Damiano Anselmi damiano.anselmi@df.unipi.it

www.df.unipi.it/~anselmi

Matematica e fisica 64 ore = 32 + 32

Prova in itinere di matematica : 28/10/2019 9.00 - 11.30
aula magna

Prova in itinere di fisica : ultime due ore del corso

Domani non c'è lezione

la recuperiamo giovedì 10/10/2018 dalle 14.30 alle 16.30

Ricevimento : MER 8.30 - 9.30 Piagge

MAR 14.00 - 16.00 a fisica Ed. C

Polo Fibonacci, primo piano, uff. 158

https://naturali.campusnet.unito.it/didattica/att/a08b.5472.file.pdf

Lezioni di matematica   Console Roggero Romagnoli *

Matematica di base   Bugatti Robbiano *

Matematica per le scienze della vita, C&F Sbordone

Matematica. Comprendere e interpretare fenomeni delle scienze della vita, Villani, Gentili

Insiemi indicati con $A, B, C, \dots$ $X, Y, Z \dots$

sono collezioni di oggetti, detti elementi dell'insieme

indicati con $a, b, c, \dots$ $x, y, z \dots$

$$A = \{ \underbrace{a, x, y}_{\text{non importa l'ordine}} \} \qquad B = \{c, a\}$$

$a \in A$ "a appartiene ad A"

ϕ = insieme vuoto $= \{ \ \}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri naturali

$n, m \in \mathbb{N}$

$\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} / \{0\}$

numeri naturali positivi

"privato di"

$\mathbb{N}$ è chiuso rispetto al prodotto e alla somma:

il prodotto di due numeri naturali è un numero naturale

la somma di due numeri naturali è un numero naturale

non è chiuso per sottrazione o divisione

$2 - 3 = -1$

$\mathbb{Z}$ = numeri interi relativi = $\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ è chiuso sotto somma, prodotto e sottrazione

$$(-3)\cdot(-2) = +6$$

$+ \cdot + = +$ $\qquad$ $- \cdot - = +$

$+ \cdot - = -$

$\mathbb{Z}$ non è chiuso sotto divisione

$3 : 2 = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ $\qquad$ $-3 : 2 = -\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

non appartiene a

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali = $\left\{ \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{m \cdot p}{n \cdot p} \quad p \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3 \cdot \cancel{5}}{2 \cdot \cancel{5}}$

$q \in \mathbb{Q}$ $\qquad q_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$ $\qquad q_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$ $\begin{array}{l} \leftarrow \text{numeratore} \\ \leftarrow \text{denominatore} \end{array}$

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{6}{28} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{14 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{14}$$

$$q_1 + q_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2} + \frac{m_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1} =$$

$$= \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Reciproco : se $q = \dfrac{m}{n}$ e $q \neq 0$, allora $\dfrac{1}{q} = \dfrac{n}{m}$

"diverso da"

il reciproco di $\frac{3}{14}$ è $\frac{14}{3}$

$\mathbb{Q} = \{$ numeri decimali che hanno un numero finito di cifre decimali o sono periodici $\}$

$$0,25 \overset{?}{=} \frac{m}{n} = 0,25 \cdot \frac{p}{p} = \frac{0,25 \cdot 100}{100} =$$

$$\frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} = 1$$

$$= \frac{25}{100} = \frac{5 \cdot \cancel{5}}{20 \cdot \cancel{5}} = \frac{1 \cdot \cancel{5}}{4 \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{4}$$

numero decimale periodico: numero decimale tale che le sue cifre decimali contengono una sequenza che si ripete indefinitamente (da un certo punto in poi)

Es.: $0,1216343434\ldots = 0,1216\overline{34}$

$0,\overline{5} = 0,5555\ldots$

$10 \cdot 0,\overline{5} = 5,555\ldots = 5,0 + 0,555\ldots$

$\downarrow$

x

$$10x = 5 + x$$

$$-x \qquad -x$$

$$9x = 5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

$5 : 9 = 0,55\ldots$

50

50

5 ...

$$0,\overline{5} = \frac{5}{9}$$

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali = { tutti i numeri decimali }

. . . . . , ...

$0,\underbrace{12}\underbrace{121}\underbrace{1211}\underbrace{12111}\underbrace{121111}\ldots$

Tutti i numeri reali che non sono razionali si chiamano irrazionali

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad 5^2 = 25$

Potenze: $x^2 = x \cdot x$ (2 ← esponente) $\qquad x^3 = x \cdot x \cdot x$

$x^{10} = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{10 \text{ volte}}$

Radice quadrata

Se $y = x^2$ si dice che x è la radice quadrata di y = quel numero il cui quadrato è y

Si scrive $x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{81} = \pm 9$

$9 \cdot 9 = 81$

$(-9) \cdot (-9) = 81$

Radice cubica

Se $y = x^3$, x è detta radice cubica di y

$x = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-8} = -2$

$\mathbb{R}$ non è chiuso sotto radice quadrata

$y = x^2$ $\qquad$ $x = \sqrt{y}$

Se $x > 0$ allora $y = x \cdot x > 0$

x è maggiore di 0 $\qquad$ $+ \cdot + = +$

(x positivo)

Se $x < 0$ allora $y = x \cdot x > 0$

x è minore di 0 $\qquad$ $- \cdot - = +$

(x negativo)

Quindi non esiste alcun numero reale tale che il suo quadrato sia negativo

$\nexists$ numero reale i / $i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$

non esiste tale che

$\exists$

esiste

numeri complessi $\mathbb{C}$

Sono fatti di 2 numeri reali

$x + i \cdot y$ dove $i = \sqrt{-1}$

$x \in \mathbb{R}$ parte reale

$y \in \mathbb{R}$ parte immaginaria

distributiva

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \qquad (\cancel{a})$$

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \qquad (\cancel{a}\ x)$$

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) =$$

$$= a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $i\cdot i = -1$

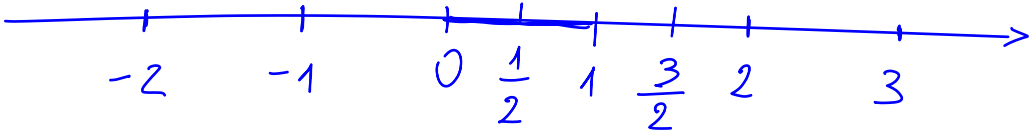
$z \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $z = x + iy$ dove $x, y \in \mathbb{R}$

$w = \mathbb{C}$ $\qquad$ $w = a + ib$ dove $a, b, \in \mathbb{R}$

$$z\cdot w = (x+iy)\cdot(a+ib) = x\cdot a + ixb + iya - yb$$

$$iy\,ib = i\cdot i\cdot y\cdot b = -y\cdot b \qquad = xa - yb + i(xb + ya)$$

Si parla di retta reale



$\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

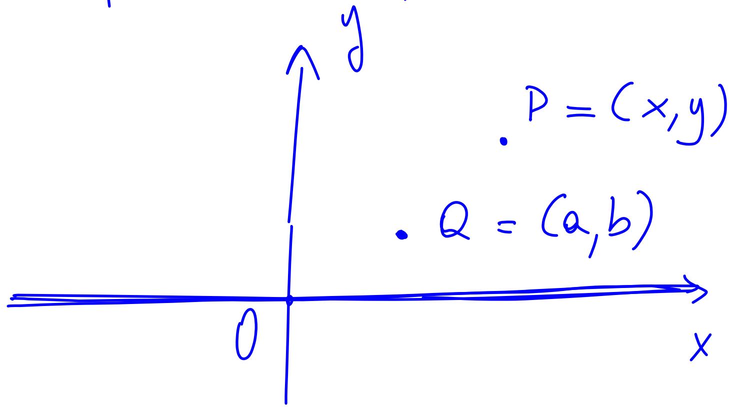
è possibile ordinare i numeri reali:

se $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = b$

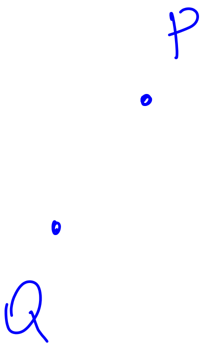
o $a < b$

o $a > b$

Si parla di piano complesso



$x + iy \in \mathbb{C}$

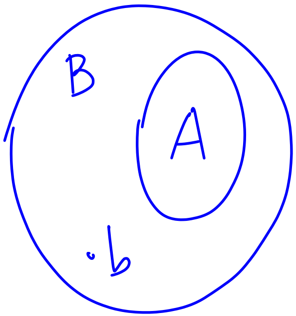


Non esiste un ordinamento per i numeri complessi

Dati due insiemi A e B si dice che A è contenuto in B, se

$\forall a \in A$ è anche $a \in B$

("per ogni")



Si scrive:

"esiste" "tale che"

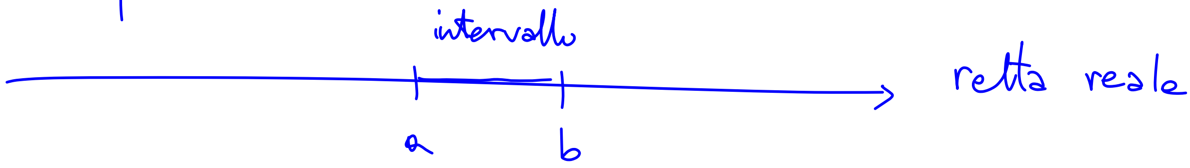
$A \subset B$ se $\exists\, b \in B \mid b \notin A$

oppure

$A \subseteq B$ se può essere $A = B$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Altri esempi di insiemi



$$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

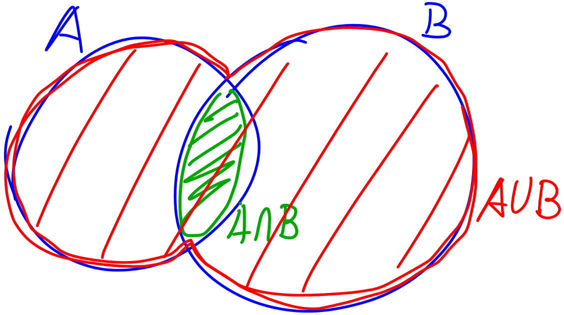
$$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

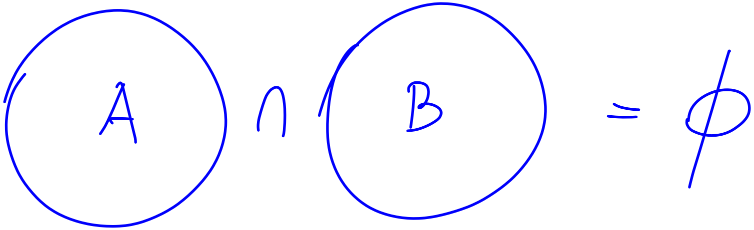
$$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$

$$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$

Unione di insiemi $\quad A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$

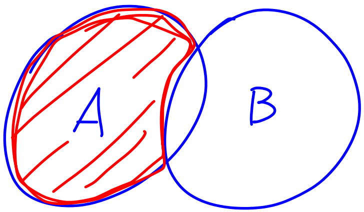
Intersezione di insiemi $\quad A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$





Differenza $A \setminus B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$

↑ privato di B



$A \setminus B$

Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, \ b \in B \}$$

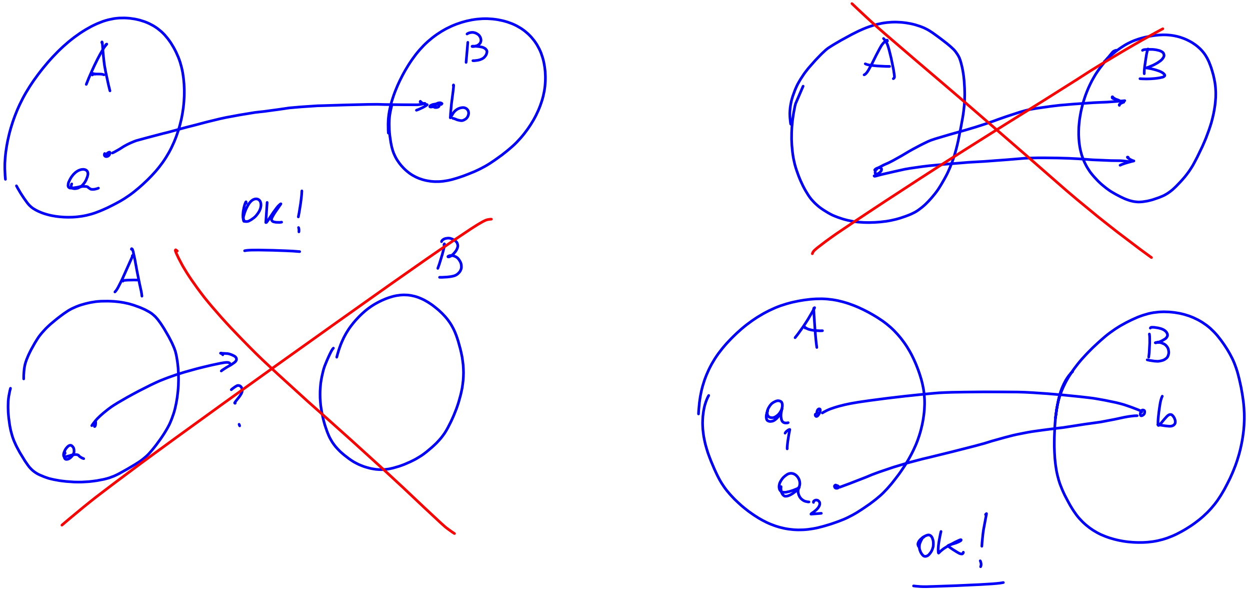
$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Funzioni fra insiemi

$$f : A \to B$$

è una associazione (relazione, corrispondenza, mappa) che associa <u>un</u> elemento di B ad <u>ogni</u> elemento di A

$a \in A$ è mappato in uno e un solo elemento di B

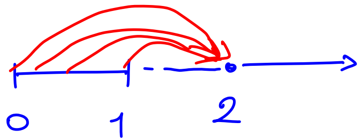


$f : A \longrightarrow B \qquad a \longmapsto b$

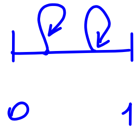
$b = f(a) \qquad A$ = dominio della funzione

Esempi: $A = [0, 1]$

$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \in A \qquad f(x) = 2$

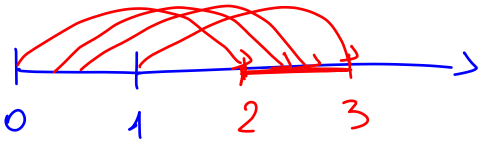


$f(x) = x$



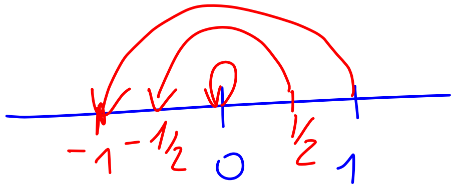
identità

$f(x) = x + 2$



traslazione

$f(x) = -x$

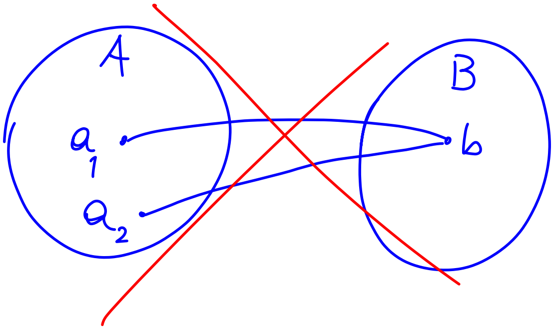


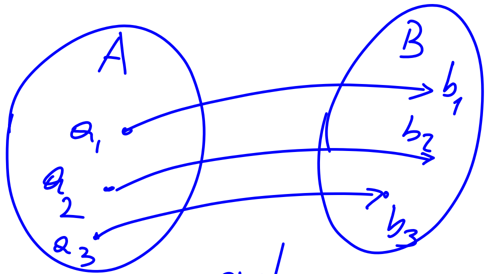
riflessione rispetto all'origine

$f(x) = -x + 2$ $\qquad$ $f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x}$

$y = f(x)$ $\qquad$ $x \in A$ $\qquad$ $y \in B$

Una funzione si dice <u>iniettiva</u> se elementi distinti di A sono mappati in elementi distinti di B

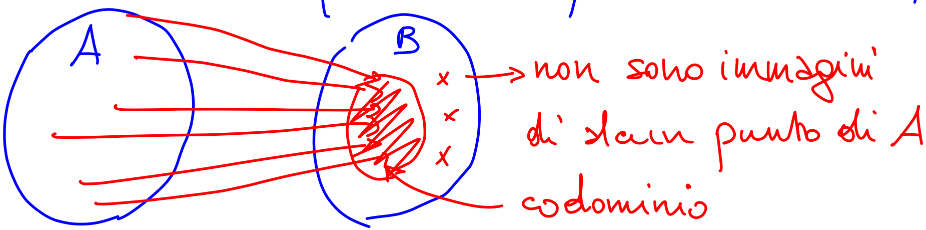




OK!

$b = f(a)$ b si dice 'immagine' di a

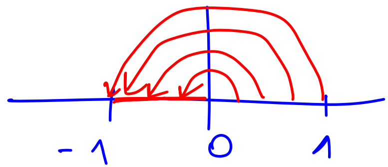
Codominio $= \{ b \in B \,/\, \exists\, a \in A \mid b = f(a) \}$



Una funzione è suriettiva se $B =$ immagine di A

$=$ codominio di A

Es. $f(x) = -x$



$A = [0, 1]$

$B = [-1, 0]$

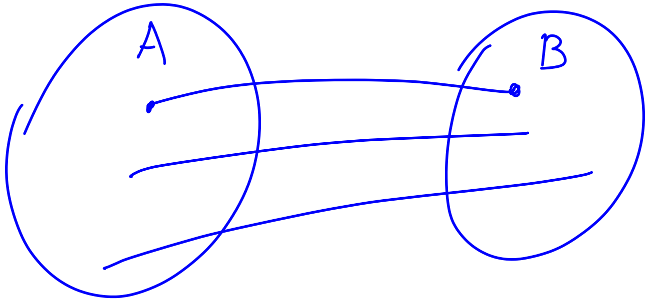
$f : A \to B$

è suriettiva e iniettiva

Se la vedo come $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

allora non è suriettiva

Una funzione iniettiva e suriettiva si dice biunivoca ed è invertibile, perché ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B e e viceversa



Suriettività : $\forall b \in B \ \exists \ a \in A \mid b = f(a)$

iniettività : questo a è unico

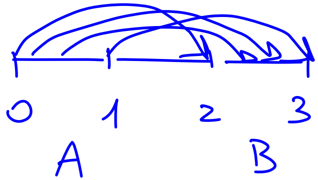
$f^{-1} : B \longrightarrow A$ $\qquad a = f^{-1}(b)$ se

$b = f(a)$

inversa della funzione f

Esempio $f: [0,1] \longrightarrow [2,3]$

$$f(x) = x+2$$



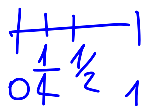
$$y = f(x) = x+2$$

$$x = f^{-1}(y) = \ ? \qquad x = y-2 = f^{-1}(y)$$

$$y = x+2 \qquad y-2 = x+\cancel{2}-\cancel{2} = x$$

$$\Rightarrow$$

$$y = x^2 \qquad A = [0,1] = B$$



$$y = f(x)$$

$$x = \sqrt{y} = f^{-1}(y) : [0,1] \to [0,1]$$

Operazioni $\qquad A = \mathbb{R}$

Somma : $+ \; : \; A \times A \longrightarrow A$

che soddisfa le seguenti proprietà

proprietà associativa $\qquad a + (b+c) =$

$$= (a+b) + c$$

$$2 + (3+7) = 2 + 10 = 12$$

$$\parallel$$

$$(2+3) + 7 = 5 + 7 = 12$$

proprietà commutativa : $\qquad a + b = b + a$

esistenza dell'elemento neutro (0)

$$a + 0 = a \qquad \forall a$$

esistenza dell'opposto : $\forall a \quad \exists\, b \ (= -a)$

$$\mid \quad a + b = 0$$

Prodotto : $A \times A \longrightarrow A$

associativa : $a(bc) = (ab)c$

commutativa : $ab = ba$

$\exists$ elemento neutro (1) $\mid \quad a \cdot 1 = a \quad \forall a$

esistenza del reciproco $b \left(= \frac{1}{a} \quad \circ \quad a^{-1}\right) \quad \forall a \neq 0$:

$$a \cdot b = 1$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$$

Es: $a = 3 \qquad a = -7$

$b = \frac{1}{3} \qquad b = -\frac{1}{7}$

distributiva $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$+ \cdot + = + \qquad + \cdot - = - \qquad - \cdot - \stackrel{?}{=} -$$

$a = -1$

$b = 1$

$c = -1$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$0 = (-1) \cdot (1 - 1) = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -1 - 1 = -2$$

Successioni

Una successione è una funzione

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$0, 1, 2, 3 \dots \longrightarrow f(0), f(1), f(2), \dots$$

$$a_0 \quad a_1 \quad \underset{\nwarrow \text{indice}}{a_2} \quad \dots \quad a_n$$

Es.: $a_n = 3n + 2$ successione aritmetica

$$a_0 = 2 \quad a_1 = 5 \quad a_2 = 8 \quad a_3 = 11$$

$$a_n = 2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ volte}} \qquad 2^0 = 1$$

successione geometrica

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 8$$

Una successione a_n si dice aritmetica se

$a_{n+1} - a_n$ non dipende da n

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad a_{n+1} - \cancel{a_n} + \cancel{a_n} = d + a_n$$

$$\Big[\ a_n = 3n+2 \qquad a_{n+1} - a_n = \underbrace{3\cdot(n+1)+2}_{a_{n+1}} - (3n+2) =$$

$$= \cancel{3n} + 3 + \cancel{2} - \cancel{3n} - \cancel{2} = 3\ \Big]$$

$a_{n+1} = a_n + d$ relazione di ricorrenza

a_0 è quello che è

$$a_1 = a_0 + d \qquad a_2 = a_1 + d = a_0 + d + d = a_0 + 2d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_0 + 2d + d = a_0 + 3d$$

$$a_n = a_0 + nd$$

$$\left[\ a_n = 3n + 2 \qquad d = 3 \qquad a_0 = 2\ \right]$$

Una successione a_n si dice geometrica se

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ non dipende da n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \text{moltiplico} \cdot a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} \cdot \cancel{a_n} = q \cdot a_n \qquad a_{n+1} = q \cdot a_n$$

a_0 è quello che è

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

$n=0$ $\quad a_1 = q \cdot a_0$

$n=1$ $\quad a_2 = q \cdot a_1 = q \cdot q \cdot a_0 = q^2 \cdot a_0$

$n=2$ $\quad a_3 = q\, a_2 = q \cdot q^2 a_0 = q^3 \cdot a_0$

....

$$a_n = q^n a_0$$

$$\left[\ a_n = 2^n \qquad q = 2 \quad a_0 = 1\ \right]$$

Esercizi Interesse semplice, interesse composto

depositate 1000 € in banca
coll'interesse del 5% anno

Quanto guadagno dopo 10 anni nei 2 casi seguenti:

1) prelevo il guadagno ogni anno
2) non lo prelevo

$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$

5% di 1000€ vuol dir

$10\cancel{00} \cdot \frac{5}{\cancel{100}} € = 50 €$

1) g_n = guadagno realizzato dopo n anni

$g_0 = 0 \qquad g_1 = 50$ €

$g_2 = 2 \cdot 50$ € $= 100$ €

$g_3 = 3 \cdot 50$ € $\quad \dots \quad g_n = n \cdot 50$ €

$g_{10} = 10 \cdot 50$ € $= 500$ € $\qquad$ capitale $= 1500$ €

2) chiamiamo S_n la somma depositata in banca dopo n anni

$S_0 = 1000$ € $\qquad S_1 = 1050$ €

nel secondo anno il capitale cresce di

$$\frac{5}{100} \, 1050 \text{ €}$$

Se il capitale è S_n dopo n anni, l'anno successivo cresce di

$$\frac{5}{100} S_n \quad , \text{ quindi}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{5}{100} S_n = S_n\left(1 + \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{100}_{20}}\right) = S_n\left(1 + \frac{1}{20}\right) =$$

$$= S_n\left(\frac{20}{20} + \frac{1}{20}\right) = \underbrace{\frac{21}{20}}_{q} S_n \qquad S_n = q^n S_0$$

$$S_n = \left(\frac{21}{20}\right)^n 1000 \text{ €}$$

$$S_{10} = \left(\frac{21}{20}\right)^{10} \cdot 1000 \text{ €} \underset{\sim}{\overset{\text{circa}}{\simeq}} 1629 \text{ €}$$

Successione di Fibonacci

$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$n=2 \qquad a_2 = a_1 + a_0 = 1$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$a_0, a_1, a_2, a_3,$

Fattoriale di un numero intero n

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n = a_n$$

$$1! = 1 \qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \ \ldots$$

$$a_n = n! \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdots \cancel{n} \cdot (n+1)}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdots \cancel{n}} =$$

$$= n+1$$

$$a_{n+1} = (n+1)\, a_n$$

Permutazioni

Dato un insieme A di n oggetti distinti, si dice permutazione un qualunque loro ordinamento o allineamento

Es.: $A = \{ \underbrace{B, R, V} \}$

permutazioni: BRV BVR

RBV RVB $6 = 3!$

VBR VRB

In generale: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

voglio allineare questi n oggetti

1° oggetto: uno qualunque (n possibilità)

2° oggetto: " " ($n-1$ poss.)

