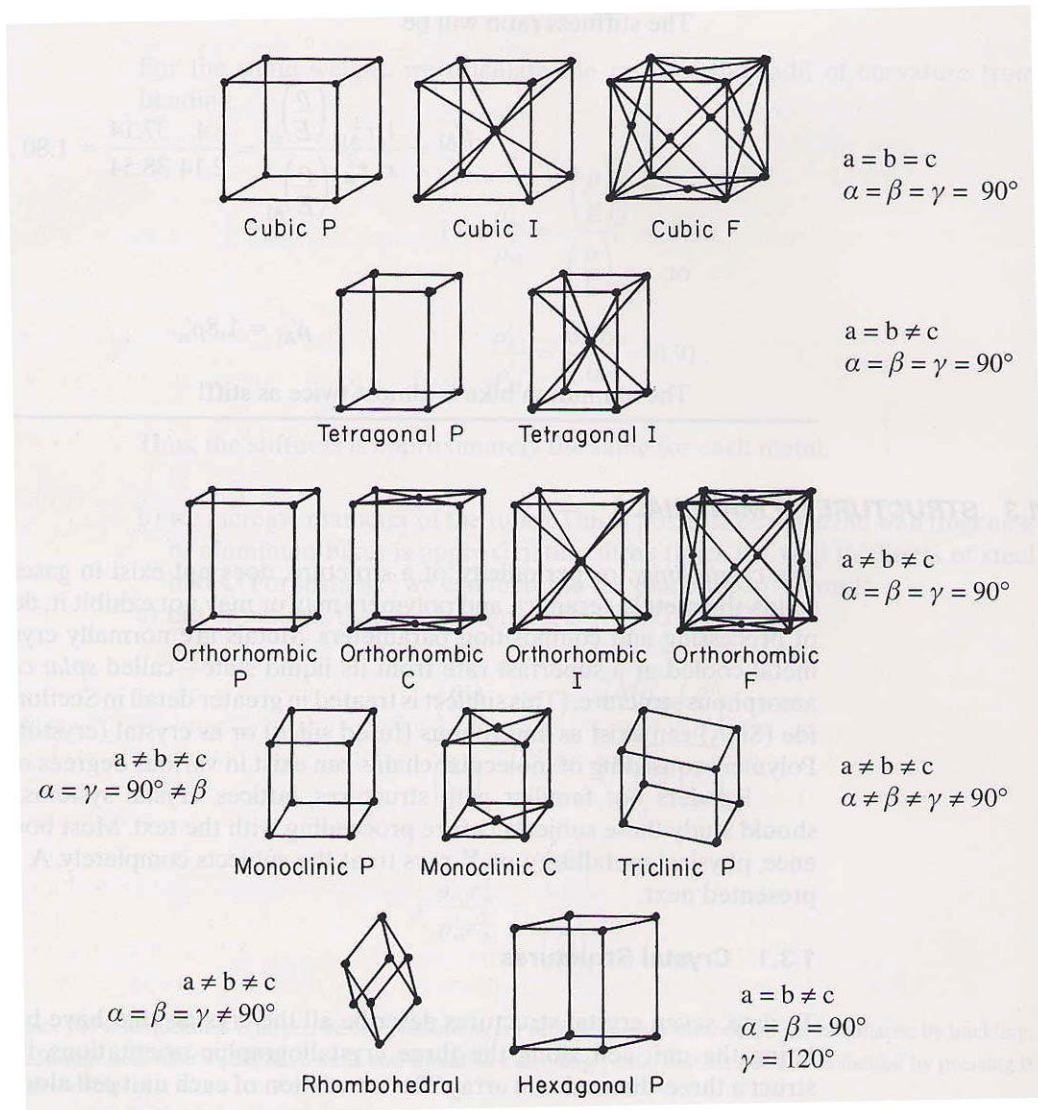
Materiali isotropi ed anisotropi.

I materiali si dividono in: *isotropi* ed *anisotropi*.

