

Matematica e Fisica STPA TAAEC - Primo appello estivo

L'accelerazione gravitazionale terrestre è $g = 10 \text{ m/s}^2$. Le densità ρ del ghiaccio e dell'acqua sono entrambe praticamente uguali a 1 gr/cm^3 . Il calore latente del ghiaccio è $K = 80 \text{ cal/gr}$. Il calore specifico C dell'acqua è $1 \text{ cal/(gr} \cdot \text{ } ^\circ K)$

1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix},$$

calcolare la somma $A + B$ e l'inversa di B

— Risposte:

$$A + B = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Esiste l'inversa di A ? Perché?

— Risposta:

No, perché $\det A = 0$

2. Calcolare il limite

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\ln(1 + 3x^2)}$$

— Risposta:

$$\ell = \frac{2}{3},$$

3. Calcolare la derivata prima di

$$f(x) = x^5 + \ln^2(x) + \sin(x)e^x$$

— Risposta:

$$f'(x) = 4x^4 + \frac{2}{x} \ln(x) + \cos(x)e^x + \sin(x)e^x$$

4. Calcolare la primitiva $g(x)$ di

$$g'(x) = \frac{3}{1+x} + \cos(x+1) + 2xe^{-x^2}$$

— Risposta:

$$g(x) = 3 \ln |1+x| + \sin(x+1) - e^{-x^2}$$

5. Dire dove la funzione

$$-\frac{x}{1+x^2}$$

è crescente e dove è decrescente

— Risposta: cresce per $|x| > 1$, decresce per $|x| < 1$

6. Individuarne i massimi e minimi locali

— Risposta: il minimo locale è a $x = 1$, il massimo locale è a $x = -1$

7. Un lanciatore di baseball lancia la palla imprimendole una velocità iniziale orizzontale a un'altezza dal suolo pari a $h = 1.5m$. La palla va a cadere a una distanza $d = 25m$. Supponendo che l'attrito dell'aria sia trascurabile, quanto tempo impiega la palla per arrivare a terra?

Formula: $t = \sqrt{2h/g}$

Valore: 0.55s

8. Calcolare la velocità impressa alla palla dal lanciatore.

Formula: $v = d/t$

Valore: 45.6m/s = 164 km/h (uno dei lanci più veloci della storia)

9. Un cubetto di ghiaccio di $\ell = 2$ cm di lato viene immerso in un bicchiere d'acqua a temperatura ambiente ($T = 300K$). Calcolare la massa m del cubetto

Formula: $m = \rho\ell^3$

Valore: 8 gr

10. Calcolare il calore Q assorbito dall'acqua dalla fusione del ghiaccio

Formula: $Q = Km$

Valore: 640cal

11. Se l'acqua ha volume V pari a 1 decilitro, di quanto scende la temperatura dell'acqua quando cede il calore Q ?

Formula: $\Delta T = Q/(C\rho V)$

Valore: 6.4 gradi

12. Con una lente di distanza focale $f = 0.3$ m osservo una casa di altezza $h = 10$ m che si trova a una distanza $d = 30$ m. A quale distanza d' dalla lente si forma l'immagine?

Formula: $d' = df/(d - f)$

Valore: 30cm