3° " : " " ($n-2$ poss.)

...

totale di possibilità $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$

Matrici "tabelle di numeri"

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{3} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 10 & \frac{3}{4} & 5 \end{pmatrix}$$

$M_{2,4}$ ← 4 colonne

↑ 2 righe

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(a_{ij} \right) \qquad 1 \leq i \leq m \qquad 1 \leq j \leq n$$

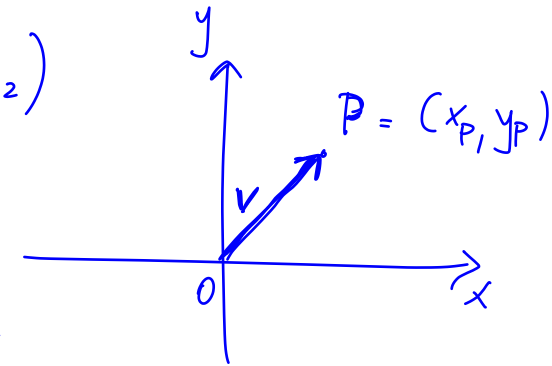
a_{ij} = elementi di matrice

Matrici quadrate : $n = m$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le matrici con 1 riga o 1 colonna si chiamano vettori

$$A_{21} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$



$V = (v_1, \dots\ v_n)$ vettore riga

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$ vettore colonna

Somma di matrici delle stesse dimensioni

$$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$$

$$\left(a_{ij} \right) + \left(b_{ij} \right) = \left(c_{ij} \right)$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3+8 & 7+5 \\ \frac{1}{2}+4 & 2+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Proprietà

associativa $A + (B + C) = (A + B) + C$

commutativa $A + B = B + A$

$\exists$ elemento neutro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$$A + O = A \quad \forall A$$

$\exists$ l'opposto B $(= -A)$ $\mid$ $A + B = O$

$$A = (a_{ij}) \qquad B = -A = (-a_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare una matrice $A = (a_{ij})$ per un numero $\lambda \in \mathbb{R}$

La matrice λA è $\left(\lambda a_{ij} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda A = \frac{1}{2} A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Prodotto di matrici

prodotto "righe per colonne"

vettore riga lungo n $\quad v = (v_1, \dots v_n)$

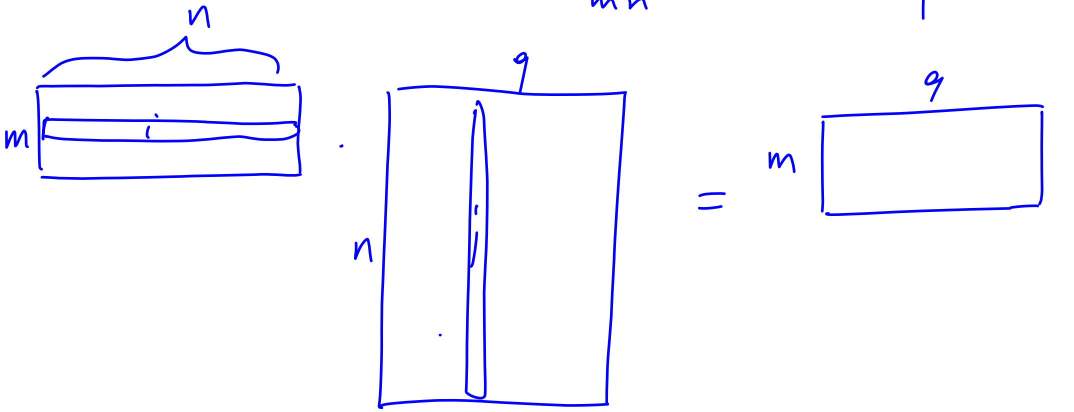
lo vogliamo moltiplicare per un vettore colonna lungo n $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$$v \cdot w = (v_1 \dots v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots v_n \cdot w_n$$

$$v = (2 \quad 3) \qquad w = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$v \cdot w = (2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 7 = 1 + 21 = 22$$

Prodotto di matrici A_{mn} e $B_{nq} = C_{mq}$



$C_{mq} = \Big(c_{ij} =$ prodotto tra l'i-esima riga di A e la j-esima colonna di B $\Big)$

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}} \\ \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}} \end{pmatrix} \qquad B_{nq} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ \vdots \\ \\ b_{n2} \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} b_{1q} \\ \\ \\ b_{nq} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$C_{mq} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots a_{1n} b_{n1} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + \dots a_{1n} b_{2n} \\ \\ c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots a_{in} b_{nj} \\ = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \end{pmatrix}$$

Somma di $a_{ik} b_{kj}$ con k che varia da 1 a n, cioè

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots a_{in} b_{nj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{7} \\ 5 & \boxed{9} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 25 \\ 29 & 57 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Il prodotto tra matrici <u>non</u> è commutativo

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 24 & 34 \\ 32 & 46 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ non ha senso se $q \neq m$

$$B_{nq} \cdot A_{mn}$$

Valgono la proprietà associativa

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

e la proprietà distributiva

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$\exists$ l'elemento neutro $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

diagonale

$$\mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Se $B = \mathbb{1}$ vuol dire

$e = 1 \quad f = 0$

$g = 0 \quad h = 1$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} ae + \cancel{bg} & \cancel{af} + bh \\ ce + \cancel{dg} & \cancel{cf} + dh \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

Esistenza della matrice inversa

Data A, $\exists\, B \mid A \cdot B = \mathbb{1} = B \cdot A$?

matrice quadrata

Non sempre

$$A \cdot B = 0 \quad \underset{\text{non implica}}{\not\Longrightarrow} \quad A = \mathbb{0} \ \text{o} \ B = \mathbb{0}$$

$$a \cdot b = 0 \quad \text{(numeri)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{0}$$

L'inversa A^{-1} di una matrice quadrata A (cioè quella matrice A^{-1} tale che $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$) esiste se e solo se $\det A$ (il determinante di A)

non è zero

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det A = ad - bc$$

$$\lambda = \frac{1}{ad-bc}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \lambda B$$

$$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} = \lambda B \cdot A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

Applicazioni: sistemi di equazioni lineari

$ax = b$ è un'equazione lineare

x = incognita

a, b sono dati

$a \neq 0 \quad x = \frac{b}{a}$

lineare = l'incognita compare al massimo elevata alla potenza 1 $(\cancel{x^2}, \cancel{x^3}, \cancel{x^4} \dots)$

Se $a = 0$ e $b \neq 0$

è assurda $(0 = b)$

incognite $x_1, \dots, x_n$

$a_1, \dots a_n, b$ numeri dati

un'equazione lineare ha la forma

$\cancel{x_1 \cdot x_2}, \cancel{x_3 \cdot x_2}$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots a_n x_n = b$$

Sistema di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = v_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = v_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = v_m \end{cases}$$

$$\boxed{AX = V}$$

$$A = \left(a_{ij} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = V \qquad V = \text{termine noto}$$

Se conoscete A^{-1} avete risolto il sistema:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\mathbb{1}} \cdot X = A^{-1} V = X$$

$$X = A^{-1} \cdot V$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots \qquad a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$eq_1 = 0 \qquad eq_1 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n - V_1)$

$eq_2 = 0 \qquad eq_2 = (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n - V_2)$

$\lambda \neq 0 \qquad \lambda eq_1 = 0$

$$\lambda a_{11}x_1 + \lambda a_{12}x_2 + \dots + \lambda a_{1n}x_n - \lambda V_1$$

$$eq_1 = 0 \iff \lambda eq_1 = 0$$

se e solo se

$$\begin{cases} eq_1 = 0 \\ eq_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} eq_1 = 0 \\ eq_2 + \lambda eq_1 = 0 \end{cases}$$

λ qualunque

Riduzione di una matrice (metodo di Gauss)

Data una matrice A qualunque facciamo le seguenti operazioni

i) moltiplichiamo tutti gli elementi di una riga per $\lambda \neq 0$

ii) scambiamo due righe

iii) sommiamo (termine a termine) a una riga un'altra riga moltiplicata per $\lambda \neq 0$

Usando questo metodo si può sempre ridurre una matrice alla forma seguente:

$$\begin{pmatrix} a & x & x & x & x & \cdots \\ 0 & b & x & x & x & \\ 0 & 0 & c & x & x & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d & x & \cdots \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

tutti zeri sotto la diagonale

Se la matrice è quadrata e la forma

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

si dice matrice triangolare

$$\det T = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale

Le operazioni i) ii) iii) agiscono sul determinante come segue:

i) moltiplica il determinante per λ

ii) cambia il segno del determinante

iii) lo lascia invariato

Per calcolare l'inversa di una matrice quadrata A_{nn} considero la matrice rettangolare

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{nn} & \mathbb{1}_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & 0 & 0 & 1 & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \vdots & \vdots & & \ddots \end{array} \right)$$

e uso le operazioni i) ii) e iii) per ridurla alla forma

$$\left(\mathbb{1}_{nn} \;\vdots\; B_{nn} \right)$$

allora $B \cdot A = \mathbb{1}$

e $A \cdot B = \mathbb{1}$

cioè $B = A^{-1}$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Considero $X = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Voglio arrivare a

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e & f \\ 0 & 1 & g & h \end{pmatrix}$$

Supponiamo che $\det A = ad - bc \neq 0$

allora non è possibile che a e c siano entrambi 0

Possiamo assumere $a \neq 0$ a meno di scambiare le righe

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

i) moltiplichiamo tutti gli elementi della prima riga per $\frac{1}{a}$

$$X \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) sottraggo alla 2^A riga la 1^A moltiplicata per c

$$1^A \longrightarrow 1^A \qquad 2^A \longrightarrow 2^A - c \cdot 1^A$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & d - \frac{cb}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A =$
$= ad - bc$

$\frac{\det A}{a} = d - \frac{bc}{a}$

proprietà distributiva

$\frac{1}{a}(ad - bc)$

$= \frac{ad}{a} - \frac{bc}{a}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{\det A}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

i) divido la 2^a riga per $\dfrac{\det A}{a}$

(o la moltiplico per $\dfrac{a}{\det A}$)

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \dfrac{b}{a} & \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{c}{\cancel{a}}\dfrac{\cancel{a}}{\det A} & \dfrac{a}{\det A} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a}\left(-\frac{c}{\det A}\right) = \frac{1}{a} + \frac{bc}{a \det A}$$

iii) $1^A \longrightarrow 1^A - \dfrac{b}{a} \cdot 2^A \qquad 2^A \to 2^A$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dfrac{d}{\det A} & -\dfrac{b}{\det A} \\ 0 & 1 & \dfrac{-c}{\det A} & \dfrac{a}{\det A} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{bc}{a \det A} = \frac{\det A + bc}{a \det A} =$$

$$= \frac{ad - \cancel{bc} + \cancel{bc}}{a \det A} = \frac{\cancel{a} d}{\cancel{a} \det A} = \frac{d}{\det A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad : \underline{\text{ok!}}$$

Risolvere un sistema di equazioni lineari

Esercizio

$$\begin{cases} 1\cdot x + 2y - 4z = 0 \\ 3x + 0\cdot y + 6z = -1 \\ 4x + 4y - 6z = 1 \end{cases} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$AX = V$$

1° modo per risolverlo: trovare A^{-1}

(quella matrice tale che $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$)

$$A X = V$$

moltiplico per A^{-1}

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot V$$

$$\mathbb{1} \cdot X = X = A^{-1} \cdot V$$

2° modo: considero

$$\left(A \;\vdots\; V \right)$$

la manipolo (i) ii) e iii)) fino a

$$\left(\mathbb{1} \;\vdots\; \begin{matrix} s \\ o \\ l \\ u \\ z. \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 \\ 4 & 4 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$2^A \longrightarrow 2^A - 3 \cdot 1^A \qquad 3^A \longrightarrow 3^A - 4 \cdot 1^A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 18 & -1 \\ 0 & -4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-6 + (-4) \cdot (-4)$$

$$-4 + x(-6) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$3^A \longrightarrow 3^A - \frac{2}{3} \cdot 2^A$$

$$-4 \longrightarrow -4 + \frac{2}{\cancel{3}}(+\cancel{6}^{\,2}) = -4 + 4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5/3 \end{array}\right)$$

$$10 - \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{18}^{6} = -2$$

$$1 + \frac{2}{3} \cdot (+1) = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$1^A \longrightarrow 1^A + \frac{1}{3} \cdot 2^A$$

$$2 \longrightarrow 2 + x(-6) = 0$$

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$-4 + \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{18}^{6} = 2$$

$$1^A \longrightarrow 1^A + 3^A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & -6 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$2^A \to 2^A + 9 \cdot 3^A$ $\qquad 18 + x(-2) = 0 \qquad x = 9$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & -6 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 5/3 \end{pmatrix} \qquad -1 + 9 \cdot \frac{5}{3} = \frac{42}{3}$$

$2^A \to -\frac{1}{6} \cdot 2^A \qquad 3^A \to -\frac{1}{2}\, 3^A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{7}{3}$$

$$z = -\frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2y - 4z = 0 \\ 3x + 0 \cdot y + 6z = -1 \leftarrow \\ 4x + 4y - 6z = 1 \end{cases}$$

$$x + 2y - 4z = \frac{4}{3} + 2\left(-\frac{7}{3}\right) + \cancel{4}^{2}\left(\frac{+5}{\cancel{6}_{3}}\right) =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{14}{3} + \frac{10}{3} = 0$$

$$3x + 6z = \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} + \cancel{6}\left(-\frac{5}{\cancel{6}}\right) = -1$$

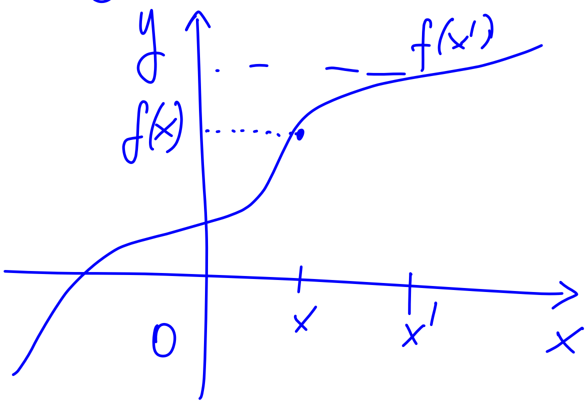
Funzioni : $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$D \subset \mathbb{R}$ $\qquad D =$ dominio

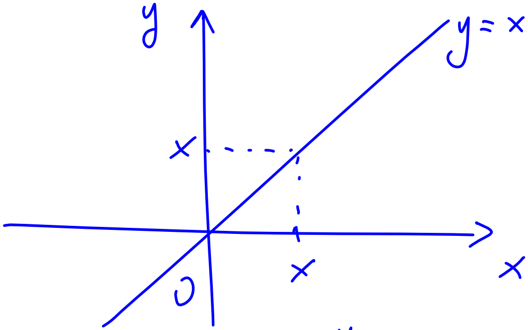
$y = f(x)$ $\qquad x =$ variabile indipendente

$\qquad\qquad\quad y =$ variabile dipendente

L'insieme dei punti con coordinate cartesiane $(x, y) = (x, f(x))$ definisce il grafico della funzione



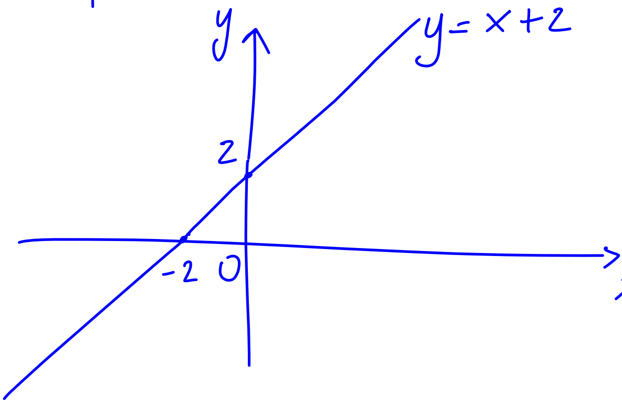
$y = x$



diagonale

$D = \mathbb{R}$

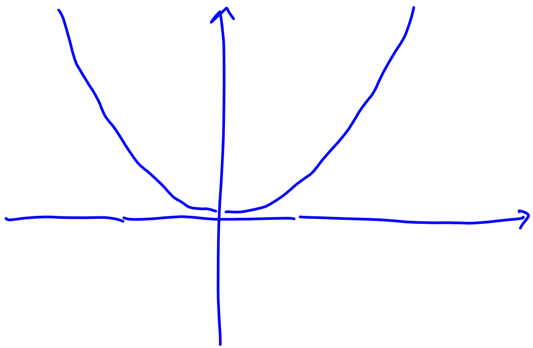
$y = x + 2$



quella di sopra traslata di 2 verso l'alto

$D = \mathbb{R}$

$y = x^2$



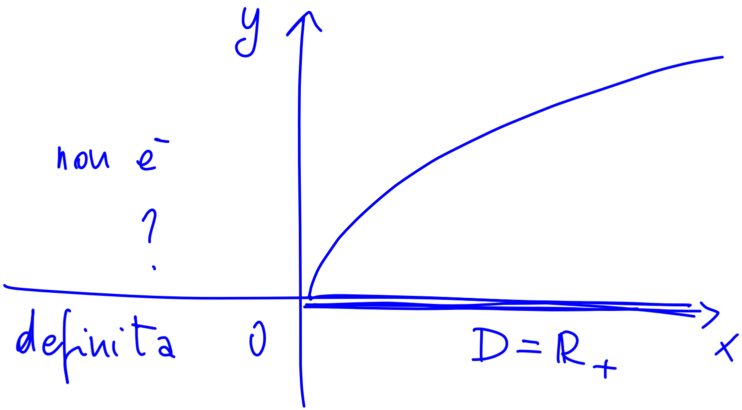
parabola

$D = \mathbb{R}$

$y = \sqrt{x}$ $\qquad f : D \to \mathbb{R}$

$D \subset \mathbb{R}$ $\qquad D = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$



$f(x) = \sqrt{x-3}$ $\qquad D = ?$ $\qquad x - 3 \geqslant 0$

$D = [3, \infty)$ $\qquad x \geqslant 3$ $\qquad$ "∞" = infinito

$y = \frac{1}{x}$ $D = ?$ $x \neq 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

"privato di"

$y = \sqrt{x(x-2)}$ $D = ?$

argomento ≥ 0

chiedo $x(x-2) \geq 0$

$a \cdot b \geq 0$

inutile

1) $\cancel{x \geq 0}$ $x \geq 2$

2) $x \leq 0$ $\cancel{x \leq 2}$

- $+ \cdot + = +$

$+ \cdot - = - \cdot + = -$

- $- \cdot - = +$

1) $x \geq 2$

2) $x \leq 0$

$D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f(x) = \sqrt{(-x)\cdot(x+2)} \qquad D = ?$$

$$(-x)\cdot(x+2) \geq 0$$

1) $-x \geq 0 \qquad x+2 \geq 0 \iff x \leq 0 \qquad x \geq -2 \quad (*)$

2) $-x \leq 0 \qquad x+2 \leq 0 \iff x \geq 0 \qquad x \leq -2$

impossibile

disuguaglianze: se $a \geq b$

allora $-a \leq -b$

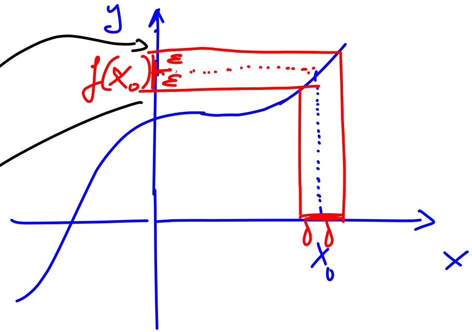
Solo la 1) è accettabile $\quad -2 \leq x \leq 0$

$$D = [-2, 0]$$

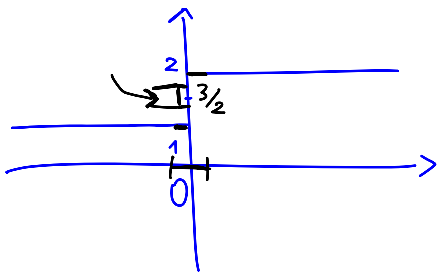
Continuità

$f(x_0)+\varepsilon$

$f(x_0)-\varepsilon$



"non ha salti o interruzioni"