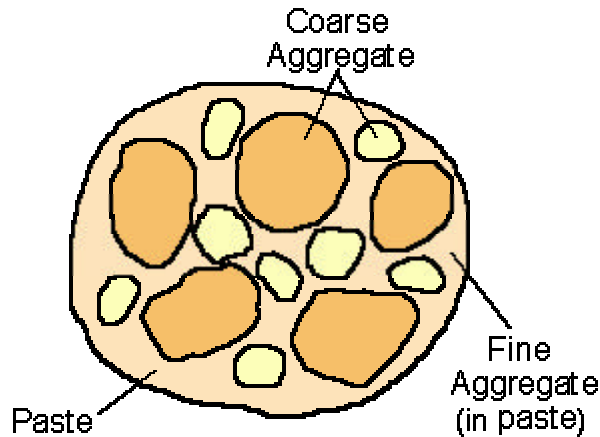
Isotropi: le proprietà elastiche dei materiali sono le stesse in ogni direzione.

Anisotropi: le proprietà elastiche in ogni punto sono diverse nelle diverse direzioni (le fibre, o i cristalli).





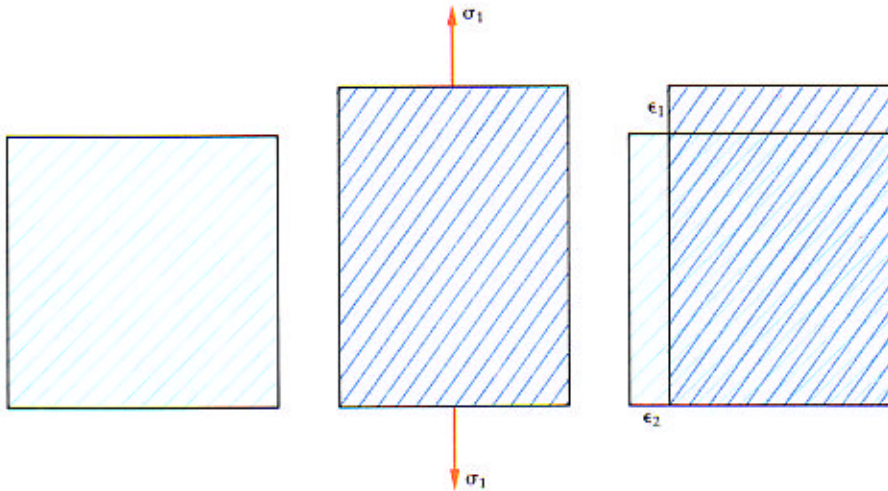
Si dicono *omogenei* i materiali che hanno le stesse proprietà elastiche in ogni punto (es: Materiali non omogenei sono i materiali compositi o i lapidei, per problemi per esempio di composizione o stratigrafici)



Direction of anisotropy	E (Pa)	ν	σ_f (Pa)
Strong	84.5×10^9	0.26	10.8×10^6
Intermediate	79.5×10^9	0.26	9.5×10^6
Weak	50.0×10^9	0.11	5.3×10^6

Proprietà meccaniche (medie) del **marmo Dionysos-Pentelikon** in tensione ottenuta con molte prove (test distruttivi). S_f è il carico tensile specifico massimo.

Young e Poisson: la deformazione in tre dimensioni



Quando un solido viene allungato da uno sforzo di trazione S_1 , subisce una deformazione primaria e , nella direzione di S_1 , ma si contrae anche lateralmente con una deformazione secondaria e_2 . Il coefficiente di Poisson n è uguale a e_2/e_1

e_2 ed e_3 dirette lungo gli assi perpendicolari alla direzione dello sforzo S_1 :

$$e_2 = e_3 = -n e_1 = -n (S_1/E)$$

Poisson's ratio su scala differenziale.

Sia V volume $V=xyz$, si ha:

$$d \ln V / d \ln x =$$

$$= d \ln x / d \ln x + d \ln y / d \ln x + d \ln z / d \ln x = 1 + d \ln y / d \ln x + d \ln z / d \ln x$$

allora

$$- d \ln y / d \ln x = - d \ln z / d \ln x = n$$

Infatti

$$d \ln y / d \ln x = (dy/y)/(x/dx) = e_2/e_1 \text{ e analogo per la variabile } z.$$

Se $DV=0$, cioè se non c'è variazione di volume allora $n=0.5$.

