Propagazione degli errori: caso fluttuazioni casuali

f non è una funz. di distribuzione!

- siano x, y 2 variabili aleatorie con σ_x e σ_y e valori medi $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

- $u = f(x,y)$, chiamo $\bar{u} = f(\bar{x},\bar{y})$

posso sviluppare $f(x,y)$ in serie intorno a $\bar{x},\bar{y}$

$$f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + (x-\bar{x}) f_x\big|_{\bar{x},\bar{y}} + (y-\bar{y}) f_y\big|_{\bar{x}\bar{y}} + O^2$$

$$u = \bar{u} + (x-\bar{x}) f_x\big|_{\bar{x}\bar{y}} + (y-\bar{y}) f_y\big|_{\bar{x}\bar{y}} + O^2$$

- $E[u] = E[f(\bar{x}\bar{y})] + E[x-\bar{x}] f_x\big|_{\bar{x},\bar{y}} + E[y-\bar{y}] f_y\big|_{\bar{x}\bar{y}} + \dots$

$$E[u] = \bar{u} + O^2$$

- $E[(u-\bar{u})^2] = \sigma_u^2 = E\left[(x-\bar{x})^2 f_x^2 + (y-\bar{y}) f_y^2 + 2(x-\bar{x})(y-\bar{y}) f_x f_y\right] =$

$$= f_x^2 E[(x-\bar{x})^2] + f_y^2 E[(y-\bar{y})^2] + 2 f_x f_y E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})] =$$

$$= f_x^2 \sigma_x^2 + f_y^2 \sigma_y^2 + 2 f_x f_y \underbrace{\{E[xy] - \bar{x}\bar{y}\}}_{cov(x,y)}$$

- se x e y indipendenti $\Rightarrow cov(x,y) = 0$ e

$$\sigma_u^2 = f_x^2 \sigma_x^2 + f_y^2 \sigma_y^2$$

cioè se le variabili sono indipendenti gli errori si sommano quadraticamente.

CASI particolari

$\dot{S} = ax + by$ $\quad\quad \sigma_S^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\,cov(x,y)$

$D = ax - by$ $\quad\quad \sigma_D^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 - 2ab\,cov(x,y)$

nota: per $cov(x,y)=0$ l'errore relativo è maggiore per D perchè u è più piccolo $\Rightarrow$ È meglio misurare direttamente la differenza che ottenerla da 2 misure separate!

$P = u = \mp axy$ $\quad\quad \frac{\delta u}{\delta x} = \mp ay \quad \frac{\delta u}{\delta y} = \mp ax$

- $\sigma_u^2 = a^2y^2\sigma_x^2 + a^2x^2\sigma_y^2 + 2a^2xy\,cov(x,y)$
- o più simmetricamente $\frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2\frac{cov(x,y)}{xy}$

$Q = u = \mp a\frac{x}{y}$ $\quad\quad \frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2\frac{cov(x,y)}{xy}$

NOTA - Anche nel caso in cui l'errore è la risoluzione dello strumento, poichè è pessimistico pensare che gli errori contribuiscano in un sol verso, conviene usare le formule precedenti. - P. esempio nel caso somma

$\Delta S = \sqrt{\sum_i (\Delta S_i)^2}$

CAMPIONAMENTO E STIMA DEI PARAMETRI

- Campionamento: metodo sperimentale per ottenere info sui parametri distribuzione incognita
- Dato campione metodo per determinare miglior stima dei parametri della "parent distribution"
- Problema stime — determinare miglior stima
  — determinare incertezza sulla stima

- Media campione (miglior stima di μ)

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{con} \qquad \mu = \lim_{N\to\infty} \sum \frac{x_i}{N}$$

$$\text{e} \quad \forall \varepsilon \quad P(|m-\mu| \geq \varepsilon) \to 0 \quad \text{per } n\to\infty$$

- Varianza campione (miglior stima σ^2).

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 \qquad \text{MA} \ldots$$

$x_i - m$ non sono indipendenti tra loro! allora

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$$

• varianza della media m

m è variabile casuale $\Rightarrow$ $s_m^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta m}{\delta x_i}\right)^2 \sigma_i^2 =$

$$= s^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta m}{\delta x_i}\right)^2$$

$$s_m^2 = s^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{s^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - m)^2$$

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

• varianza $s^2_{s^2}$ della stima varianza s^2

si dimostra

$$s^2_{s^2} = \frac{2s^4}{n-1} \quad e \quad s_s = \frac{s}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Teorema limite centrale

- risultati delle misure fluttuano, alla fine si scrive
  $m \mp s_m$ o $m \mp 2s_m$

- grazie T.l.c. la scrittura ha senso

- siano $x_1 \dots x_n$ n variabili aleatorie con medie $m_1 \dots m_n$ e deviaz. standard $s_1 \dots s_n$

  $\sum_i x_i = x$ è una v.c. con media $m = \sum m_i$ e
  $s^2 = \sum_i s_i^2$

- T.l.c. stabilisce che qualsiasi sia la f. distr. di $x_1 \dots x_n$

  x è asintoticamente normale (m, s).

  se x_i hanno la stessa $\bar{m}$ e $\bar{s}$ $\Rightarrow$

  x è asintoticamente normale $(n\bar{m}, \sqrt{n}\,\bar{s})$

  quindi la media aritmetica

  $\frac{1}{n}\sum x_i$ è asintoticamente normale $(\bar{x}, \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}})$

- LA MEDIA CAMPIONE HA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA per $n \to \infty$

NOTA : LA CONVERGENZA È RAPIDA

METODI di FIT

- determinare la miglior f tale che $y = f(x)$ a partire da una serie di (x_i, y_i)

- siano x_i, y_i, σ_i errori su y_i ; $f = f(x, a_1 \dots a_m)$

- metodo minimi quadrati $\Rightarrow$ i migliori a_j sono tali che la S

$$S = \sum_i \frac{(y_i - f(x_i, a_1, \dots, a_m))^2}{\sigma_i^2}$$

ha un minimo

- Nella S si riconosce un χ^2

- Nota: non si richiede conoscenza della parent distribution

- Risolvere il sistema di equazioni

$$\frac{\delta S}{\delta a_j} = 0$$

- Una volta ottenuti gli a_j migliori serve stima errori

V_{ij} = matrice covarianza

$$\left(V_{ij}^{-1}\right) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta a_i \delta a_j}$$

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(1,2) & \dots \\ cov(1,2) & \sigma_2^2 & \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix}$$

TEST χ^2

- criterio di qualità del fit
- $$S = \sum \frac{(y_i - f(x_i; a_j))^2}{\sigma_{y_i}^2}$$ valutata sul minimo
- $S = \sum z_i^2$

$$P(S) = \frac{S^{n/2 - 1} \exp(-S/2)}{2^{n/2} \, \Gamma(n/2)} \qquad E[S] = n \quad \sigma_S^2 = 2n$$

- Tavole.
- se $P(\chi^2 \leq S) \leq 95\%$ il fit può essere accettato
- se $P(\chi^2 \leq S) \leq 5\%$ $\Rightarrow$ i dati non fluttuano abbastanza!

DATI FALSIFICATI?

se non è questo il caso

SOVRASTIMA ERRORI