Una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in D$ se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x<0 \\ 2 & \text{per } x>0 \\ \frac{3}{2} & \text{per } x=0 \end{cases}$$

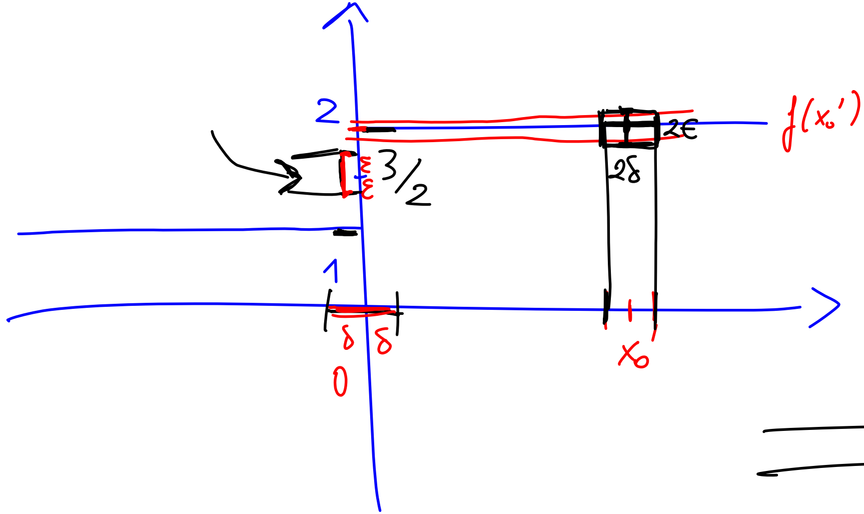
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

"arbitrariamente piccolo"

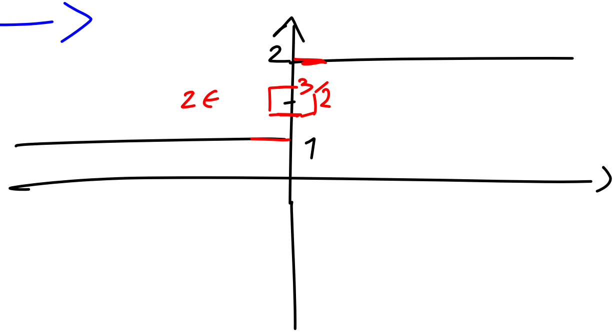
piccolo o no

"intorno di x°"

$$-\varepsilon + f(x_0) < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$



questa funzione è discontinua in $x_0 = 0$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x<0 \\ 2 & \text{per } x>0 \\ \frac{3}{2} & \text{per } x=0 \end{cases}$$

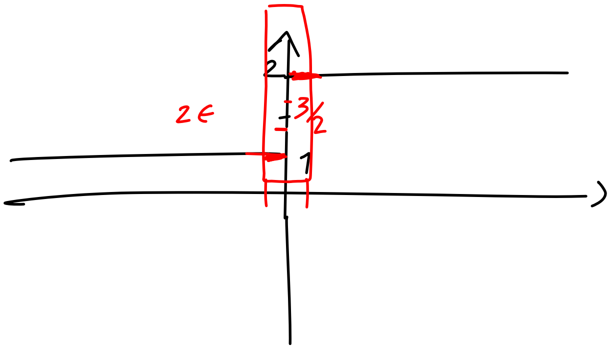
x_0 $\qquad f(x_0) = \frac{3}{2}$

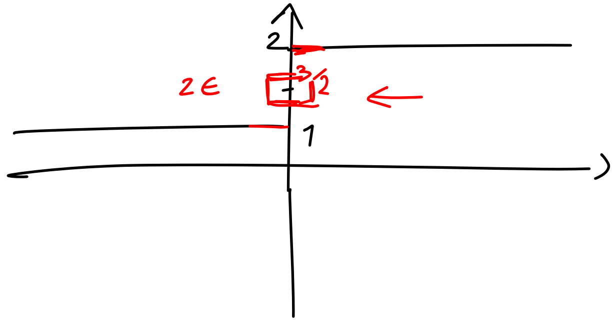
$\nexists\ \delta > 0$ colle proprietà necessarie

$\varepsilon = \frac{1}{1000\ldots}$

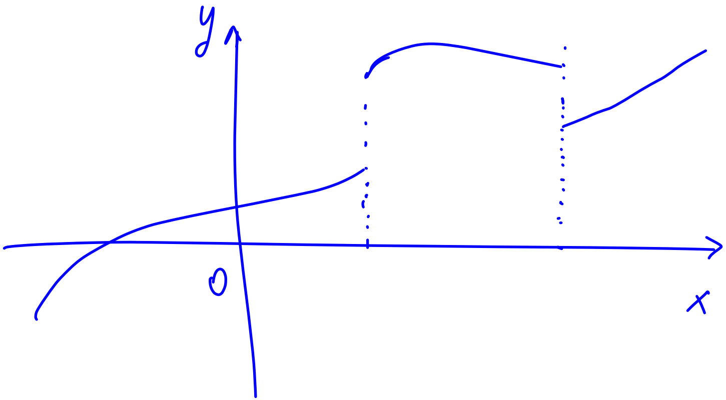
$f(x_0) - \varepsilon = \frac{3}{2} - \frac{1}{1000\ldots}$

$f(x_0) + \varepsilon = \frac{3}{2} + \frac{1}{1000\ldots}$





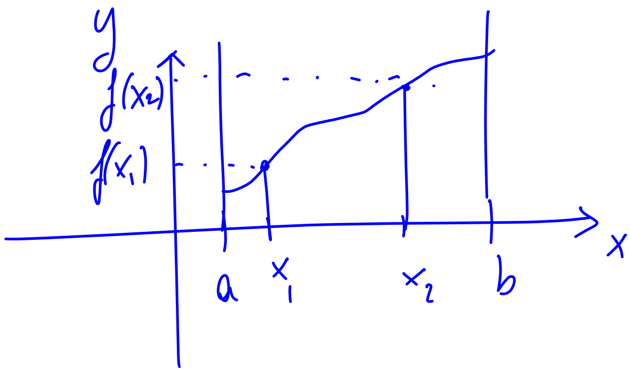
Funzione continua a tratti: è una funzione continua tranne che in un numero finito di punti



Funzioni crescenti e decrescenti

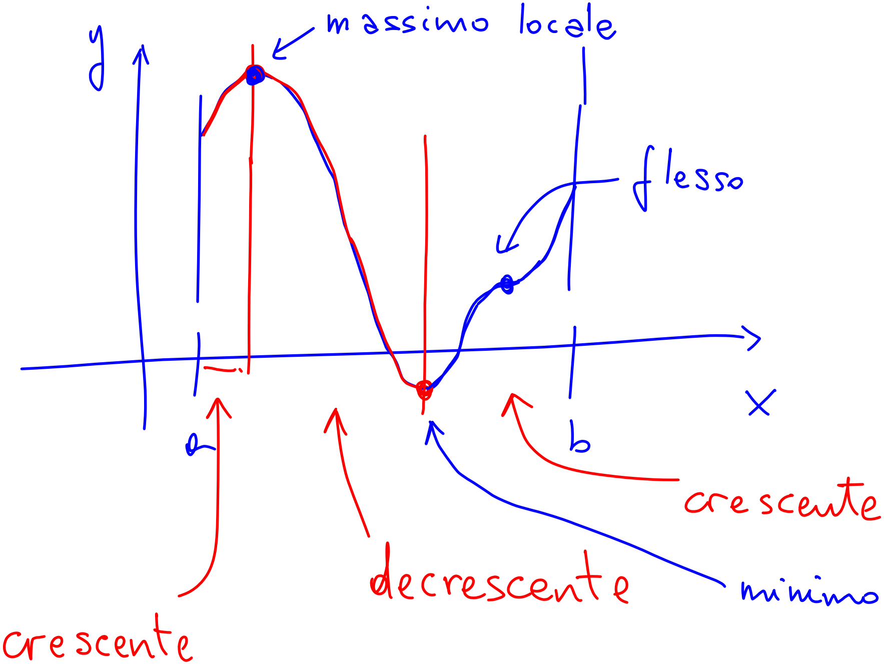
$f(x)$ è crescente in $[a, b]$ se $\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$



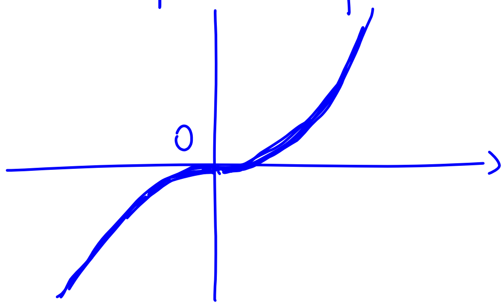
è decrescente se $\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$

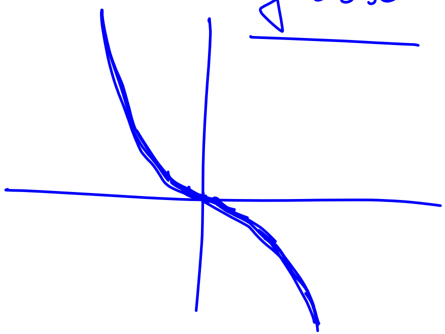
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$



Punti stazionari: sono i punti $\bar{x}$ tali che $\nexists$ intorno di $\bar{x}$ dove la funzione è o crescente o decrescente (massimi o minimi locali)

Terzo tipo di punto stazionario: flesso





Funzioni polinomiali, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche

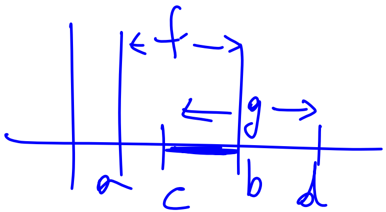
Operazioni tra funzioni: algebriche, composizione, inversa

$y = f(x)$ $\qquad f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = g(x)$ $\qquad g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$

Somma: $\quad y = f(x) + g(x) \qquad f+g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$

$a < c < b < d$



$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f+g : [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Prodotto : $y = f(x) \cdot g(x)$ $\qquad f \cdot g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$

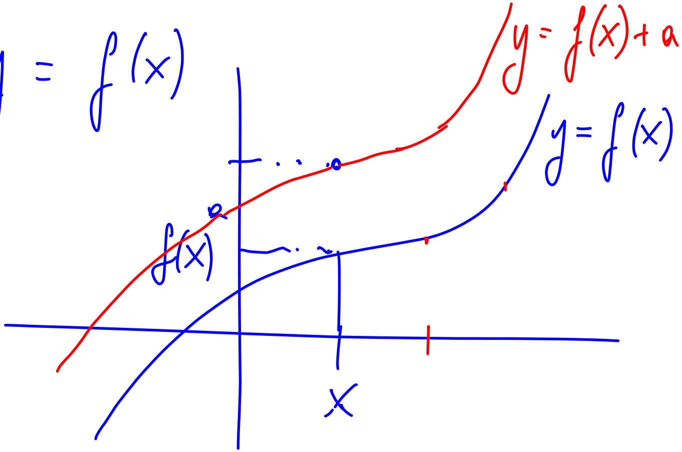
Quoziente : $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad \dfrac{f}{g} : D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Esempio : $f(x) = x \qquad g(x) = x$

$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = \mathbb{R}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{x}$ $\qquad \dfrac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = f(x)$



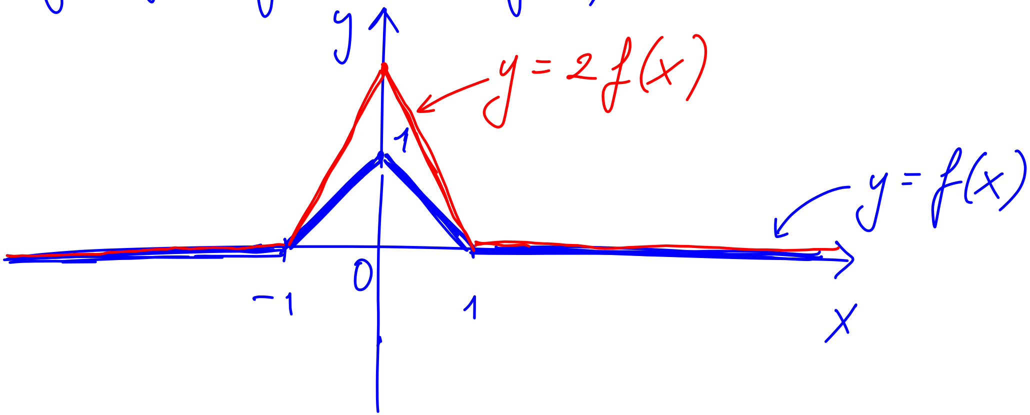
$g(x) = a > 0$ costante

$$y = f(x) + g(x) =$$
$$= f(x) + a$$

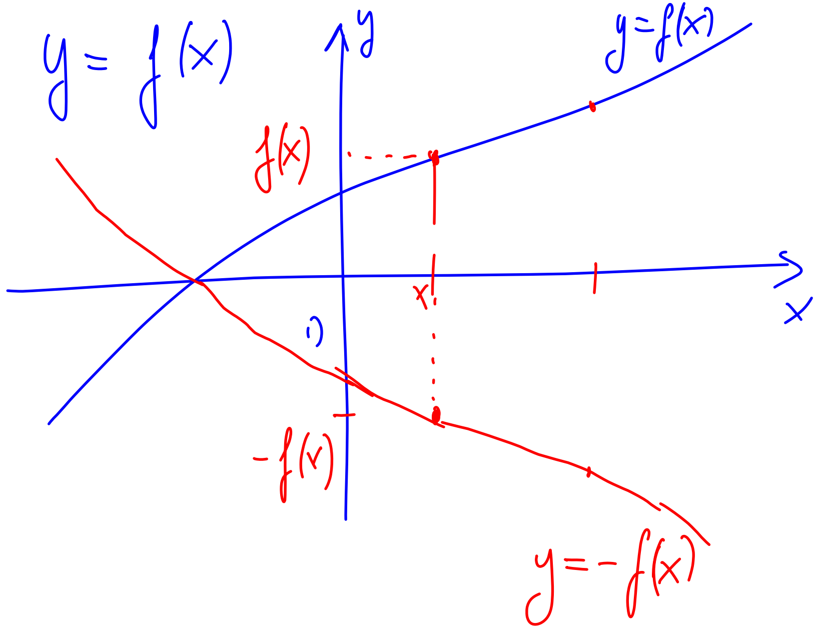
traslazione

$$y = f(x) \cdot g(x) = a f(x)$$

$a = 2$ fattore di scala



$y = f(x)$



$y = g(x) = -1$

$y = f(x) \cdot g(x) =$

$= -f(x)$

riflessione rispetto all'asse x

Composizione di funzioni

$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = f(x)$

$g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = g(x)$

$f \circ g$

$y = f(g(x))$

Esempio $\quad y = f(x) = \sqrt{x} \qquad D_f = \mathbb{R}_+$

$$y = g(x) = x+2 \qquad D_g = \mathbb{R}$$

$$y = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+2}$$

$$f(g) = \sqrt{g} \qquad f \circ g : [-2, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$g \circ f$

$$y = g(f(x)) = f(x) + 2 = \sqrt{x} + 2$$

$$g \circ f : \mathbb{R}_+ \qquad f \circ g \neq g \circ f$$

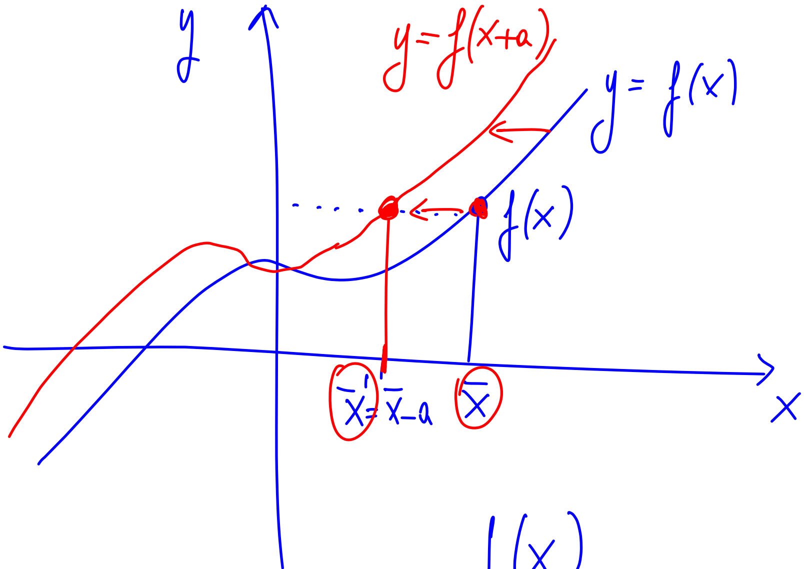
La composizione di funzioni NON è commutativa

Esempio: $y = f(x)$ $\quad y = g(x) = x + a$ $\quad a = \text{costante} > 0$

$f \circ g$

$y = f(g(x)) = f(x+a)$

traslazione (in x)



$f(x)$

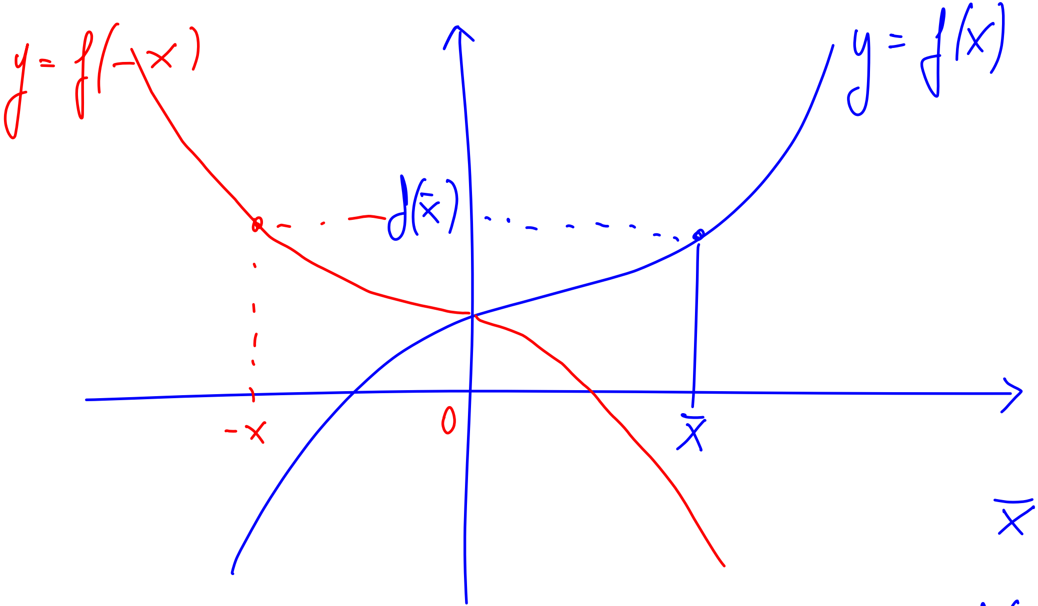
Quale punto $\bar{x}'$ è tale che $f(\underbrace{\bar{x}'+a}) = f(\bar{x})$?

$\bar{x}' + a = \bar{x} \qquad \bar{x}' = \bar{x} - a$

$\underline{f(x+a)}$ calcolata in $\underline{\bar{x}'}$ è $f(\bar{x}'+a) = f(\bar{x} - \cancel{a} + \cancel{a}) = f(\bar{x})$

$y = f(x) \qquad y = g(x) = -x$

$y = f(g(x)) = f(-x)$



$y = f(x) \qquad y = f(-x)$

$\bar{x} \qquad \bar{x}' = -\bar{x}$

$f(\bar{x}) = f(-\bar{x}')$

Funzione inversa $\qquad y = f(x)$

cerco (se possibile) di risolvere questa come un'equazione per x data y

$x = f^{-1}(y) \qquad f^{-1}$ = funzione inversa

Poi scambio di nome x e y:

$y = f^{-1}(x)$

Esempio: $\quad y = x^2 = f(x) \qquad D_f = \mathbb{R}$

$y = x^2 \qquad$ Dato y, quale x è tale che $y = x^2$?