***La tabella fornisce l'interpretazione per i valori di ν :**

Poisson ratio	Interpretazione
0.5	No volume change during stretch
0.0	No lateral contraction
0.49 - 0.499	Typical values for elastomers
0.2 - 0.4	Typical value for plastics

Coefficiente di Poisson	
Materiale	—
acciaio	0.30
alluminio	0.33
caucciù	0.50
ferro	0.30
ottone	0.35
piombo	0.40
platino	0.38
rame	0.34
vetro per finestre	0.25

Properties

Concrete

Rock

Elastic modulus (psi)

4.867×10^6

3.952×10^6

Poisson's ratio

0.255

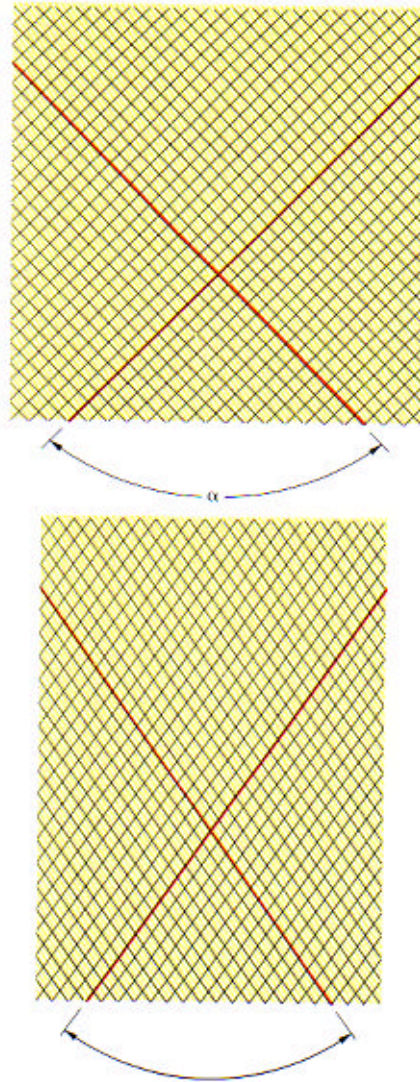
0.165

(J.M.C. Kishen, K.D. Singh / Engineering Fracture Mechanics 68 (2001) 201-219)

Anisotropia e coefficiente di Poisson

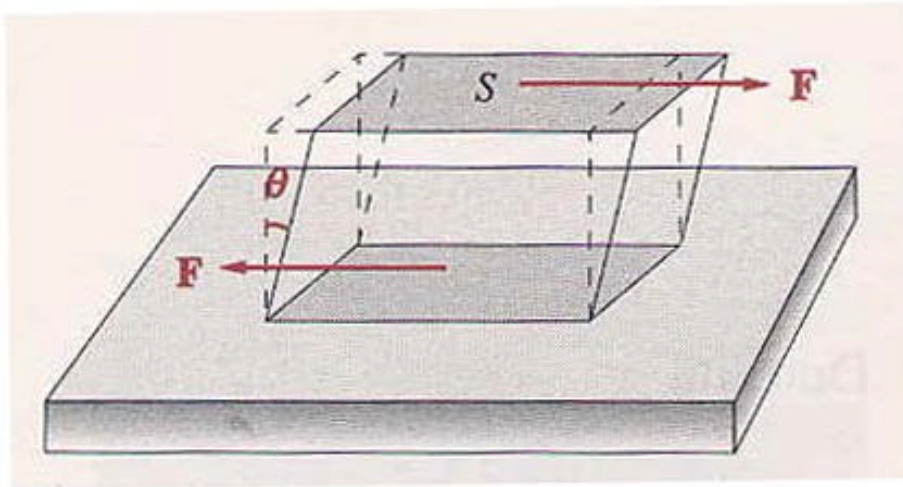
In un materiale omogeneo, isotropo il coefficiente di Poisson non può essere superiore a 0,5.

Tuttavia molti materiali biologici hanno una morfologia molecolare molto complicata che li rende anisotropi (questi materiali hanno cioè differenti proprietà elastiche nelle differenti direzioni). Per esempio, come possiamo verificare tastando i muscoli del braccio, che si ingrossano considerevolmente quando vengono contratti, il coefficiente di Poisson può essere molto più grande di 0,5; spesso è vicino a 1,0.



