

Matematica e Fisica STPA TAAEC

Primo appello

Matematica

Calcolare il prodotto $C \equiv AB$, $\det C$ e C^{-1} , dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

— Risposte:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\det C = 11$$
$$C^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare i limiti

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x\pi)}{\ln(x)}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{(e^{2x} - 1)^2}.$$

— Risposte:

$$\ell_1 = -\pi$$
$$\ell_2 = \frac{1}{4}$$

Calcolare le derivate prime di

$$f(x) = \ln(\cos(x)), \quad g(x) = x \sin(e^x).$$

— Risposte:

$$f'(x) = -\tan(x),$$
$$g'(x) = \sin(e^x) + xe^x \cos(e^x)$$

Calcolare le primitive $k(x)$ e $w(x)$ di

$$k'(x) = x \cos(x + 1), \quad w'(x) = e^x \sin(2e^x).$$

— Risposte:

$$k(x) = \cos(x + 1) + x \sin(x + 1) + C$$
$$w(x) = -\frac{1}{2} \cos(2e^x) + C$$

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{-x^2/2}.$$

— Risposte:

dominio: \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\text{derivata prima: } e^{-x^2/2}(1 - x^2)$$

$$\text{punti stazionari: } x = -1, x = 1$$

$$\text{derivata seconda: } xe^{-x^2/2}(x^2 - 3)$$

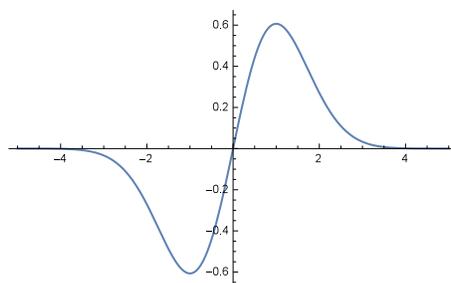
$$\text{massimi relativi: } x = 1, f = e^{-1/2}$$

$$\text{minimi relativi: } x = -1, f = -e^{-1/2}$$

$$\text{massimo assoluto: } e^{-1/2}$$

$$\text{minimo assoluto: } -e^{-1/2}$$

grafico:



Fisica

Costante di Newton $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. L'accelerazione gravitazionale terrestre è $g = 10 \text{ m/s}^2$. Una caloria = 4.184 J. La costante dei gas perfetti è $R = 8.3144 \text{ J}/(^{\circ}\text{K mol})$. Il calore di fusione del ghiaccio è $K = 80 \text{ cal/gr}$. Il calore specifico dell'acqua è $C = 1 \text{ cal}/(\text{gr } ^{\circ}\text{K})$. La densità dell'acqua è $\rho = 1 \text{ litro}/\text{dm}^3$. La velocità del suono è $v_s = 340 \text{ m/s}$. La velocità della luce è $c = 300000 \text{ km/s}$.

Lavorare nel sistema MKS, a meno che non sia specificato diversamente. In parentesi il numero di cifre decimali richieste per le risposte numeriche.

1. Sapendo che la massa della terra è $M = 5.9736 \cdot 10^{24}$ kg e il raggio della terra è $R = 6371$ km, calcolare l'accelerazione gravitazionale g' sulla stazione spaziale internazionale, che orbita ad un'altitudine h pari a 400 km.

Formula: $g' = GM/(R + h)^2$

Valore (1): 8.7 m/s^2

2. Si stacca un carico di $m = 30$ kg da una gru e cade a terra da un'altezza $h = 45$ m. Quanto tempo t impiega ad arrivare a terra, trascurando l'attrito dell'aria?

Formula: $t = \sqrt{2h/g}$

Valore (0): 3 s

3. Con quale velocità v arriva?

Formula: $v = \sqrt{2gh}$

Valore: (0): 30 m/s

4. Si osserva che invece arriva a terra ad una velocità $v' = 25 \text{ m/s}$. Quanto lavoro ha fatto l'attrito dell'aria?

Formula: $(v^2 - v'^2)m/2 = mgh - mv'^2/2$

Valore (0): 4125 J

5. Quanto calore Q occorre fornire a un cubetto di ghiaccio di volume $V = 0.2$ decilitri e temperatura $T = 0^\circ\text{C}$ per scioglierlo?

Formula: $Q = K\rho V$

Valore (0): $1,6 \text{ kcal}$

6. Nella vasca da bagno mescolo $V_1 = 20$ litri di acqua fredda a temperatura $T_1 = 0^\circ\text{C}$ con $V_2 = 30$ litri di acqua calda a temperatura $T_2 = 60^\circ\text{C}$. Quanto vale la temperatura T finale dell'acqua?

Formula: $T = (V_1T_1 + V_2T_2)/(V_1 + V_2)$

Valore (1): $T_2 = 36^\circ\text{C}$

7. Un'onda sonora ha frequenza $f = 40 \text{ Hz}$, ampiezza $A = 0.1 \text{ m}$ e si annulla per $x = 0$ al tempo $t = 0$. Scrivere la lunghezza dell'onda e la sua funzione $f(x, t)$.

Formula: $\lambda = v_s/f, \quad f(x, t) = A \sin(2\pi fx/v_s - 2\pi ft)$

Valore (2): $\lambda = 8.5 \text{ m}, \quad f = 0.1 \text{ m} \sin(0.74x - 251.33t)$

8. Il diamante ha un indice di rifrazione pari a $n = 2.419$. Calcolare l'angolo limite che dà la riflessione totale tra diamante e aria in gradi.

Formula: $\arcsin(1/n)$

Valore (0): 24 gradi

9. Una palla da biliardo si muove con velocità $v = 2$ m/s contro un'altra palla da biliardo ferma. Calcolare le velocità delle due palle dopo l'urto.

Formula: la prima si ferma, la seconda acquista velocità v . Segue dalla conservazione dell'energia e dell'impulso, che danno $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ e $v = v_1 + v_2$, dove v_1 e v_2 sono le velocità finali. Sottraendo il quadrato della seconda dalla prima, otteniamo $v_1 v_2 = 0$. Le uniche soluzioni sono $v_1 = v, v_2 = 0$ (situazione iniziale) e $v_1 = 0, v_2 = v$ (situazione finale)

Valore (1): 0 e 2 m/s