Distinguiamo due casi:

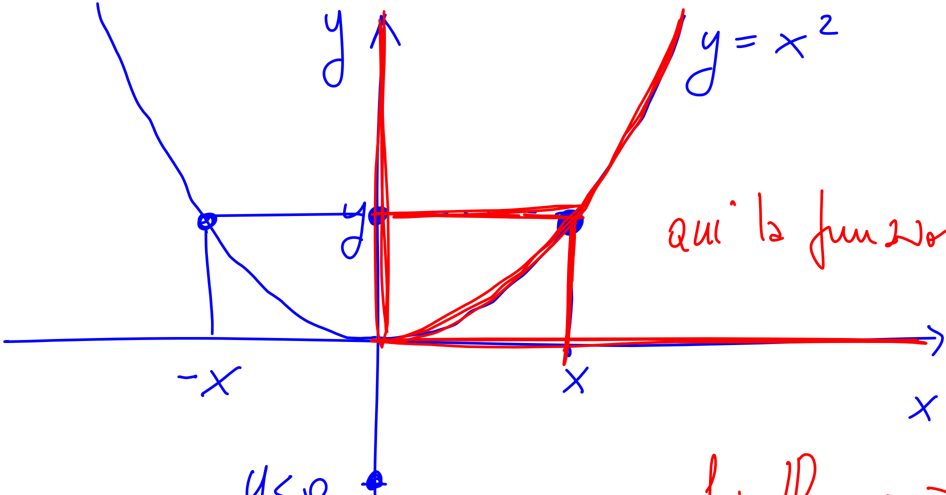
1) $y<0$: nessuna x è tale che $y=x^2$

2) $y>0$: $x=\sqrt{y}$ soddisfa $y=x^2=$
$=(\sqrt{y})^2=y$

anche $x=-\sqrt{y}$ soddisfa $y=x^2=$
$=(-\sqrt{y})^2=y$

Due funzioni inverse (scambio $x \leftrightarrow y$)

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\\ -\sqrt{x}\end{cases}$$



qui la funzione è biettiva

$y<0$

non è associato a nessuna x dal grafico

$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad y = x^2$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad y = \sqrt{x}$$

<u>Verifica</u>: f^{-1} è tale $f \circ f^{-1} =$ identità

Deve valere $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

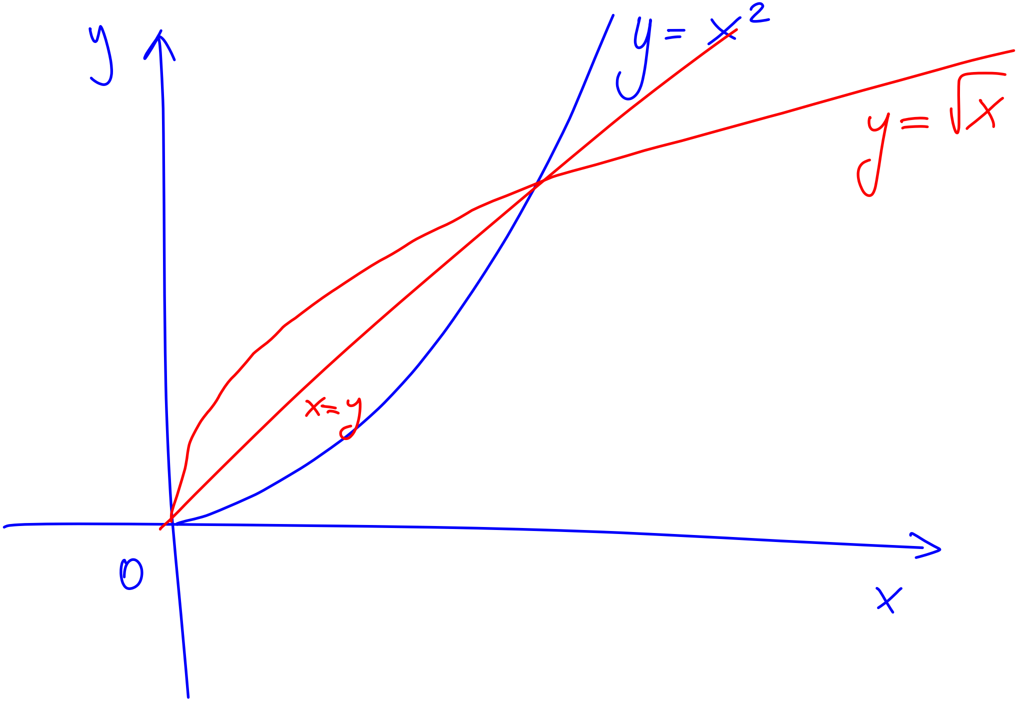
$$y = x^2 = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$y = \sqrt{x} = f^{-1}(x) = g(x) \qquad f \circ g = g \circ f$$

$$y = f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^2 =$$

$$= (\sqrt{x})^2 = x$$

$$y = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x$$



il grafico della funzione inversa è il riflesso del grafico della funzione di partenza rispetto alla diagonale $x = y$

Funzioni elementari

potenze $\quad \underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{esponente}}{b}} = \underbrace{a \cdot \; \cdots \; a}_{b \text{ volte}} \quad (b \in \mathbb{N})$

a^b ha senso (si può definire) se

$$\longrightarrow \begin{cases} a > 0 & b \in \mathbb{R} \\ a = 0 & b > 0 \qquad a^b = 0 \\ a < 0 & b = \dfrac{m}{n} \qquad m, n \in \mathbb{Z} \\ & \qquad\qquad n = \text{dispari} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N} \quad a > 0$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \; \cdots \; a}_{n \text{ volte}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \cdots a}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

$a^{\frac{1}{n}}$ = radice n-esima di a, cioè quel $c > 0$ tale che $c^n = a$

$$8^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \text{perché} \quad 2^3 = 8$$

$m, n \in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$$

Proprietà : $\underline{a^{b+c} = a^b \cdot a^c}$ $a > 0$

$$2^{10} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}\cdot\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 2^3 \cdot 2^7$$

$$= 2^{3+7}$$

$$\underline{a^{b \cdot c} = \left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b}$$

$$2^{10} = 2^{2 \cdot 5} = \left(2^2\right)^5 = (2 \cdot 2)^5 =$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2)$$

$a^0 = 1 \quad \forall a > 0$

$a^b = a^{b+0} = a^b \cdot a^0 \implies a^0 = 1$

a^0 è l'elemento neutro della moltiplicazione, cioè 1

a^b ci permette di costruire due funzioni

$y = a^x$ a dato : funzione esponenziale

$y = x^b$ b dato : funzione potenza

$y = x^b$ $\qquad b = 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

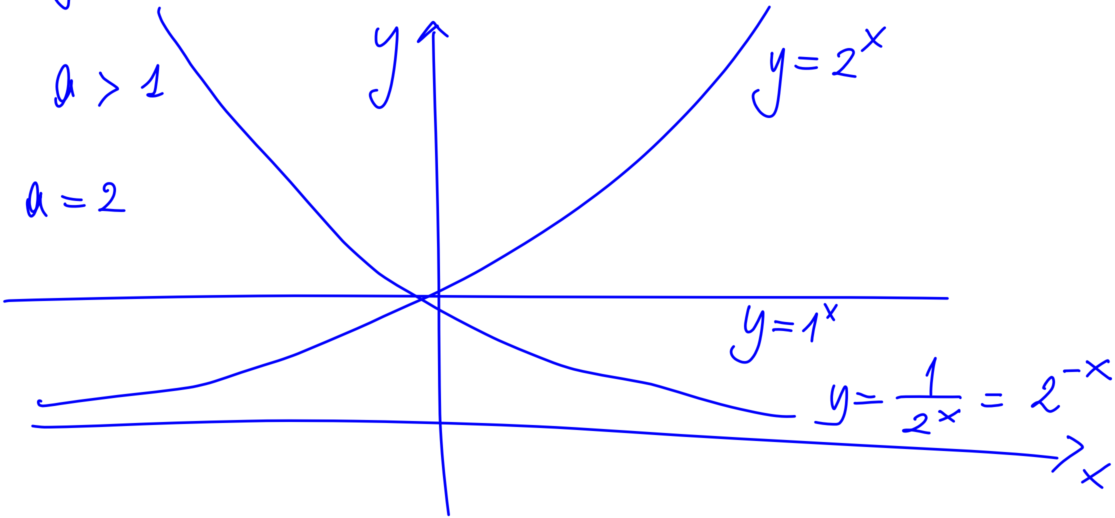
$y = x^2 \qquad y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

...

$y = a^x$ funzione esponenziale

$a > 1$

$a = 2$



$a = 1$: $\quad y = 1^x = 1$

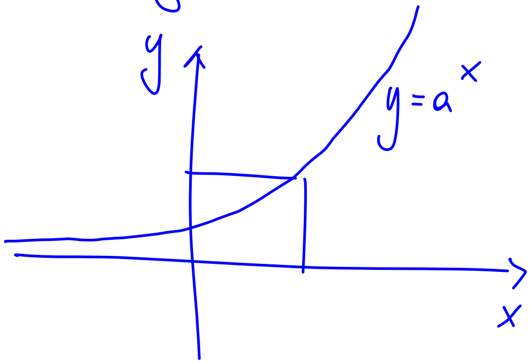
$a < 1$: decrescita esponenziale

Costante di Eulero $e = 2.718\ldots$

base canonica per la funzione esponenziale

$$y = e^x$$

Logaritmo : l'inversa della funzione esponenziale



$a > 1$

$$y = a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y = a^x \quad \text{vuol dire} \quad x = \log_a y$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\log_2 8 \stackrel{?}{=} 3$

$8 = 2^?$

$\log_2 1024 = 10$

$2 \cdot 2 = 4$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

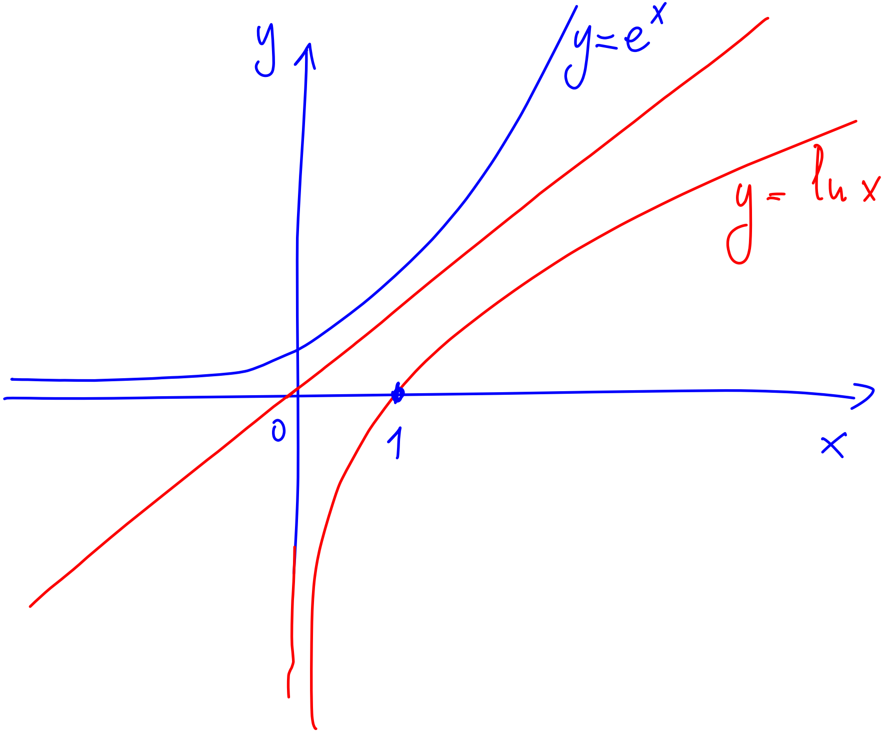
$2^{10} = 1024$

$2, 4, 8, 16, 32, 64,$
$128, 256, 512, 1024$

$\log_e$: logaritmo naturale $\ln$

$\log_{10}(1\text{miliardo}) = \log_{10} 10^9 = 9$

mille	10^3	Kilo
1 milione	10^6	Mega
1 miliardo	10^9	Giga



$$y = a^x$$

$$e^{\ln a} = a$$

$$y = f(x) = e^x$$

$$y = \underline{\ln x = f^{-1}(x)}$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\overset{\parallel}{e^{f^{-1}(x)}} = e^{\ln x} = x \leftarrow$$

$$f^{-1}(f(x)) = x = \ln f(x) = \ln e^x$$

$$x = \ln e^x = \log_e e^x$$

$$x = e^{\ln x}$$

$$\log_a 1 = ? = 0$$

$$a^? = 1$$

$$\log_a a = 1 \qquad a^{?} = a \qquad a^1 = a$$

$$\begin{cases} \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \\ \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \end{cases}$$

$$\boxed{a^{b+c} = a^b \cdot a^c}$$

$$\log_a (b \cdot c) = s \qquad \log_a b = t \qquad \log_a c = u$$

$$s = t + u$$

$$b \cdot c = a^s \qquad b = a^t \qquad c = a^u$$

$$a^s = b \cdot c = a^t \cdot a^u = a^{t+u} \qquad \underline{\underline{s = t + u}}$$

$$\log_a \frac{1}{b} + \log_a b = \log_a \left(\frac{1}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b}\right) = \log_a 1 = 0$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$\boxed{a^{b \cdot c} = (a^b)^c = (a^c)^b}$$

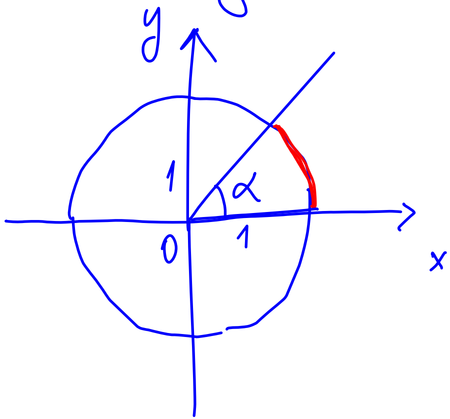
Cambio di base

$$y = \underbrace{\log_a x}_{s} = \underbrace{\left(\log_a b\right)}_{t} \cdot \underbrace{\log_b x}_{u} \qquad s = t \cdot u$$

$$x = a^s \qquad a^t = b \qquad b^u = x$$

$$a^s = x = b^u = (a^t)^u = a^{t \cdot u} \Rightarrow s = t \cdot u$$

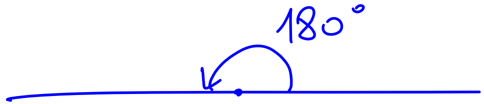
Funzioni trigonometriche



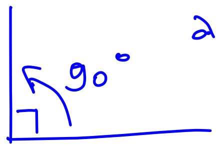
α si può misurare in gradi

360° : angolo giro

180° : angolo piatto

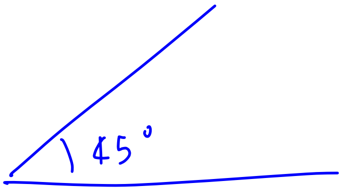


90° :



angolo retto

45°



misura dell'angolo in radianti : lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio 1 sottesa dall'angolo

angolo giro: lunghezza della circonferenza di raggio 1 $= 2\pi$

$$360^\circ \longleftrightarrow 2\pi$$

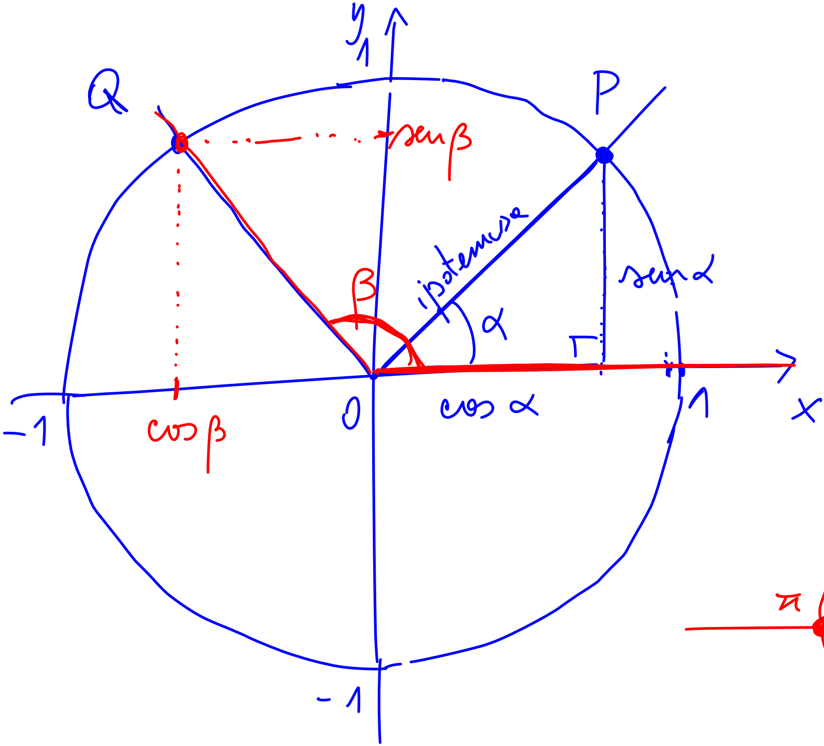
$$180^\circ \longleftrightarrow \pi$$

$$90^\circ \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}$$

angolo in gradi =

$$= \frac{360^\circ}{2\pi}(\text{angolo in radianti})$$

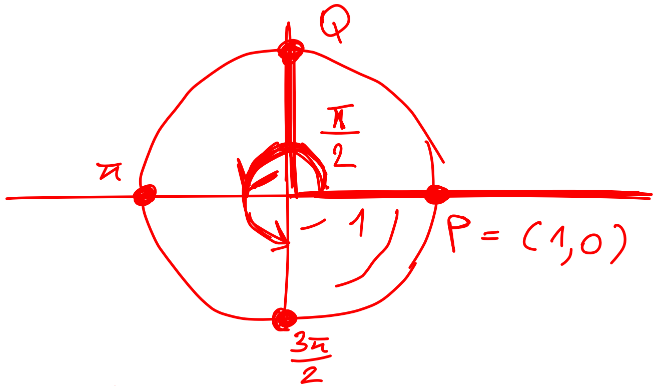
$$\text{angolo in radianti} = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot (\text{angolo in gradi})$$



$P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

$Q = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$

semiasse x positivo



$\operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \operatorname{sen}\pi = 0$

$\cos 0 = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cos\pi = -1$

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1 = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

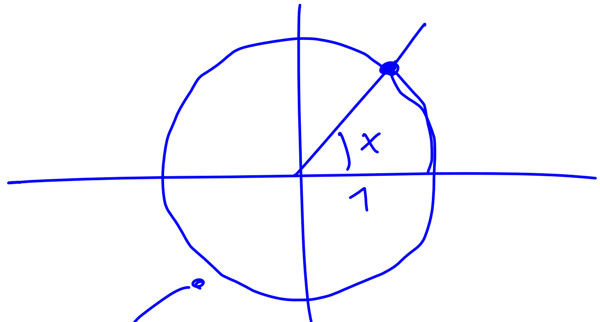
$y = \operatorname{sen} x$ $\qquad\qquad$ $y = \cos x$

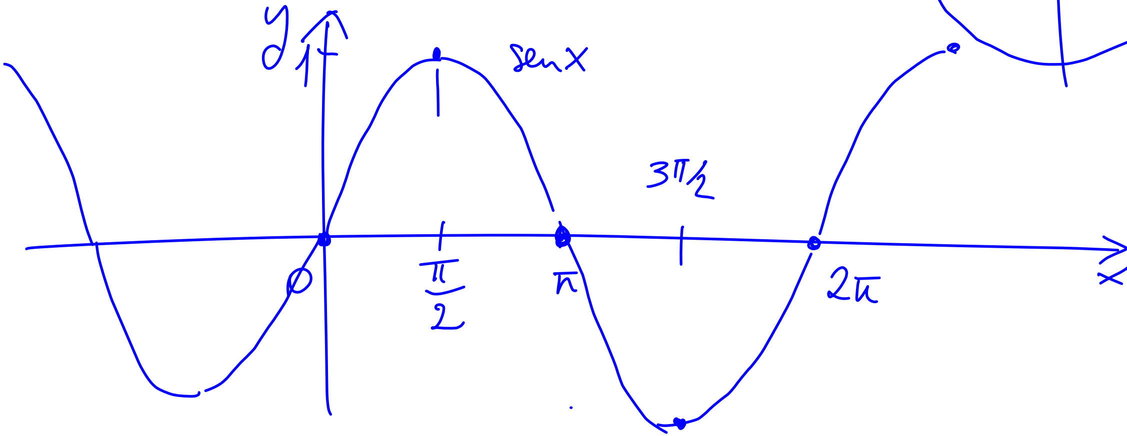
$D = \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $D = \mathbb{R}$

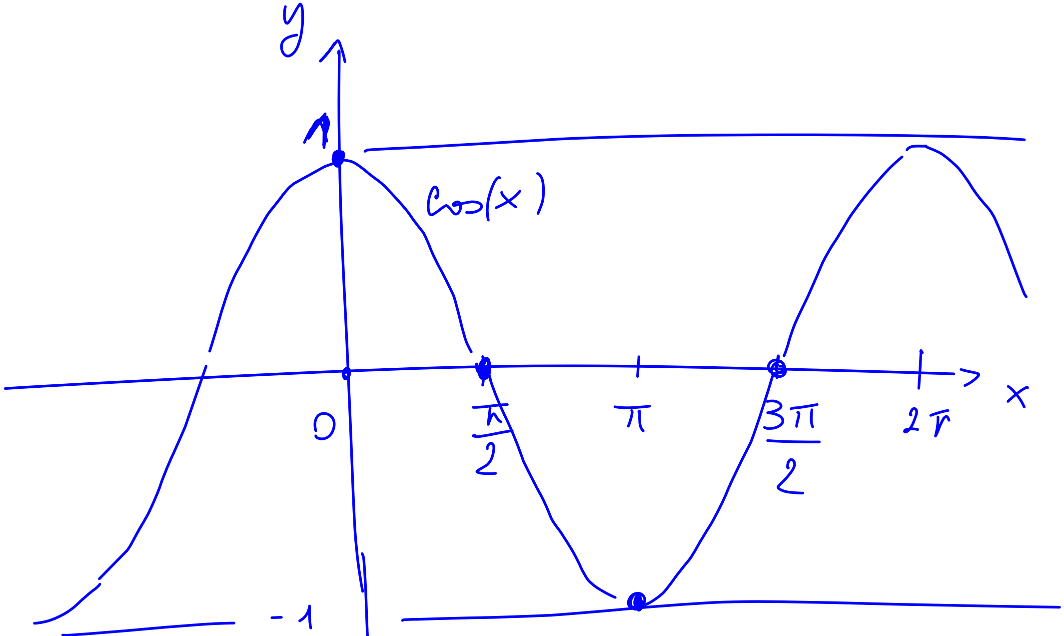
sono funzioni periodiche di periodo 2π

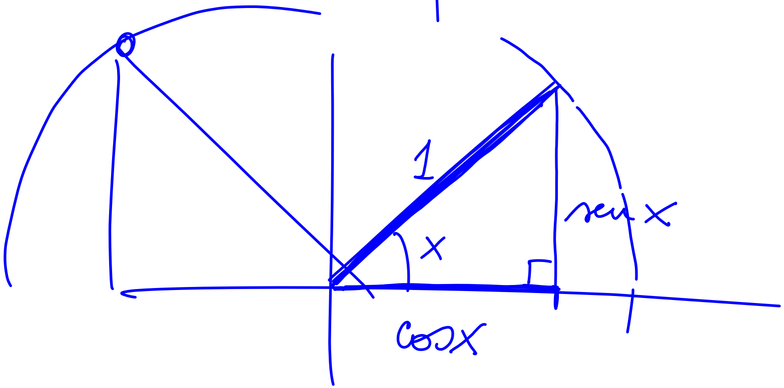
$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$









Teorema di Pitagora

$$1^2 = (\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2$$

Vale sempre

Si scrive anche

$$\boxed{\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

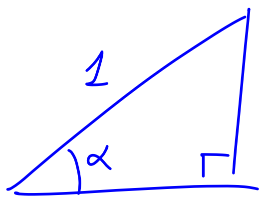
$\text{sen}^2(x)$ vuol dire $\text{sen}(x) \cdot \text{sen}(x)$

cioè $(\text{sen}\, x)^2$

NON È $\text{sen}(x^2)$!!!