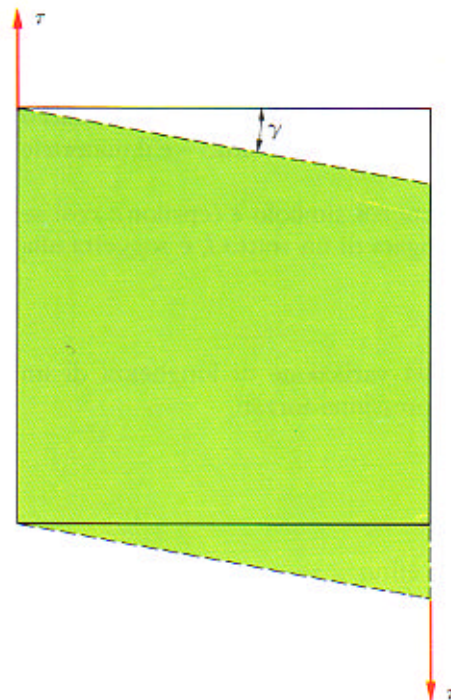
Elasticit  di scorrimento

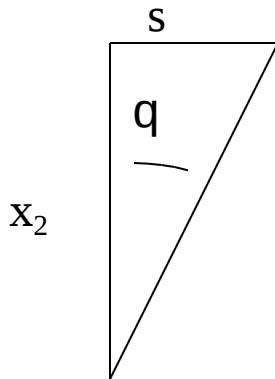
Se la trazione pu  essere intuitivamente associata all'azione di tirare e la compressione a un'azione di spinta, il taglio   associato a uno scorrimento, o pi  precisamente a una resistenza alla tendenza a scorrere quando viene applicata una forza.



*Lo **sforzo di taglio** τ   la forza di taglio per unit  di superficie della sezione del materiale su cui la forza agisce*

*La **deformazione di taglio** γ   l'angolo di deformazione del materiale causato dall'applicazione di uno sforzo di taglio τ . La deformazione di taglio   un angolo generalmente espresso in radianti*





La deformazione di shear g e' definita come lo spostamento della superficie superiore del blocco s diviso il suo spessore (nello schema x_2):

$$g = s / x_2$$

Per piccole deformazioni:

$$q = s / x_2$$

- Legge di Hooke

$$\tau = G \gamma$$

G (Pa) e' il modulo di taglio o di rigidita' (shear modulus).

G e' dello stesso ordine di grandezza di E .

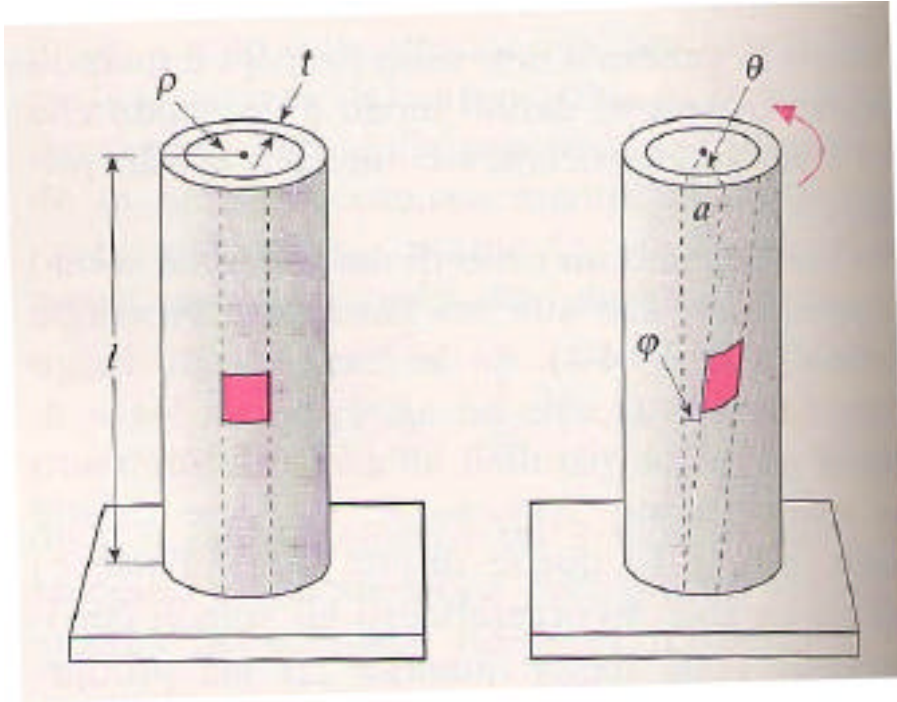
Dalla teoria della elasticita' $G = E / 2(1 + \nu)$.