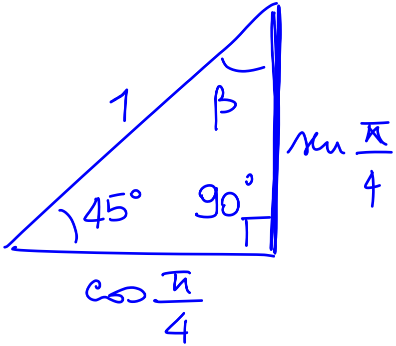
$$f(x^2) \neq \left(f(x)\right)^2$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad 45°$



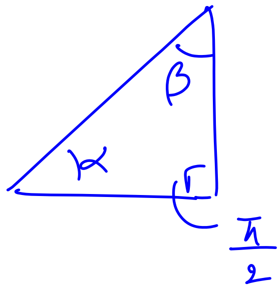
$\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = ?$

$\cos\dfrac{\pi}{4} = ?$



$$\beta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, cioè π

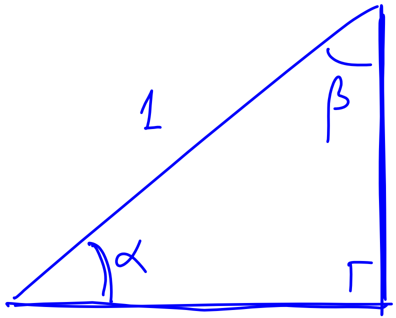


$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \beta$

trovo $\beta = \frac{\pi}{4}$



$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

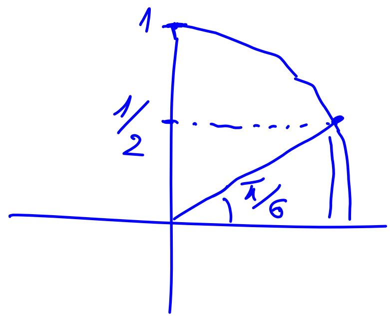
$$\alpha = \frac{\pi}{4} : \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$1 = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 \qquad \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

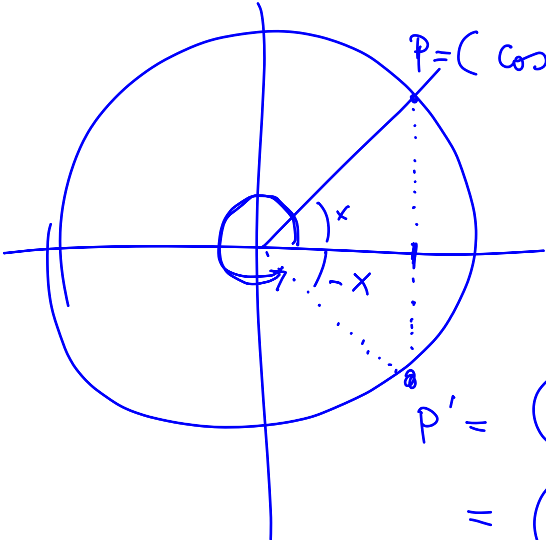
$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

	α	$\cos\alpha$	sen α
	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\forall x : \quad -1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$



$$P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$$

$$P' = (\cos x, -\operatorname{sen} x)$$

$$= (\cos(-x), \operatorname{sen}(-x))$$

$$= (\cos(2\pi - x), \operatorname{sen}(2\pi - x))$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

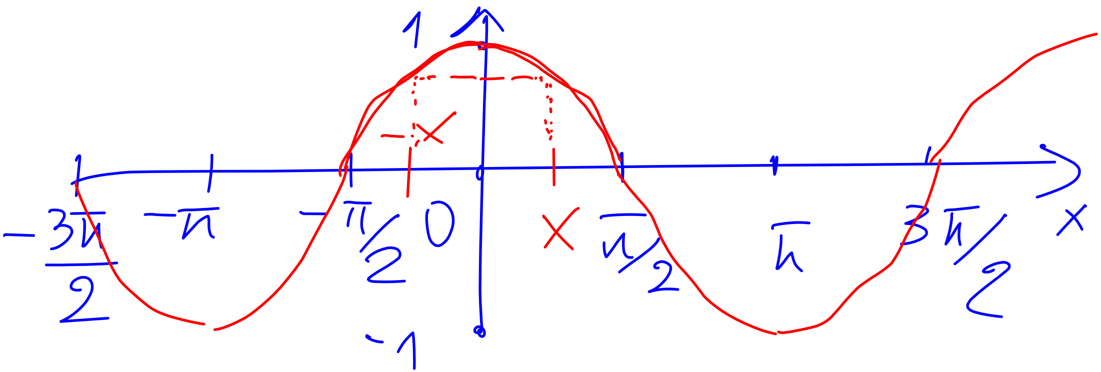
simmetrico sotto riflessioni rispetto all'asse y

funzione pari

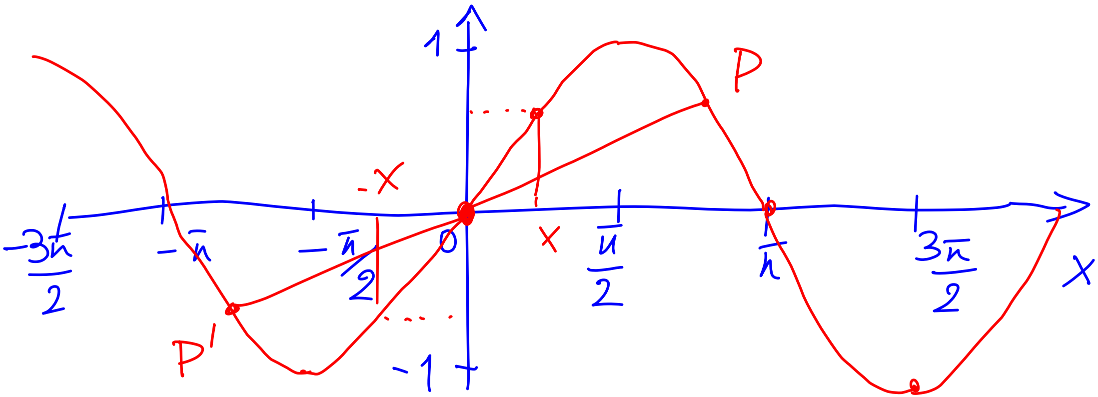
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

simmetrico sotto riflessioni rispetto all'origine

funzione dispari



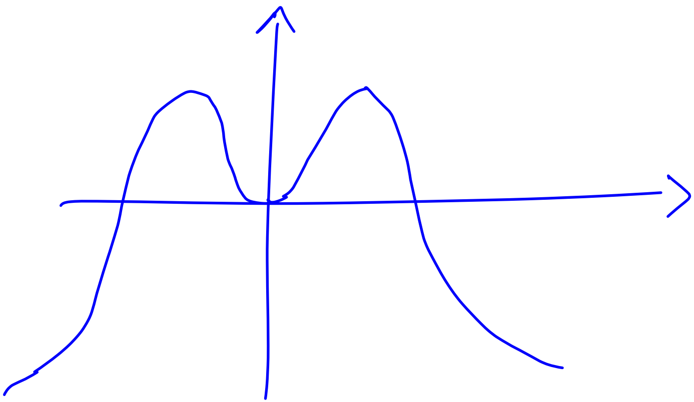
$\cos(x)$



$\sin(x)$

Si dice pari una funzione $f(x)$ tale che

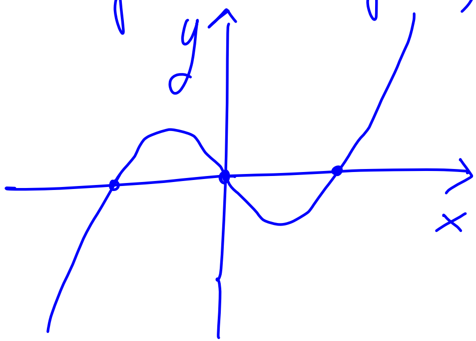
$$f(-x) = f(x)$$



$$y = x^2 - x^4$$

Si dice dispari una funzione $f(x)$ tale che

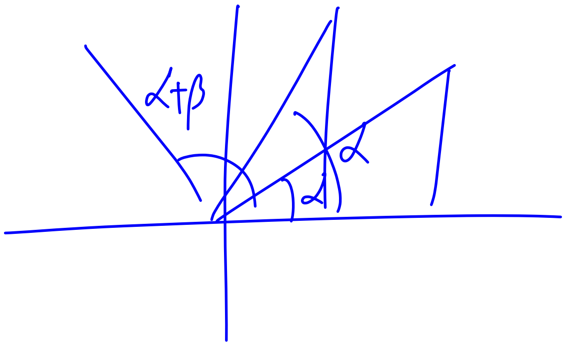
$$f(-x) = -f(x)$$



$$y = x^3 - x$$

Identità notevoli:

$$\begin{cases} \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta) \end{cases}$$



Verifica $\quad \alpha \to \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \cos\beta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\text{sen}\,\beta \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \end{cases}}$$

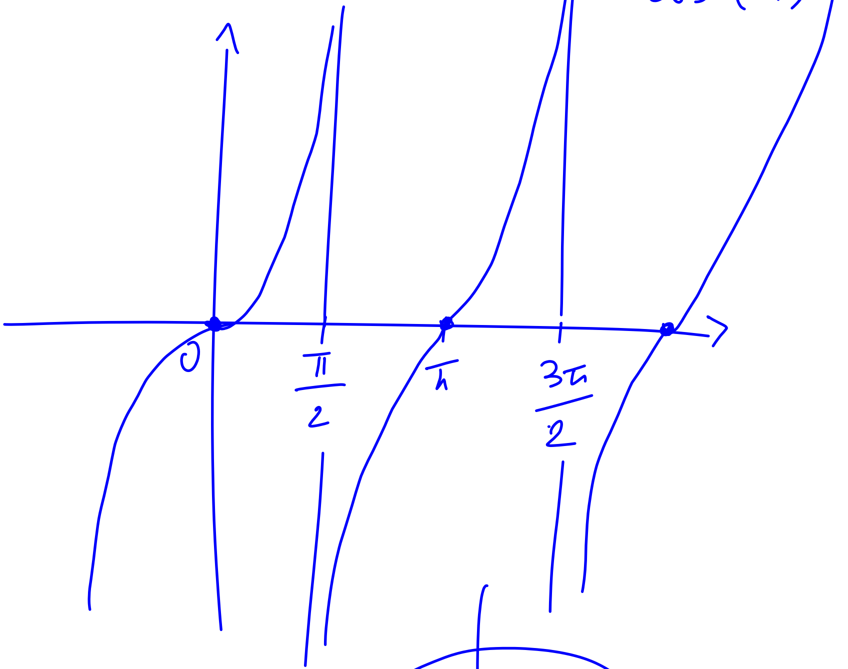
$\beta \to -\alpha$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\text{sen}(-\alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

Tangente

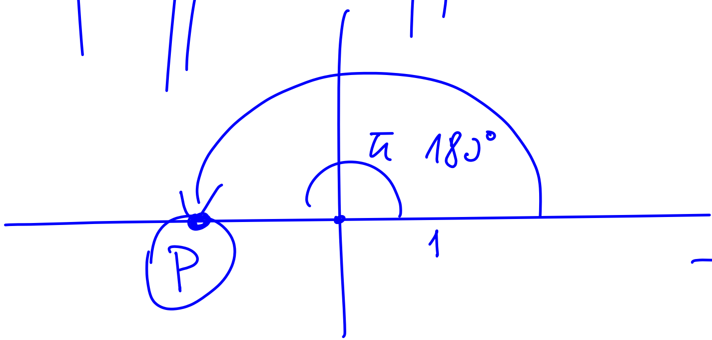
$$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \qquad cotg(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$$

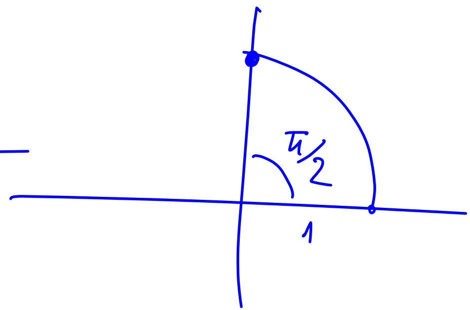


$$tg(0) = \frac{sen(0)}{cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

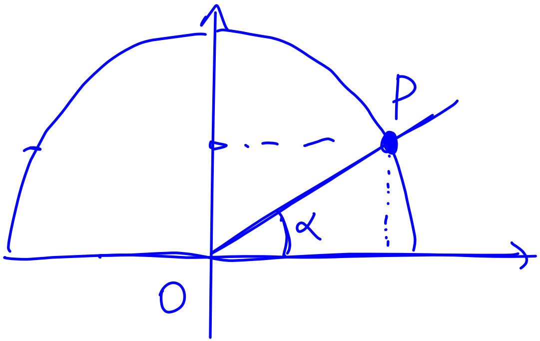
$$tg(\pi) = \frac{sen(\pi)}{cos(\pi)} = \frac{0}{(-1)} = 0$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{0} = ?$$

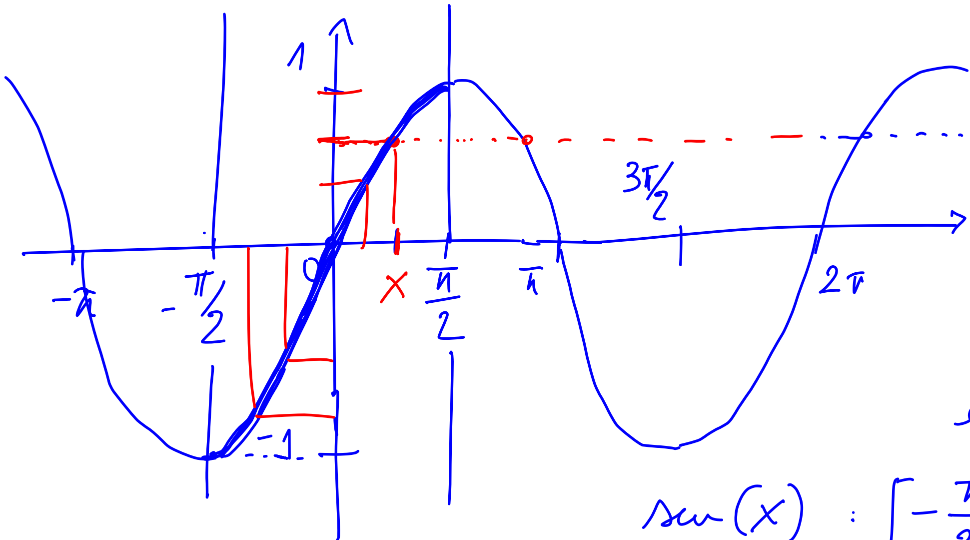




$tg(\alpha)$: pendenza della retta OP



Funzioni inverse



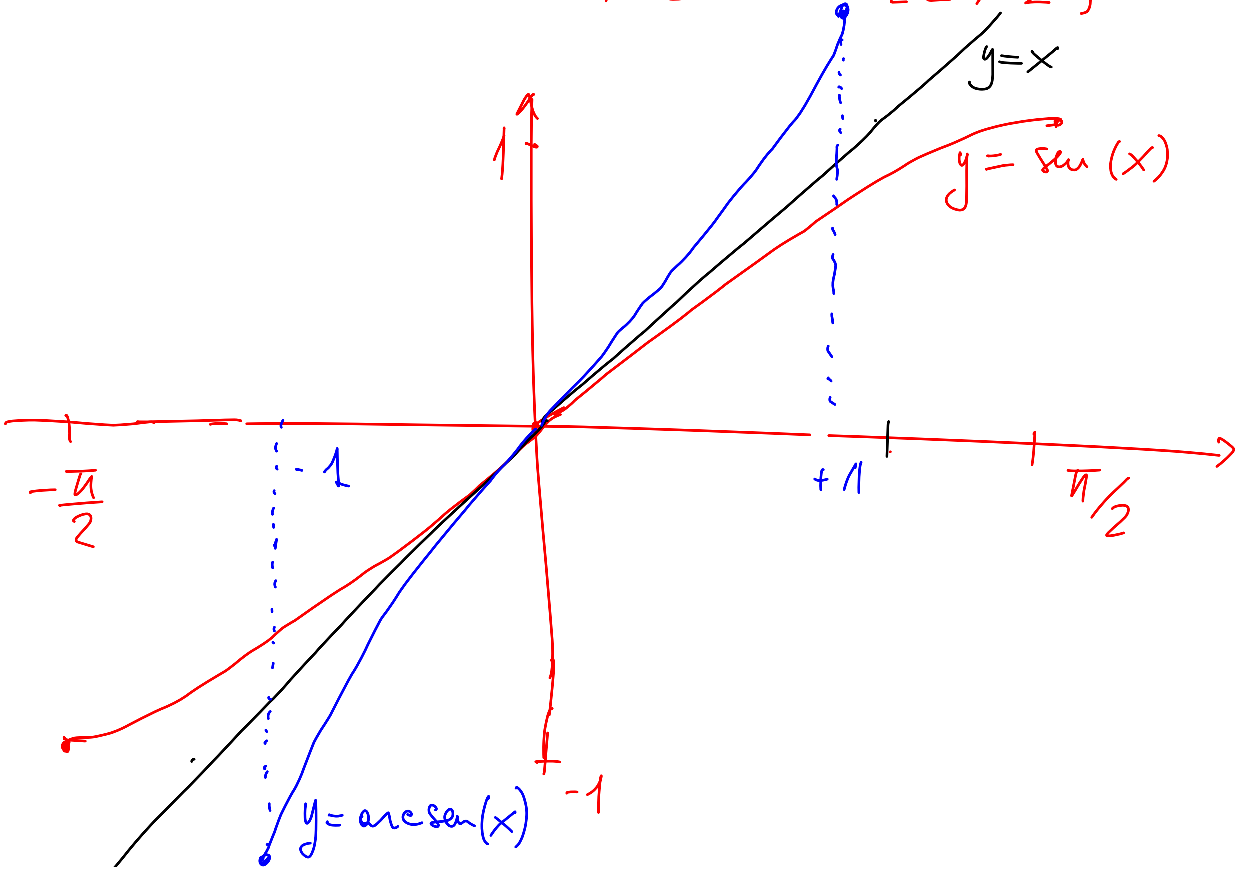
Ci sono infinite ascisse colla stessa ordinata

è invertibile ?

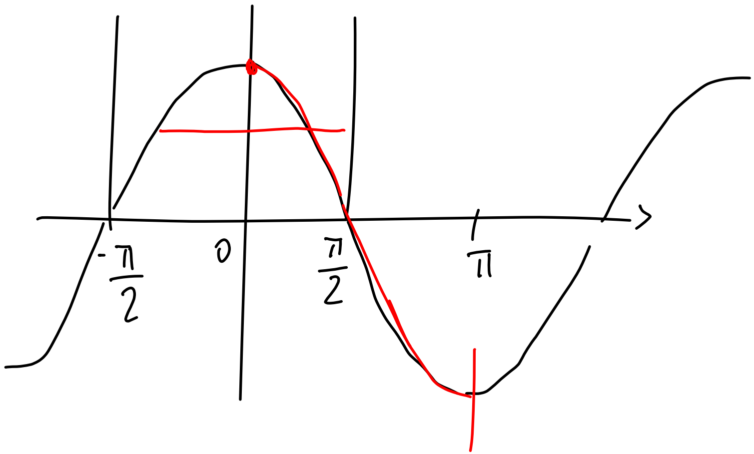
$$sen(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

L'inversa si chiama arcoseno

$$y = \text{arcsen}(x) \; : \; [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



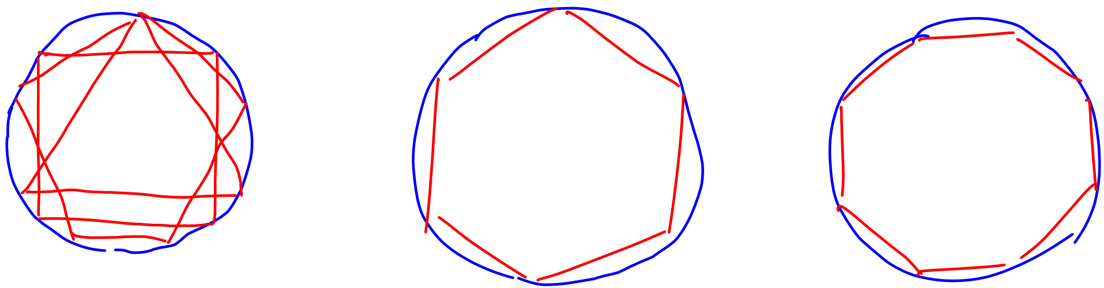
L'inversa del coseno è definita in $[-1,1] \to [0,\pi]$

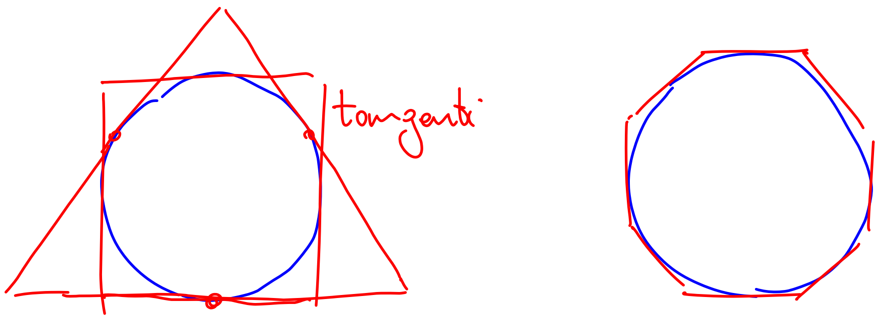


$\cos(x): [0,\pi] \to [-1,1]$

$\arccos(x): [-1,1] \to [0,\pi]$

LIMITI





Archimede:

(circonferenza di raggio 1)

circonferenza > perimetri di tutti i poligoni regolari inscritti

circonferenza < perimetri di tutti i poligoni regolari circoscritti

$\exists$ un solo numero (2π) che ha queste proprietà

$\pi = 3.14$

Successione $\quad a_n : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

"$f(n)$"

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \quad \dots \quad a_{10} = \frac{1}{10} \quad \dots \quad a_{100} = \frac{1}{100}$$

$$a_{1000} = \frac{1}{1000} \quad \dots \quad a_{1000000} = \frac{1}{1000000}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Definizione di limite di una successione

Si dice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \ / \ \forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

(arbitrariamente piccolo)

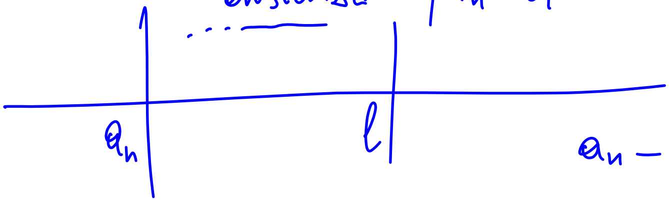
= "da un certo punto (che è N) in poi"

"modulo di x"

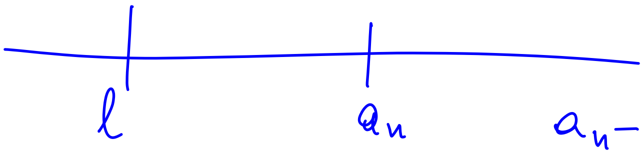
$|x|$ = "valore assoluto di x"

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

distanza = $|a_n - \ell|$



$a_n - \ell < 0 \qquad a_n < \ell$



$a_n - \ell > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad a_n = \frac{1}{n} \qquad \ell = 0$$

Sia $\varepsilon > 0$ Domanda: $\exists N \;/\; \forall n > N$

$$|a_n - \ell| = |a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \;?$$

$\forall n > N \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$ moltiplico per n: $\quad 1 < n\varepsilon$

moltiplico per $\frac{1}{\varepsilon}$: $\quad \frac{1}{\varepsilon} < n$

$$a < b \iff \lambda a < \lambda b \quad (\lambda > 0)$$

$$\iff \sigma a > \sigma b \quad (\sigma < 0)$$

Basta scegliere $N = \frac{1}{\varepsilon}$:

$\forall n > N$ (cioè $n > \frac{1}{\varepsilon}$) è vero che $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1 \quad ?$$

dato $\varepsilon > 0$ $\quad \exists N \;/\; \forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$?

$$\Big|\underbrace{\frac{1}{n} - 1}\Big| < \varepsilon \qquad 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{impossibile}$$

$$\underbrace{1 - \frac{1}{n}} \text{ sempre } \geq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

aggiungiamo $\frac{1}{n}$ e sottriamo ε : $\quad 1 < \varepsilon + \frac{1}{n} \qquad 1 - \varepsilon < \frac{1}{n}$

impossibile: scelgo per es. $\varepsilon = \frac{1}{10}$

dovrebbe essere $\quad 1 - \frac{1}{10} < \frac{1}{n} \qquad \forall n > N \qquad \frac{9}{10} < \frac{1}{n} \qquad n < \frac{10}{9}$

contraddizione

Limite di una funzione $f(x)$

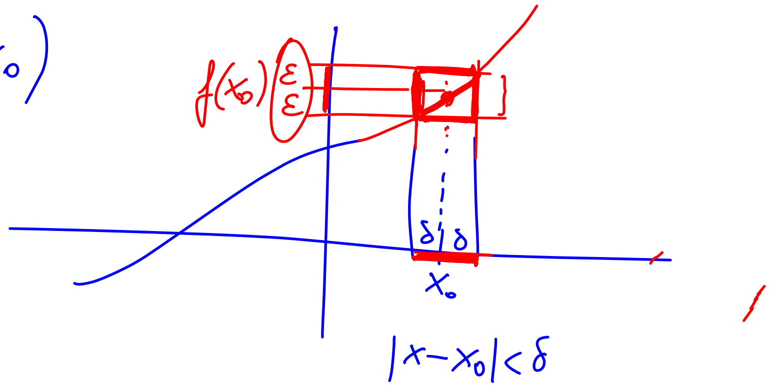
"limite di $f(x)$ per x che tende a x_0"

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; / \; \forall x_{x \neq x_0} \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

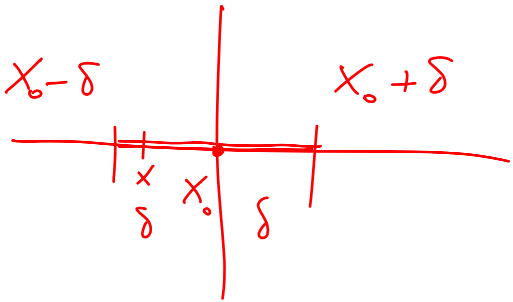
Una funzione è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



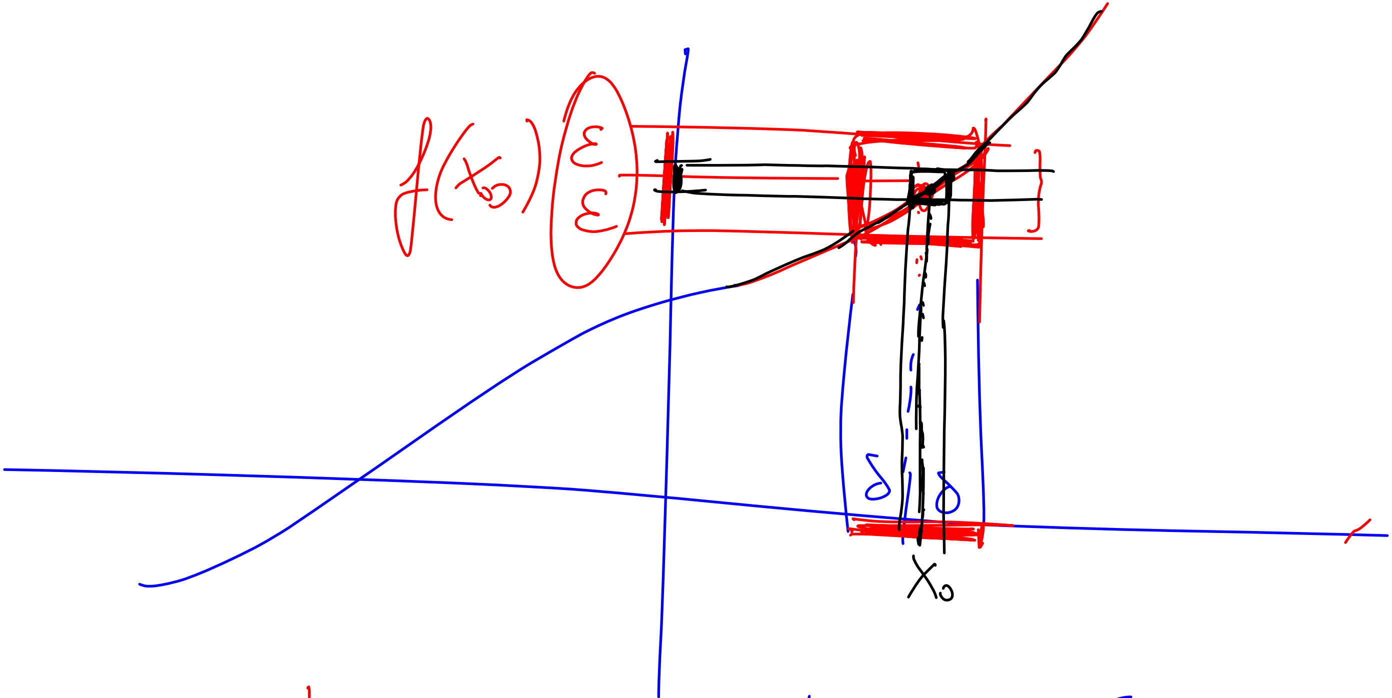
$|x - x_0| < \delta$ si scrive anche

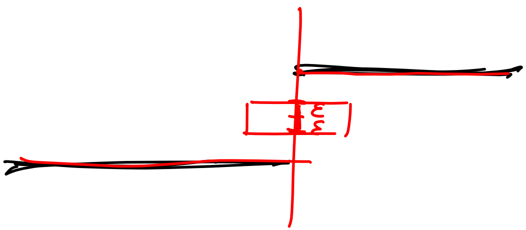
$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ compreso fra $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$



$\{x : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$ = intorno di x_0 (di grandezza δ)

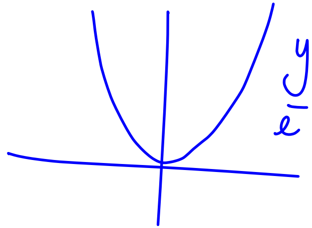
è l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aperto (= gli estremi NON sono inclusi)





$$|x - x_0| < \delta$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9 \qquad y = f(x) = x^2$$



$y = x^2$
è continua

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$ se la funzione è continua

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$ vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \ / \quad \forall x > M \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$ vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \ (M < 0) \ / \quad \forall x < M \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists ? \; M \; / \; \forall x > M \quad \left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad ?$$

$$\frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{x-1-(x+1)}{x+1} =$$

$$= \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{x+1} = \frac{-2}{x+1}$$

x grande (in particolare è >0)

$$\left| \frac{-2}{x+1} \right| = \frac{2}{x+1} \overset{?}{<} \varepsilon$$

moltiplico per $x+1$
e divido per ε

$$\frac{2}{\varepsilon} < x+1$$

Sottraggo 1 : $\frac{2}{\varepsilon} - 1 < x$

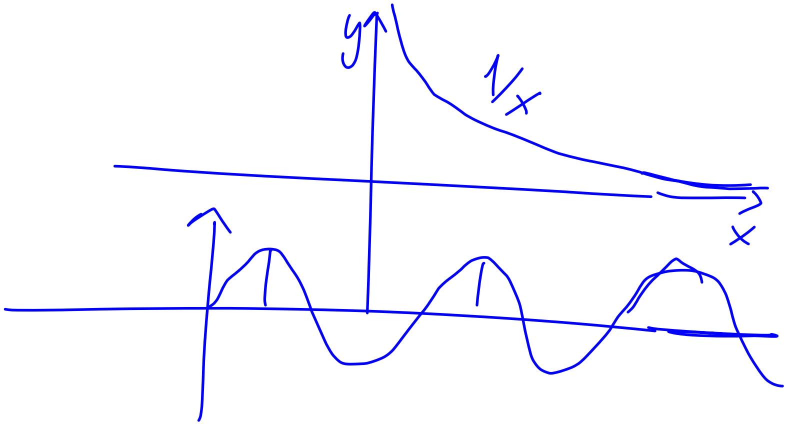
$$x > \underbrace{\frac{2}{\varepsilon} - 1}_{M} \qquad \text{Scelgo } M = \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

è quindi vero che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \left(= \frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$

$$\Big| \ \forall x > M \qquad |f(x) - 1| < \varepsilon$$

Non è detto che il limite esista

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}(x) = \text{NON esiste}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{3}{2}$$

divido sopra e sotto per x

$$\frac{1}{x}(3x+2)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x+2}{x}}{\frac{2x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\left(\frac{2}{x}\right)}{2+\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{2}$$

piccolissimi per x grande

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+8x+2}{3x^2+4x+1} = \frac{7}{3}$$

divodo sopra e sotto per x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7+\frac{8}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{8\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+8x^3+1}{7x^2+3+5x+11x^3} = \frac{8}{11}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x+6x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+6}$$

dividi per x^2

" $\frac{2}{x}$ è trascurabile rispetto a 6 nel limite $x\to\infty$"

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{6} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^4 \cancel{+1}}{2x^3 \cancel{+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7x^{\cancel{4}}}{2\cancel{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{7x}{2} = \infty$$

Proprietà

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

se esistono entrambi e sono $\neq \pm \infty$

$$\lim_{x \to \infty} 3x = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} (-2x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \underline{(3x - 2x)} \overset{?}{=} \infty - \infty$$ non ha senso

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (2x - 2x) = 0$$

$$= \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+1-x) = 1 \neq \lim_{x\to\infty}(x+1) - \lim_{x\to\infty} x$$

$$= \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

se esistono entrambi e sono finiti

("non $\pm\infty$")

$\infty \cdot 0$ non ha senso

$$\lim_{x\to\infty} 2x\cdot\frac{1}{x} = 2 \overset{?}{=} \lim_{x\to\infty} 2x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \; ?$$

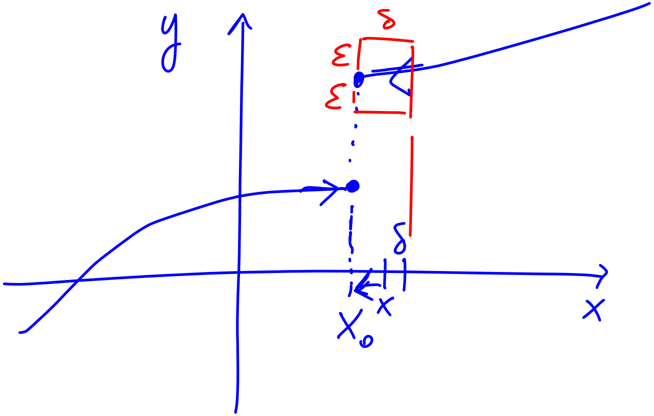
$$= \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$ se esistono

entrambi e $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0, \neq \pm\infty$

Insomma: se fila tutto liscio (cioè non viene $\infty - \infty$, $\frac{\text{numero}}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$) allora

posso sommare, moltiplicare e dividere i limiti di f e g, per trovare i limiti di $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$



$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

ma possono esistere i limiti destro e sinistro che misurano la discontinuità

Limite destro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l^+ \quad \text{se}$$

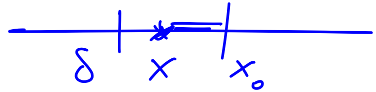
intorno destro di x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \quad \text{con} \quad 0 < x - x_0 < \delta$$

$$x > x_0$$

$$\text{vale} \quad |f(x) - l^+| < \varepsilon$$

Limite sinistro:



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l^- \quad \text{se}$$

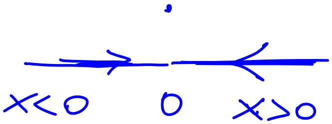
$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ / \ \forall x \quad 0<x_0-x<\delta \quad |f(x)-l^-|<\varepsilon$$

Il salto di una funzione discontinua in x_0 è la differenza $l^+ - l^-$

Se l^+ e l^- esistono e $l^+ = l^-$, allora

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ed è uguale a $l^+ = l^-$

La funzione è continua in x_0 se $l^+ = l^- = f(x_0)$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x>0 \\ 1 & \text{per } x=0 \\ 0 & \text{per } x<0 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \ell^+$$

$$\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \ell^-$$

$$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \ell^+ = \ell^-$$

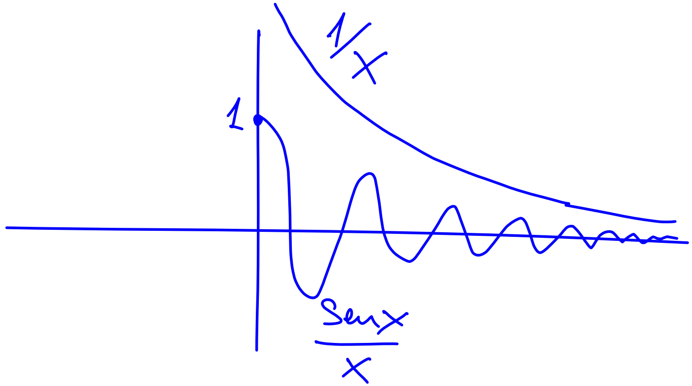
Tuttavia, questa $f(x)$ NON è continua in $x=0$, perchè $f(0) = 1 \neq \ell^+, \ell^-$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{?}{=} \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} x} \; ?$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{4}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to\infty} (-4) \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

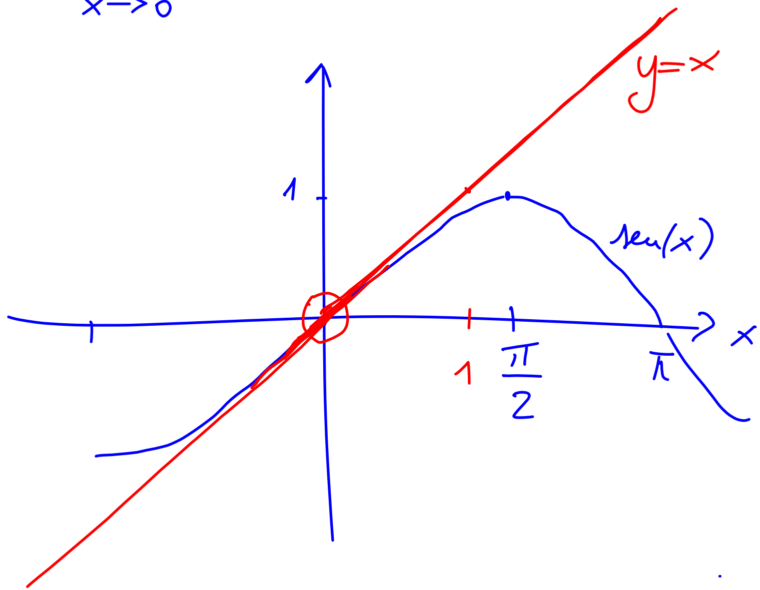
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$



$$-1 < \operatorname{sen} x < 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \stackrel{?}{=} \frac{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x \to 0} x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

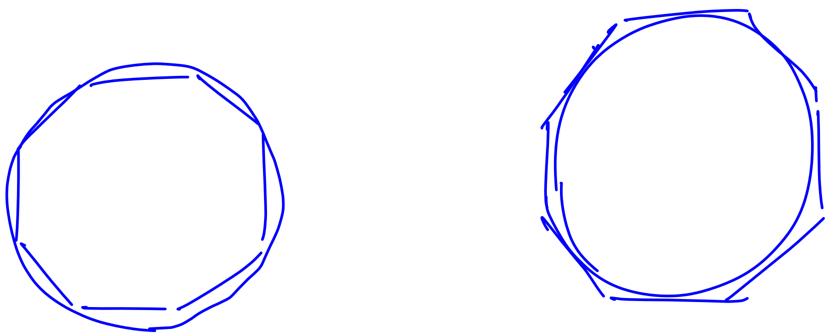


Teorema del confronto (o dei carabinieri)

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D$

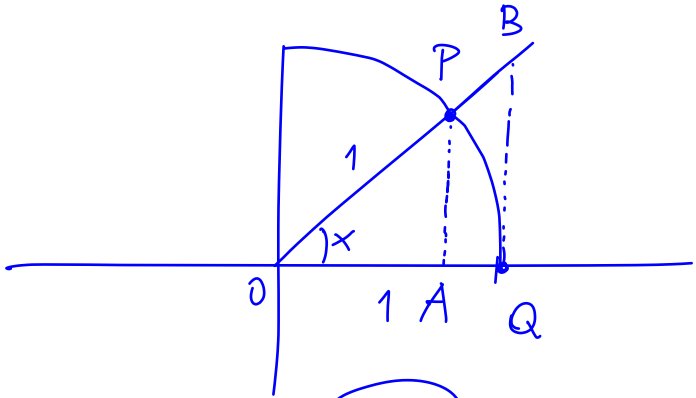
e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \qquad x_0 \in D$

allora $\exists$ anche $\lim_{x \to x^0} g(x)$ ed è uguale a l



circonferenza $= 2\pi R$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$



area Triangolo $\widehat{OAP}$ $\leq$ area di $\overset{\frown}{OQP}$

$\leq$ area $\widehat{OQB}$

Esercizi: $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$$= \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) = (\operatorname{sen}(x))^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \cdot (\operatorname{sen} x) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1-\cos^2(x) = (1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

$$\parallel$$

$$a\cdot(a-b) + b\cdot(a-b) =$$

$$= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = a^2-b^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \frac{x}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right) \neq \lim_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty$$

$$\sqrt{100} = 10 \qquad \sqrt{10000} = 100 \qquad \sqrt{1000000} = 1000$$

$$\overset{\textstyle 100}{\underset{\textstyle x}{\shortparallel}} \qquad \sqrt{x}$$

$$\sqrt{a \cdot 100} = \sqrt{a} \cdot 10$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$a - b$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{x+1} \qquad b = \sqrt{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\cancel{x}+1)-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x(x+2)}{x+2} =$$

$$\infty - \infty$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-2x}{x+2} = -2$$

Limite della composizione di due funzioni

Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ e

$f(y)$ è una funzione continua in y_0, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$$

Possiamo fare i cambi di variabili dentro i limiti usando funzioni continue $y = x^2$

Es.: $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$$

$$y = x - 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cancel{2x}} \cdot 2 = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} 2 = 2$$

$$y = 2\cancel{x}$$

Limite notevole : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$1 + \underline{x} = e^y$$

Prendo il logaritmo naturale di entrambi

$$\ln(1+x) = \ln e^y = y \qquad y = \ln(1+x)$$

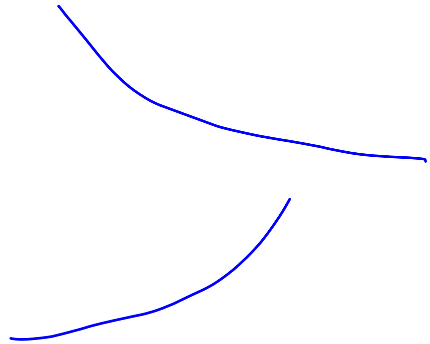
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