Poiche' $0 \leq \nu \leq 0.5$, allora $2G \leq E \leq 3G$.

NOTA

La sollecitazione di scorrimento mantiene il volume rigorosamente costante.

Un sistema semplice per la misura di G : torsione



Si applica una forza all'estremità libera del tubo che abbia rispetto asse momento $\mathbf{M}$

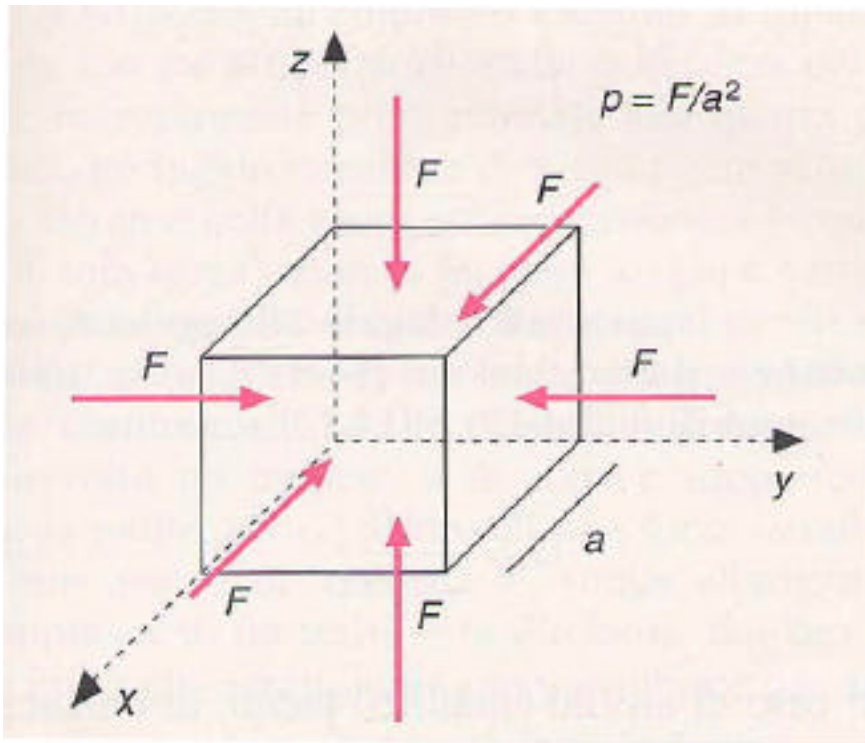
$$t = M / (2 \pi r^2 l)$$

$$f = a/l = r\phi/l$$

$$t = G f$$

Compressione uniforme e modulo di compressibilita'

Se la pressione viene variata di una quantita' Δp si avra' in corrispondenza una variazione di volume ΔV fino al volume V



Il **modulo di compressibilita'** k (o *bulk modulus*, Pa) e' definito dalla relazione:

$$k = - V \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

Il segno negativo indica che ad un aumento della pressione corrisponde una diminuzione del volume e viceversa.

Dalla teoria dell'elasticita' : $k = E/3(1-2\nu)$.

modulo di compressibilita' isoterma	
Materiale	k (Pa)
acciaio	$1.6 \cdot 10^{11}$
acqua	$2.1 \cdot 10^9$
alluminio	$7 \cdot 10^{10}$
ferro	$1.7 \cdot 10^{11}$
mercurio	$2.8 \cdot 10^{10}$
ottone	$6.1 \cdot 10^{10}$
rame	$1.4 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$2.0 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$5.0-5.5 \cdot 10^{10}$