$e = 2.718\ldots$

$a^x \quad a < 1$



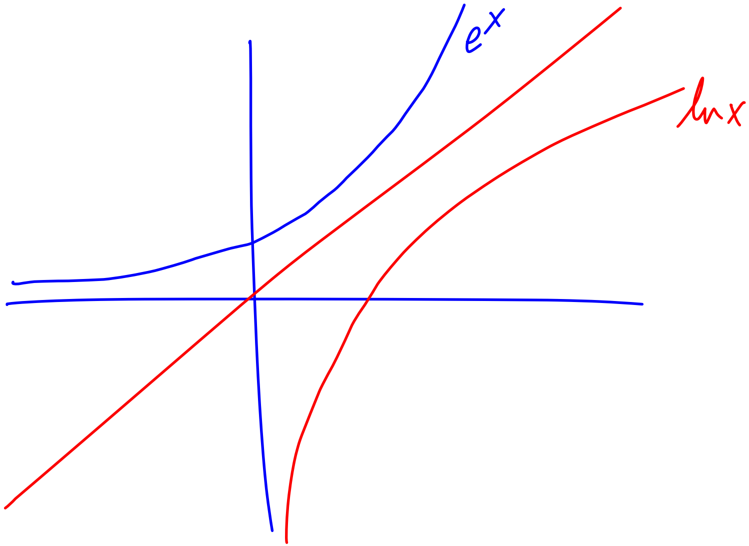
$a^x \quad a > 1$

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

L'esponenziale e^x va all'infinito più velocemente di qualunque potenza

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$



$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$$

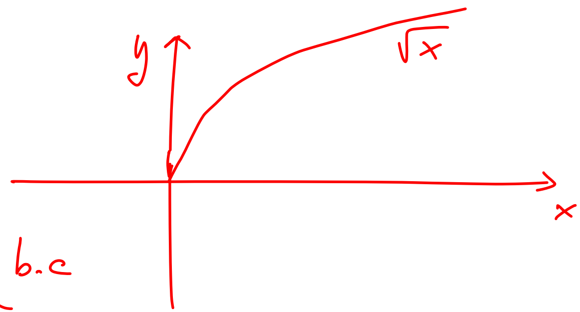
Il logaritmo cresce più lentamente di qualunque potenza (radice)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\ln x} = \infty$$

$$y = \ln x$$

$$x = e^y$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{\left(e^y\right)^{\frac{1}{n}}}{y} = \infty$$



$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{e^{\frac{y}{n}}}{y} = \lim_{z\to\infty} \frac{e^{z}}{z\cdot n} = \infty$$

$$z = \frac{y}{n} \qquad y = zn$$

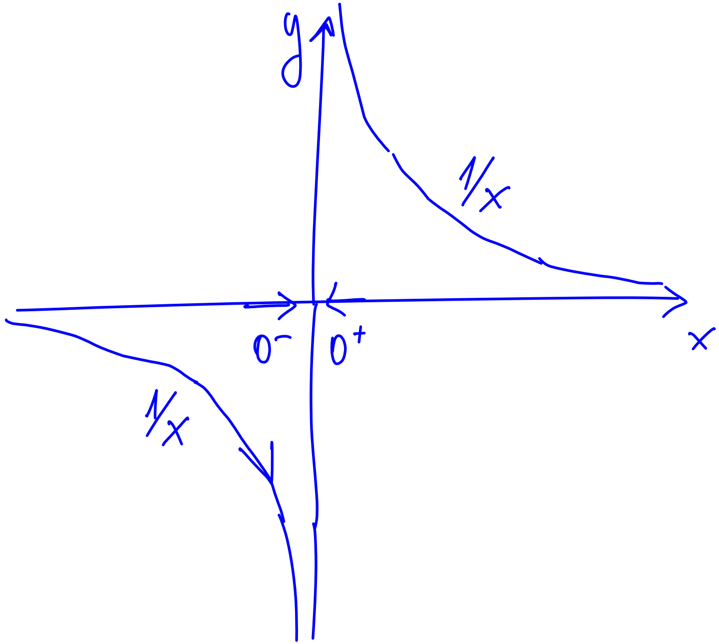
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

x	$\frac{1}{x}$
$1/10$	10
$1/100$	100
$1/1000$	1000
$\vdots$	

x	$1/x$
$-\frac{1}{10}$	-10
$-\frac{1}{100}$	-100
$-\frac{1}{1000}$	-1000



Diciamo che la funzione $f(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

e $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che f

è un infinitesimo di ordine superiore a g

Es.: $f(x) = x^2$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$g(x) = x$ $\quad \lim_{x \to 0} x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Se $f(x)$ è continua in x_0 allora vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 2$

$f(x_0) = 4$

$g(x) = f(x) - f(x_0)$ è

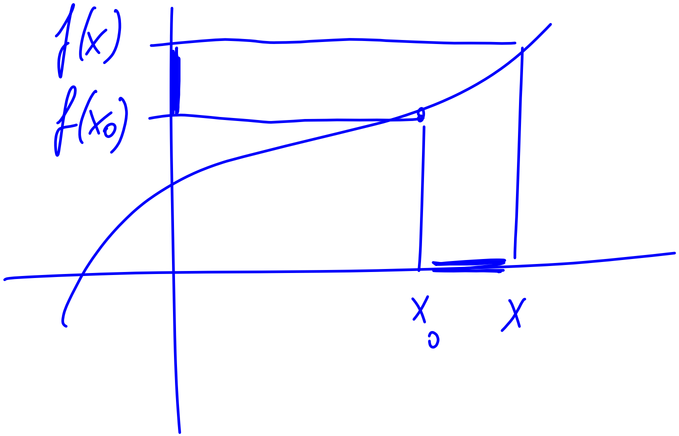
infinitesima per $x \to x_0$

$h(x) = x - x_0$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$$

h è infinitesima per $x \to x_0$

Considero $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ = derivata della funzione $f(x)$ in x_0 (se esiste)



Se esiste la funzione si dice derivabile

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si chiama rapporto incrementale

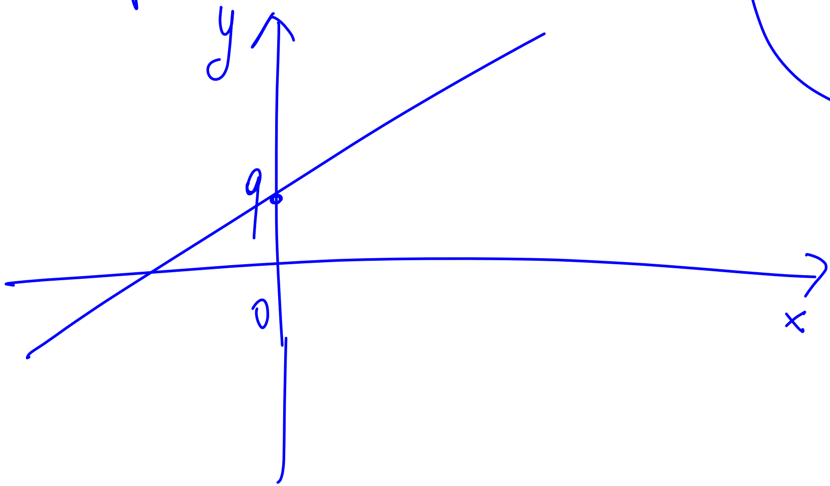
Es.: Se x è il tempo e $f(x)$ è la distanza percorsa

Esempio $y = f(x) =$ retta $= mx + q$

m, q costanti date

termine noto

coefficiente angolare



derivata di $f(x)$ in x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{mx + q - (mx_0 + q)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{mx + \cancel{q} - mx_0 - \cancel{q}}{x - x_0} =$$

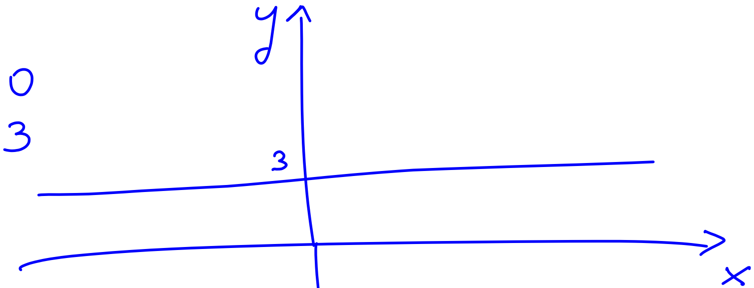
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{m \cdot \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{(x - x_0)}} = m$$

pendenza della retta

$y = 3$

$m = 0$

$q = 3$

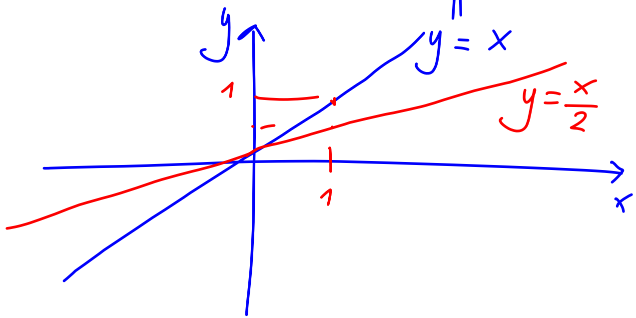


la derivata di una costante è zero

$y = x$

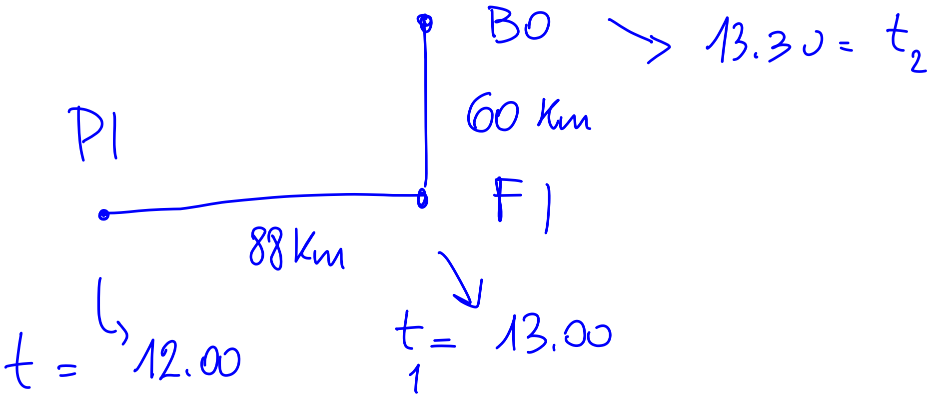
$m = 1$

$q = 0$



$y = \frac{x}{2}$

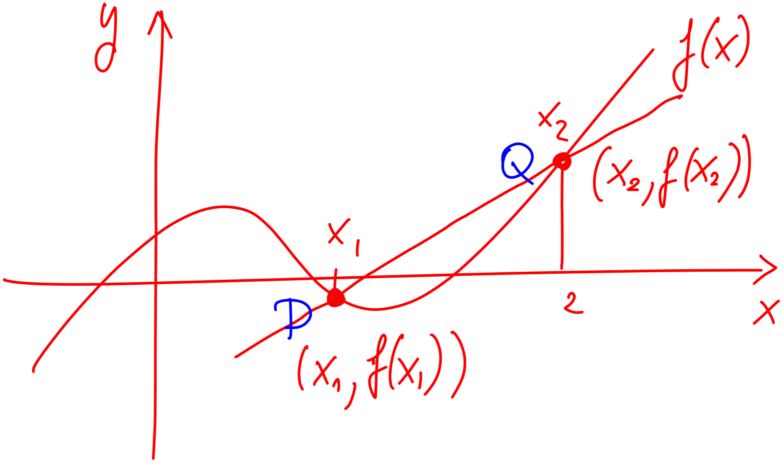
$m = \frac{1}{2}$



$$\frac{\text{distanza}(PI-BO) - \text{dist}(PI-FI)}{t(PI-BO) - t(PI-FI)} = \frac{60\,\text{Km}}{30\,\text{min}}$$

velocità media

derivata: velocità istantanea



Considero

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

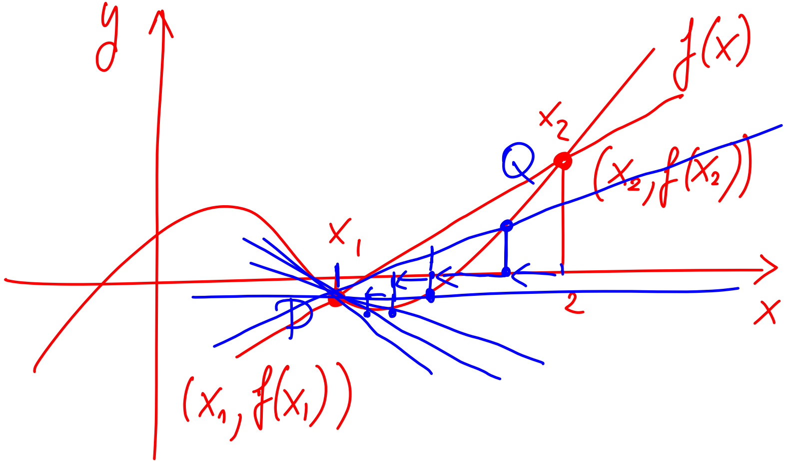
$$q = f(x_1) - m x_1$$

$y = mx + q$ è una retta

Dobbiamo far vedere che passa per P e Q, cioè

$f(x_1) = m x_1 + q \qquad f(x_2) = m x_2 + q$

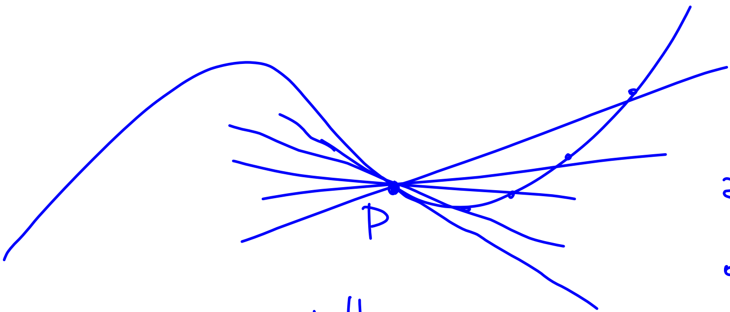
$$m x_2 + q = m x_2 + f(x_1) - m x_1 = f(x_1) + m(x_2 - x_1) =$$
$$= \cancel{f(x_1)} + f(x_2) - \cancel{f(x_1)} = f(x_2)$$



$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Tengo fisso x_1

e muovo x_2 verso x_1



al limite $x_2 \to x_1$

ottengo una retta che

nei dintorni di x_1 ha

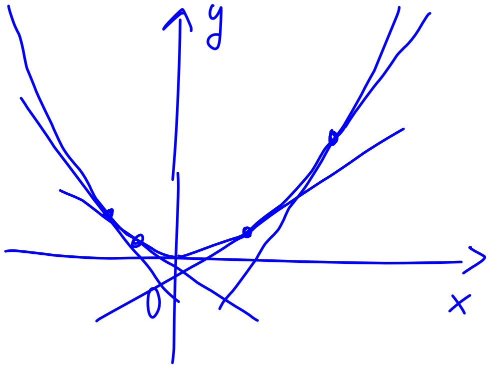
uno e un solo punto (P)

di intersezione col grafico di f

la pendenza m della

retta tangente è la derivata

$y = x^2$



$f(x) = x^2$

$x - x_0 = \delta$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$$

rinomino x_0 come x

notazione di Leibniz

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{df}{dx}(x)$$

"de f su de"

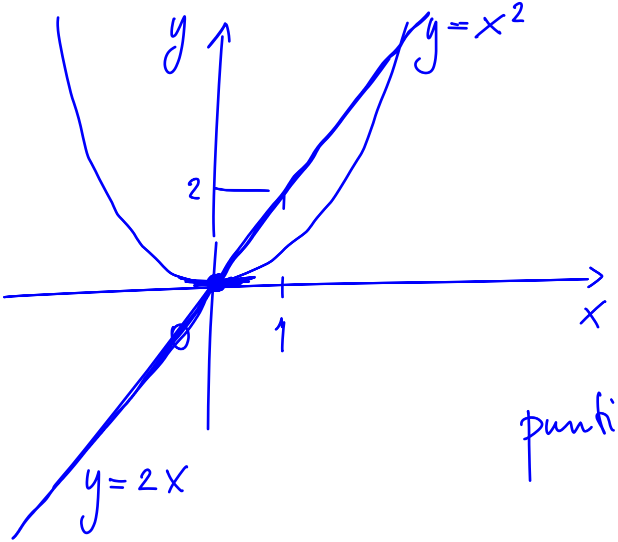
$$y = x^2 = f(x) \qquad f(x+\delta) \qquad f(x)$$

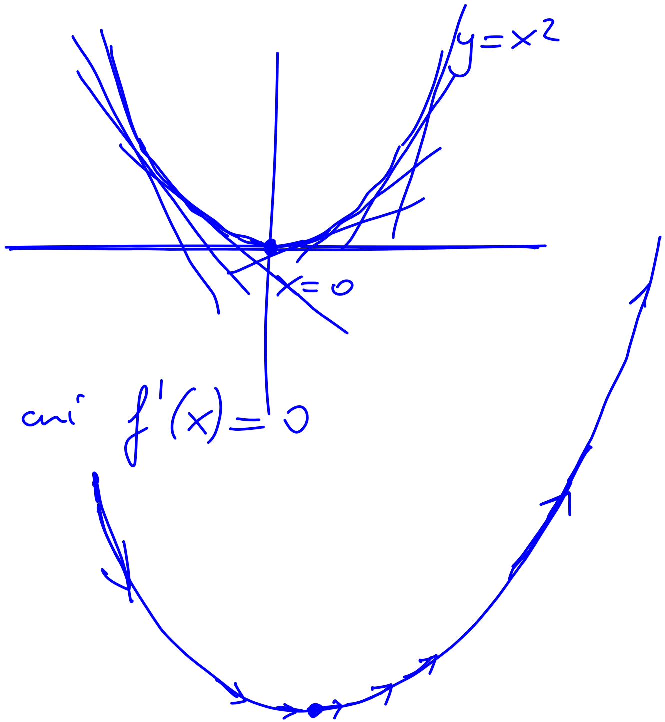
$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{(x+\delta)^2 - x^2}{\delta} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + \overbrace{2x\delta + \delta^2} - \cancel{x^2}}{\delta}$$

$$(x+\delta)^2 = (x+\delta)(x+\delta) = x\cdot(x+\delta) + \delta\cdot(x+\delta) =$$

$$= x^2 + x\delta + \delta x + \delta^2 = x^2 + 2x\delta + \delta^2$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\cancel{\delta}\cdot(2x+\delta)}{\cancel{\delta}} = 2x$$





punti in cui $f'(x)=0$

$$y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+\delta) - \operatorname{sen}(x)}{\delta}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha)$$

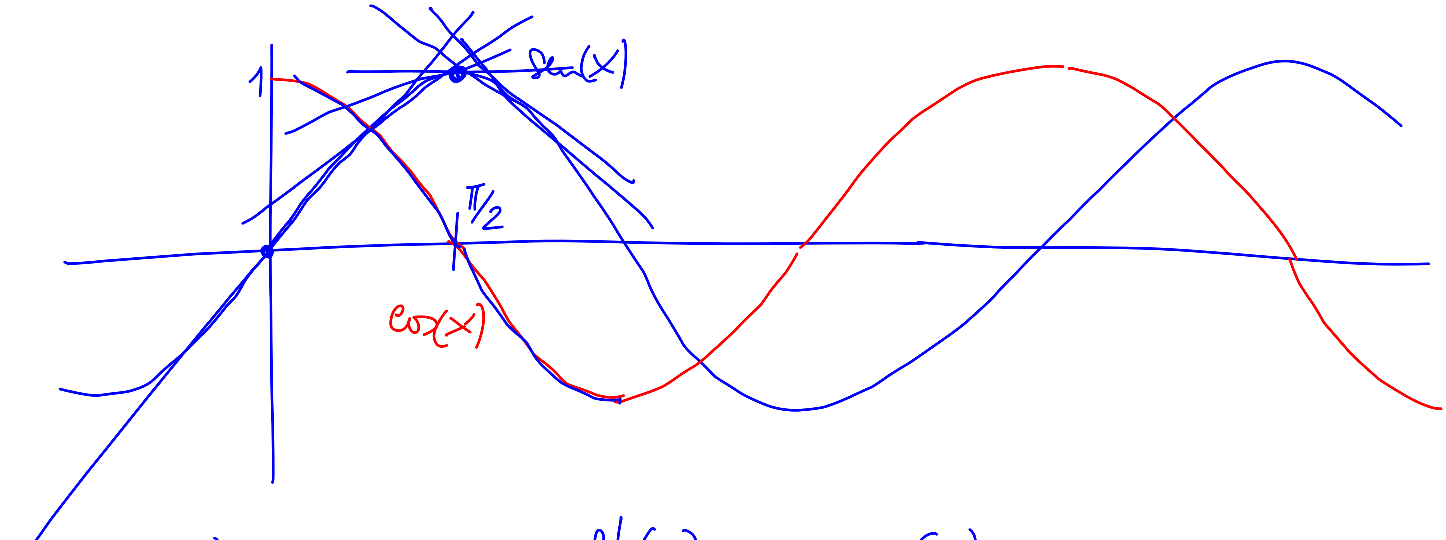
$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(\delta) + \overbrace{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(\delta)} - \operatorname{sen}(x)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \cos(x)\,\frac{\operatorname{sen}(\delta)}{\delta} + \lim_{\delta \to 0} \operatorname{sen}(x)\,\frac{\cos(\delta) - 1}{\delta}$$

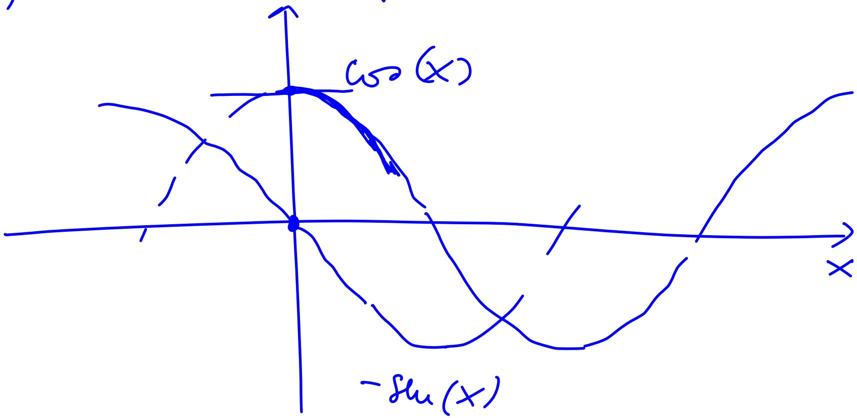
$$= \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,\cancel{\lim_{\delta \to 0} \frac{1 - \cos(\delta)}{\delta}} = \cos(x)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1 - \cos(\delta)}{\delta^2} = \frac{1}{2} \cancel{4}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1 - \cos(\delta)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1 - \cos(\delta)}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\frac{1 - \cos(\delta)}{\delta^2}}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\delta}_{0} = 0$$



$$f(x) = \cos(x) \qquad f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$



$f(x) = \ln x \qquad x > 0 \qquad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln(x+\delta) - \ln x}{\delta} = \boxed{\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln\left[x \cdot \left(1+\frac{\delta}{x}\right)\right] - \ln(x)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\cancel{\ln(x)} + \ln\left(1+\frac{\delta}{x}\right) - \cancel{\ln(x)}}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}{\frac{\delta}{x} \cdot x} = \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$u = \frac{\delta}{x}$