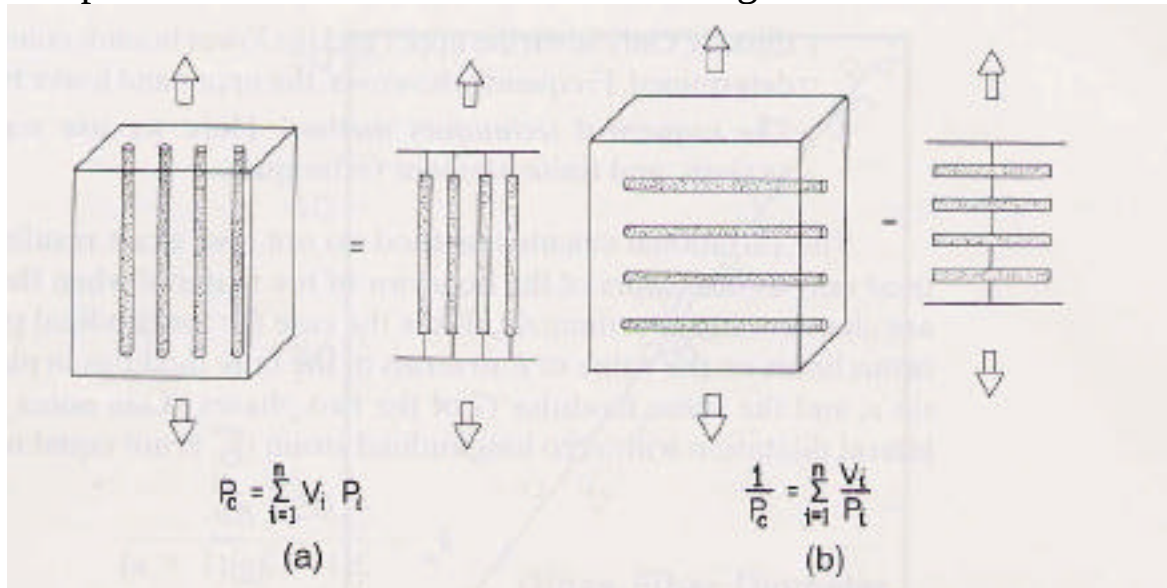
TABLE 2.2 Relations among the Elastic Constants for Isotropic Materials

Elastic Constants	In Terms of:				
	E, ν	E, G	K, ν	K, G	λ, μ
E	$= E$	$= E$	$= 3(1 - 2\nu)K$	$= \frac{9K}{1 + 3K/G}$	$= \frac{\mu(3 + 2\mu/\lambda)}{1 + \mu/\lambda}$
ν	$= \nu$	$= -1 + \frac{E}{2G}$	$= \nu$	$= \frac{1 - 2G/3K}{2 + 2G/3K}$	$= \frac{1}{2(1 + \mu/\lambda)}$
G	$= \frac{E}{2(1 + \nu)}$	$= G$	$= \frac{3(1 - 2\nu)K}{2(1 + \nu)}$	$= G$	$= \mu$
K	$= \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	$= \frac{E}{9 - 3E/G}$	$= K$	$= K$	$= \lambda + \frac{2\mu}{3}$
λ	$= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$= \frac{E(1 - 2G/E)}{3 - E/G}$	$= \frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$= K - \frac{2G}{3}$	$= \lambda$
μ	$= \frac{E}{2(1 + \nu)}$	$= G$	$= \frac{3(1 - 2\nu)K}{2(1 + \nu)}$	$= G$	$= \mu$

me λ sono le *costanti elastiche di Lamé*'.

Semplici calcoli per casi anisotropi: esempio sui compositi

Il modo piu' semplice per predire le proprieta' elastiche di un composito fibra-rinforzato e' mostrato in figura



Nel caso longitudinale: sistema "azione in parallelo"

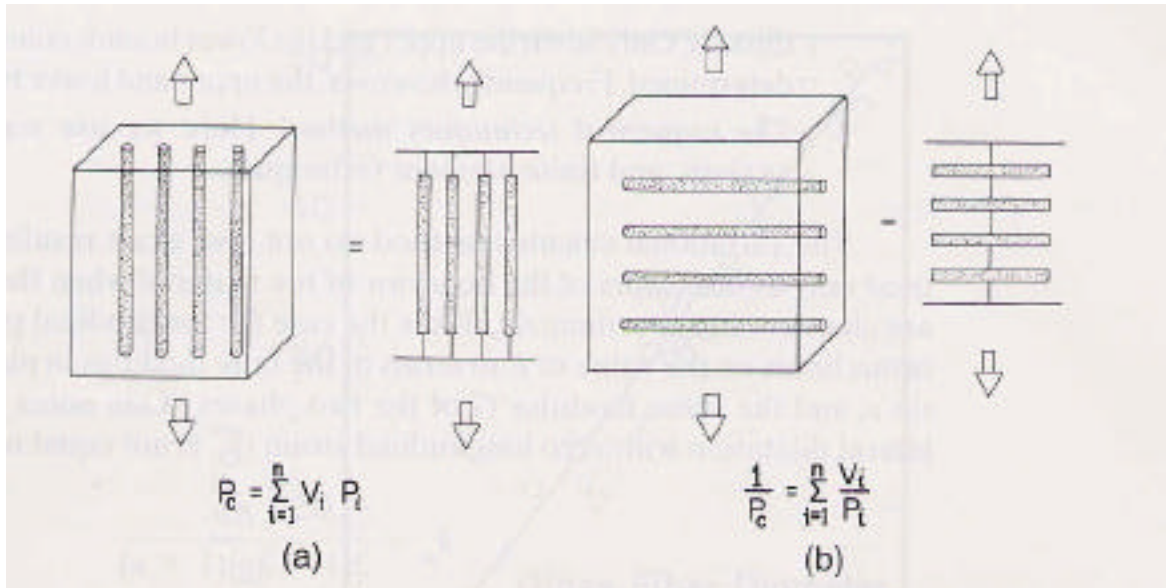
Si assume egual deformazione dei componenti e si ottiene la classica media di Voigt:

$$P_c = \hat{A} \sum_i P_i V_i$$

P e' la proprieta' di interesse e V il volume della i -ma componente del totale di N componenti. Nel caso $N=2$ per il modulo di Young

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m$$

con m matrice e f fibra.



Caso trasverso: sistema "azione in serie"

Si assume uguale stress agente sui componenti, si ottiene la media di Reuss

$$\frac{1}{P_c} = \hat{A} \sum_i \frac{V_i}{P_i}$$

Nel caso N=2 per il modulo di Young

$$\frac{1}{E_c} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

COMPORTAMENTO DEI MATERIALI SOTTO CARICO

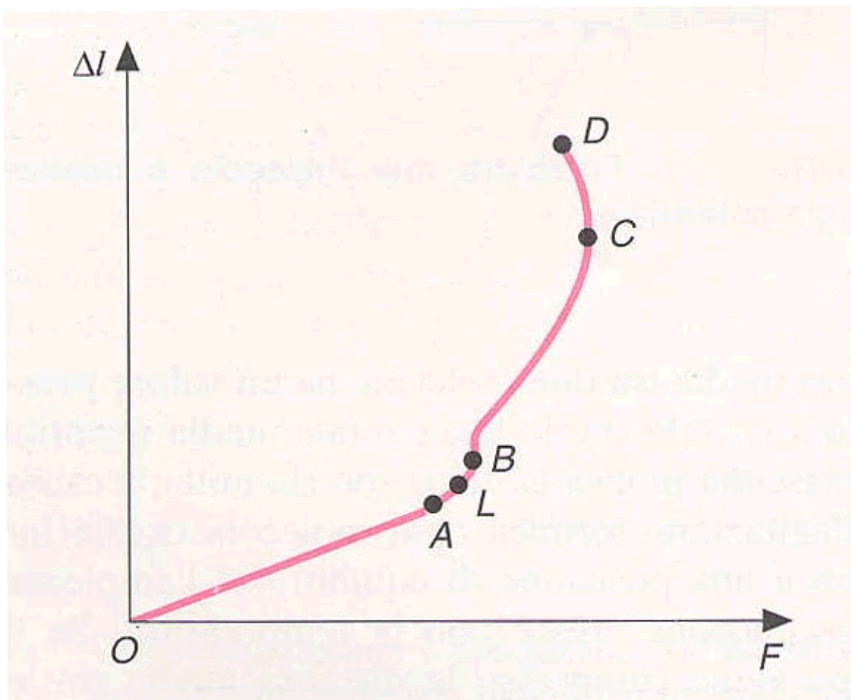
La risposta meccanica dei materiali si estende al di fuori della regione di linearita'.

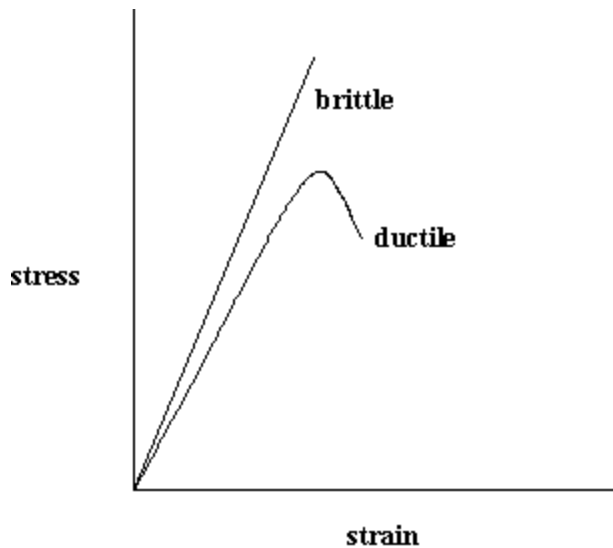
Nella regione di non linearita'

- 1) misurazioni a scopo industriale (norme UNI)
- 2) sia da prove a carattere scientifico (studio i fenomeni che si manifestano durante l'azione del carico).

Le proprieta' elastiche e resistenti del materiale si ottengono dall'esame del diagramma di deformazione, che ha per assi il carico F sul provino e la deformazione corrispondente (la variazione di lunghezza Δl nelle prove a trazione ed a compressione, la freccia d'inflessione nelle prove a flessione la rotazione relativa nelle prove a torsione).

Nella figura: A limite di proporzionalita', L limite elastico, B punto di snervamento, C punto di carico massimo, D punto di rottura.





L'esame del diagramma di deformazione permette di classificare i materiali in: duttili, fragili e plastici

I lapidei, i vetri o l'acciaio con una elevata componente di carbonio sono materiali **fragili**, per essi la risposta lineare si estende fin quasi alla rottura alla quale si perviene bruscamente con deformazioni plastiche permanenti piccole o inapprezzabili

Ductile/brittle Behavior

**Brittle metal
elongates <~5%
before breaking**

page 126

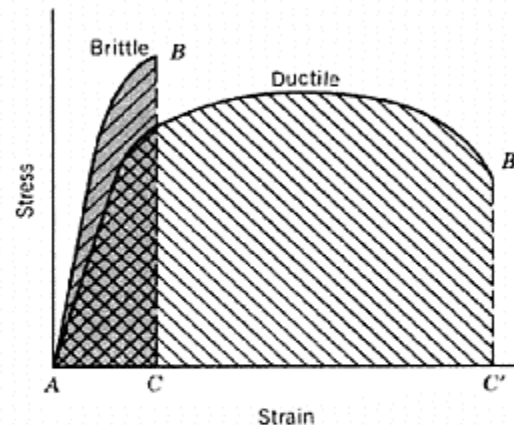


Figure 6.14--Page 125

La tabella riporta il carico specifico (cioe' per unita' di area) del limite elastico e carichi massimi specifici di alcuni materiali.

Materiale	Limite elastico (Pa)	Carico massimo (Pa)
Acciaio	$2\div 4 \times 10^8$	$5\div 7 \times 10^8$
Alluminio	1.3×10^8	1.4×10^8
Ottone	3.8×10^8	4.6×10^8
Rame	1.5×10^8	3.4×10^8

Materiale	E (GPa) compressione	ν	Carico massimo(MPa) compressione
Granite	40-70	0.2-0.3	70-280
Limestone	20-70	0.2-0.3	20-200
Marble	50-100	0.2-0.3	50-180
Brick	10-24	-	7-70
Ceramic	300-400	-	-
Concrete	18-30	0.1-0.2	10-70

Da Efundat

E' da ricordare che i materiali fragili come le rocce o l'argilla ecc che il carico massimo tensile e' inferiore a quello compressivo