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{e^{x+\delta} - e^x}{\delta} =$$

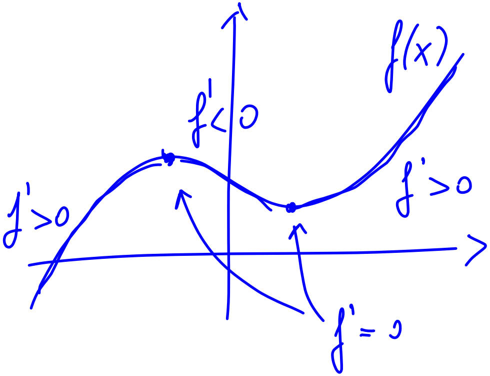
$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{e^x \cdot e^\delta - e^x}{\delta} =$$

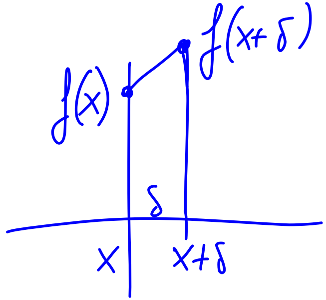
$$= \lim_{\delta \to 0} e^x \cdot \frac{e^\delta - 1}{\delta} = e^x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

derivata $f(x)$

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

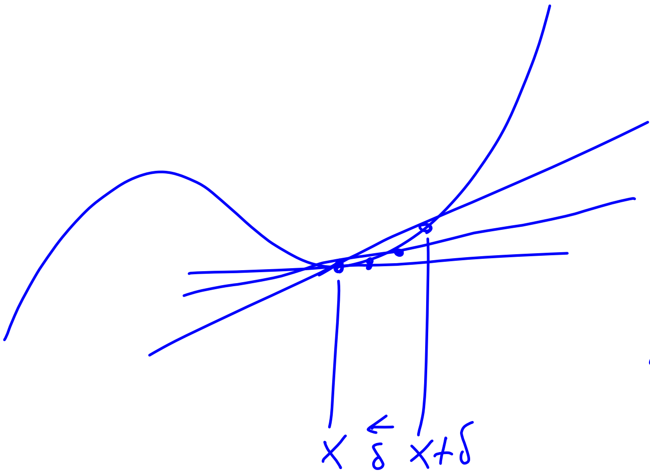


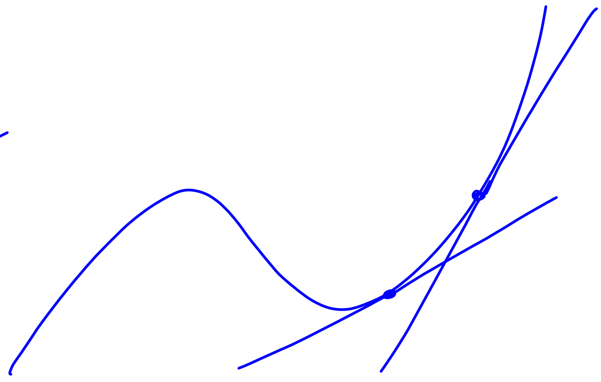


coefficiente angolare derivata

$\downarrow$

$y = mx + q$





retta tangente

$f(x)$	c costante	x	cx	x^2	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	0	1	c	$2x$	$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$

$f(x)$	$\ln x$ $x>0$	e^x	x^n
$f'(x)$	$\frac{1}{x}$	e^x	$n x^{n-1}$

La derivata di una somma $f(x)+g(x)$ di funzioni è la somma $f'(x)+g'(x)$ delle derivate

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)+g(x+\delta)-f(x)-g(x)}{\delta}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}+\frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}+\lim_{\delta\to 0}\frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}=$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

Regola di Leibniz

la derivata del prodotto $f(x) \cdot g(x)$ di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ è

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) \cdot g(x+\delta) - f(x) \cdot g(x)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) \cdot g(x+\delta) - f(x) \cdot g(x+\delta) + f(x) \cdot g(x+\delta) - f(x) \cdot g(x)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{(f(x+\delta) - f(x)) \cdot g(x+\delta) + f(x) \cdot (g(x+\delta) - g(x))}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \cdot g(x+\delta) + \lim_{\delta \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta} =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)$$

Vale :

$$\lim_{\delta \to 0} g(x+\delta) = g(x)$$ perché $g(x)$ è continua in x

Perché ? Perché stiamo assumendo che $\exists\, g'(x)$ e una funzione derivabile è anche continua

Stiamo assumendo $g'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta}$

Ma allora

$$\lim_{\delta \to 0} \left(g(x+\delta) - g(x) \right) = \lim_{\delta \to 0} \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta} \cdot \delta =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta} \cdot \lim_{\delta \to 0} \delta = g'(x) \cdot 0 = 0$$

Pertanto $\lim_{\delta \to 0} \left(g(x+\delta) - g(x) \right) = 0$

cioè $\lim_{\delta \to 0} g(x+\delta) = g(x)$

Esempio $\quad f(x) = x \qquad g(x) = x$

$$f(x) \cdot g(x) = x^2 = h(x)$$

$$h'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 1 \qquad\qquad f'(x)\, g'(x) = 1 \quad :$$

$$g'(x) = 1$$

il prodotto delle derivate non c'entra niente colla derivata del prodotto

Leibniz: $\quad f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n x^{n-1}$

$n = 3 \qquad f(x) = x^3 \qquad f'(x) \stackrel{?}{=} 3x^2$

$f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$

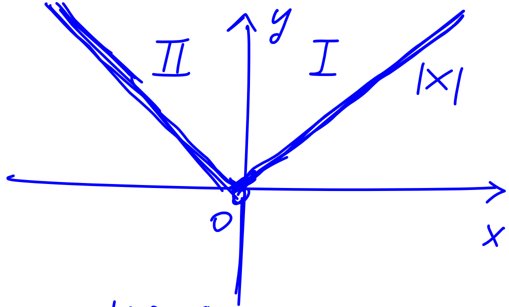
$f'(x) = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$

la derivata di $k\, f(x)$, k = costante, è

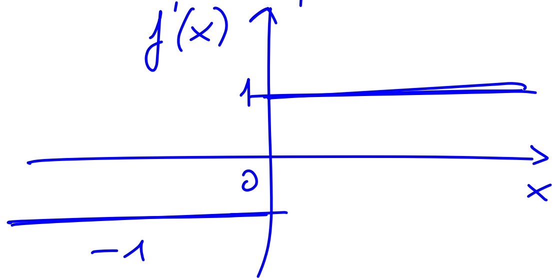
$k \cdot f'(x)$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{k f(x+\delta) - k f(x)}{\delta} = k \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



f non è derivabile per $x = 0$

Derivata della funzione composta

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h(x) = \sqrt{x+2} \qquad f(y) = \sqrt{y}$$

$$f(g(x)) = \sqrt{x+2} \qquad y = g(x) = x+2$$

$h(x) = f(g(x))$ $\qquad y = g(x)$

$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$ dove $y = g(x)$

$h(x) = sen(x^2)$ $\qquad y = x^2$ $\qquad y'(x) =$

$= sen(y(x))$ $\qquad sen(y)$

$h'(x) = \cos(y) \cdot 2x$ dove $y = x^2$

$= 2x \cos(x^2)$

$y = g(x) = x^2$ $\qquad f(y) = sen(y)$

$\underline{h(x)} = f(g(x)) = f(y)$

$h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{h(x+\delta) - h(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{g(x+\delta) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta} =$$

$$\overset{?}{=} \lim_{\delta \to 0} \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{g(x+\delta) - g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\delta \to 0} \frac{g(x+\delta) - g(x)}{\delta}}_{\hookrightarrow g'(x)}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{g(x+\delta) - g(x)} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(y+\Delta) - f(y)}{\Delta} = f'(y)$$

$$g(x+\delta) - g(x) = \Delta \qquad y = g(x)$$

$$g(x+\delta) = g(x) + \Delta = y + \Delta$$

$$\lim_{\delta \to} \left(g(x+\delta) - g(x) \right) = 0 \qquad \lim_{\delta \to 0} g(x+\delta) = g(x)$$

g è continua

Se $\exists\, g'(x)$ (g è derivabile in x)

allora g è continua in x

Quindi $h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$ dove $y = g(x)$

$h(x) = e^{x^2}$ $\quad f(y) = e^y \quad y = x^2 = g(x)$

$h'(x) = e^y \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x$

$h(x) = \operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) = f(x) \cdot g(x)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad g(x) = \operatorname{sen}(x)$

$f'(x) = \cos(x) \quad g'(x) = \cos(x)$

$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$

$= \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$

Come funzione composta

$$h(x) = \text{sen}^2(x) \qquad y = g(x) = \text{sen}(x) \qquad f(y) = y^2$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = (\text{sen}(x))^2$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x) \quad \text{dove} \quad y = g(x)$$

$$= 2y \cdot \cos(x) \quad \text{dove} \quad y = \text{sen}(x)$$

$$= 2\,\text{sen}(x) \cdot \cos(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(x) = x^n & & f'(x) = n x^{n-1} \\ n = -1 & f(x) = \frac{1}{x} & f'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{array}}$$

$$h(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)} \qquad y = g(x) = \text{sen}(x) \qquad f(y) = \frac{1}{y}$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = -\frac{1}{y^2}\cos(x) = -\frac{\cos(x)}{\text{sen}^2(x)}$$

$$h(x) = \frac{1}{g(x)} = f(g(x)) \qquad y = g(x)$$

$$f(y) = \frac{1}{y}$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = -\frac{1}{y^2}\, g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivata di $\frac{1}{f(x)}$ è $-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

Leibniz: $h'(x) = f'(x) \cdot \frac{g(x)}{g^2(x)} + f(x) \frac{(-1) \cdot g'(x)}{g^2(x)} =$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$f(x) = \text{sen}(x)$

$g(x) = \cos(x)$

$g'(x) = -\text{sen}(x)$

$$h(x) = \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$h'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \text{sen}(x)\cdot(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$\text{tg}(x)$ non è derivabile dove $\cos(x) = 0$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

Derivata della funzione inversa

$$y = f(x) \qquad x = f^{-1}(y)$$

$$h(x) = f(g(x))$$

Prendo $y = g(x) = f^{-1}(x)$

$$= f(f^{-1}(x)) = x$$

$$h'(x) = 1 = f'(y) \cdot g'(x)$$

dove $y = g(x) = f^{-1}(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

dove $y = f^{-1}(x)$

derivata f. inversa

$f(x) = e^x$ $\quad f^{-1}(x) = \ln x \quad (x>0)$

$f'(x) = e^x$ $\quad g(x) = \ln x \quad g'(x) = \frac{1}{x} \quad (x>0)$

Verifichiamo se

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$ dove $y = f^{-1}(x)$

$y = \ln(x) = g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{e^y}$$ dove $y = \ln x$

$$= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{forme indeterminate}$$

Teorema di de l'Hopital

Se f e g sono continue in un intorno I_{x_0} di x_0

e derivabili in $I_{x_0} \setminus \{x_0\}$ e $g(x) \neq 0$

$g'(x) \neq 0$ in $I_{x_0} \setminus \{x_0\}$

Se $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ per $x \to x_0$

allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \text{ "} = \frac{0}{0} \text{" } = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ "} \frac{0}{0} \text{" } \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$h(x) = \ln(1+x) \qquad y = g(x) = 1+x \qquad f(y) = \ln(y)$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{1}{1+x}$$

$$h(x) = \ln(g(x))$$

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

NON applicare se non è $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Es. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1+x} = 0 \neq \lim_{x \to 0} \frac{1}{1} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$\frac{0}{0}$ $\quad e^0 = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(e^x - 1)}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x \cdot \cos(e^x-1)}{3\cos(3x)} = \frac{1}{3}$$

$\frac{0}{0}$

$$f(x) = \operatorname{sen}(e^x - 1)$$

$$g(x) = \operatorname{sen}(\underbrace{3x}_{y}) \qquad g'(x) = \cos(3x) \cdot 3$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(\underbrace{e^x - 1}_{y}) \qquad f'(x) = \cos(e^x - 1) \cdot e^x$$

$$h(x) = \operatorname{sen}(e^{-x}) \qquad y = e^{-x} = g(x)$$

$$f(y) = \operatorname{sen}(y)$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$g'(x) = -e^{-x}$$

$$h(x) = \operatorname{sen}(e^{-x})$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$$

$$y = e^{-x} = g(x)$$

$$f(y) = \operatorname{sen}(y)$$

$$h(x) = e^{-x}$$

$$= f(g(x))$$

$$y = g(x) = -x$$

$$f(y) = e^{y}$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$$

$$= e^{y} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

$$h'(x) = \cos(y) \cdot (-1)\, e^{-x} = -e^{-x} \cos(e^{-x})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{x \ln(1+4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{\frac{3}{4}\cdot 4x}{\ln(1+4x)} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$$

$$y = 3x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{4}\cdot 4x}{\ln(1+4x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\overbrace{2x+x^2}^{y})}{3x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x+x^2)\cdot(2+2x)}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \frac{2x}{\ln(1+2x)} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\ln(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi - x^2)}{7x^2 e^x}$$

$$h(x) = \operatorname{sen}(\pi x) \qquad y = \pi x = g(x) \qquad f(y) = \operatorname{sen}(y)$$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = \cos(y) \cdot \pi = \pi \cos(\pi x)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(\pi x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi \cos(\pi x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\pi}{1} = -\pi$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$$

$$h(x) = \ln(x^2) \qquad y = g(x) = x^2 \qquad f(y) = \ln(y)$$

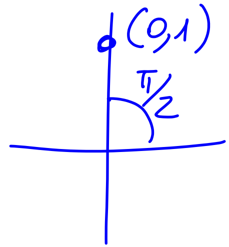
$$h(x) = f(g(x)) \qquad h'(x) = f'(y)\cdot g'(x) =$$

$$= \frac{1}{y}\cdot 2x = \frac{2\cancel{x}}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$h(x) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$$

$$= \ln(x\cdot x) = \ln(x) + \ln(x)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1}=-\frac{\pi}{2}$$



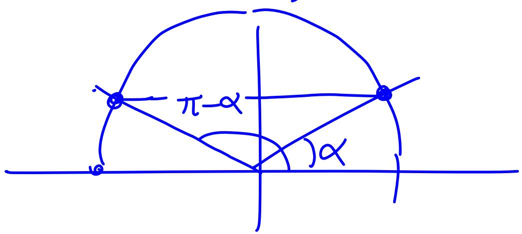
$$h(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=f(g(x))$$

$$y=g(x)=\frac{\pi}{2}x \qquad f(y)=\cos(y)$$

$$h'(x)=f'(y)\cdot g'(x)=-\operatorname{sen}(y)\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi-x^2)}{7x^2e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{7x^2e^x}=\frac{1}{7}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi - x^2)}{7x^2 e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\pi - x^2)\cdot(-2x)}{7\cdot(2x\cdot e^x + e^x \cdot x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\cancel{x}\cdot\cos(\pi - x^2)}{7\cancel{x}e^x(2+x)} = \frac{-\cancel{2}\cdot\cos(\pi)}{7\cdot 1\cdot\cancel{2}} = \frac{1}{7}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 1}{5x^3 - x + 3} = \frac{2}{5} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\cdot 3x^2 + 2x}{5\cdot 3x^2 - 1} =$$

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{6\cdot 2x + 2}{15\cdot 2x} =$$

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n x^{n-1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{12}^{\,2}}{\cancel{30}_{\,5}} = \frac{2}{5}$$

$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$k\,f(x)$	$k\,f'(x) \quad k=\text{cost.}$
$f(x)\,g(x)$	$f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(y)\cdot g'(x) \quad \text{dove } y=g(x)$
$y=f^{-1}(x)$ $x=f(y)$	$\dfrac{1}{f'(y)} \quad \text{dove } y=f^{-1}(x)$
$\dfrac{1}{f(x)}$	$-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

$f(x) = a^x$ $(a>0)$ $\qquad f'(x) =$

x^n

$n x^{n-1}$

$g(x) = x^a \qquad g'(x) = a x^{a-1}$

$a = e^{\ln(a)}$

$h(x) = e^x \qquad h'(x) = e^x$

$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

$e^{\ln(u)} = u \qquad \ln(e^u) = u \qquad (A^b)^c = A^{bc}$

Se $f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \ln(x)$

$f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$

$$f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)} = e^y \qquad y = x \cdot \ln(a)$$

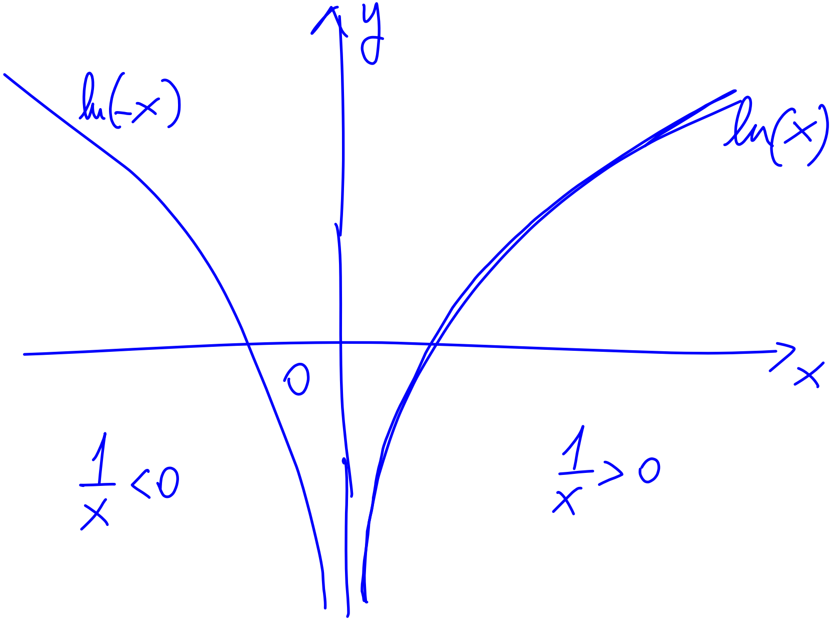
$$f'(x) = e^y \cdot \ln(a) = e^{x \ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a)\, a^x$$

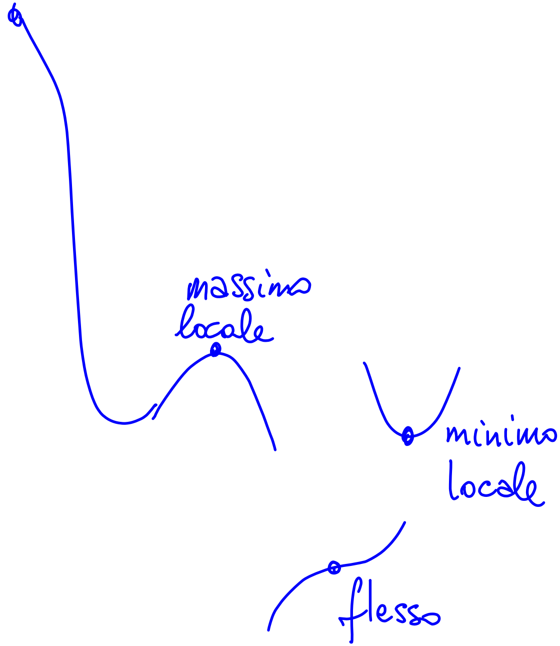
$$f(x) = 2^x \qquad f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$$

$$h(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases} \qquad \ln(y) \quad y = -x$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{y} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$





Studio di funzioni $\quad y = f(x)$

$f(x)$ cresce dove $f'(x) > 0$

$f(x)$ decresce dove $f'(x) < 0$

$f(x)$ è stazionaria dove $f'(x) = 0$

Punti stazionari : x tale che $f'(x)=0$

Sono massimi locali se $f''(x)>0$

Sono minimi locali se $f''(x)<0$

se $f''(x)=0$ .... chissà

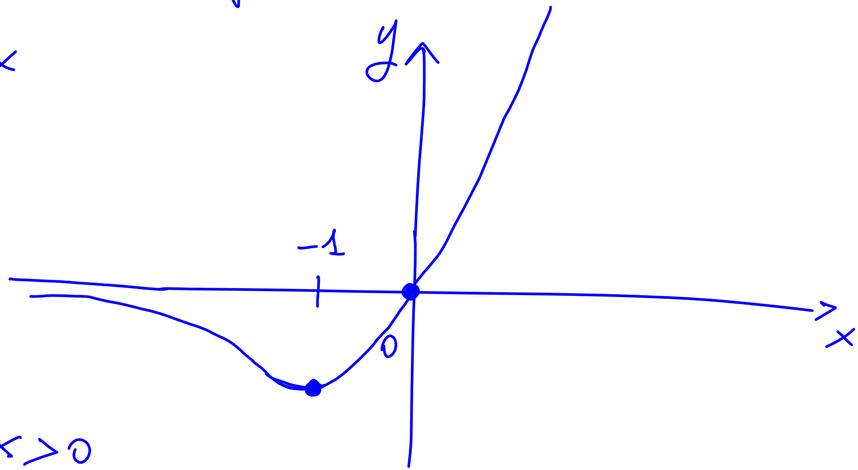
$$y = f(x) = x \cdot e^{x}$$

dominio : $\mathbb{R}$

e^{x} è sempre >0

$f(x) > 0$ per $x>0$

$f(x) < 0$ per $x<0$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

$$a = \frac{1}{a^{-1}}$$

$$a = e^{x}$$

$$y = -x$$

$$a^{-1} = \left(e^{x}\right)^{-1} = e^{-x}$$

$$= -\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^{y}} \underset{\text{l'Hopital}}{=} -\lim_{y \to \infty} \frac{1}{e^{y}} = 0$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x} + e^{x} \cdot x = (1+x)e^{x}$$

$$f(x) = x \cdot e^{x}$$

$f'(x) = 0$ per $x = -1$

$f'(x) > 0$ per $x > -1$

$f'(x) < 0$ per $x < -1$

$$f(-1) = -e^{-1} \simeq -\frac{1}{2.781}$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot (1+x) = e^x \cdot (2+x)$$

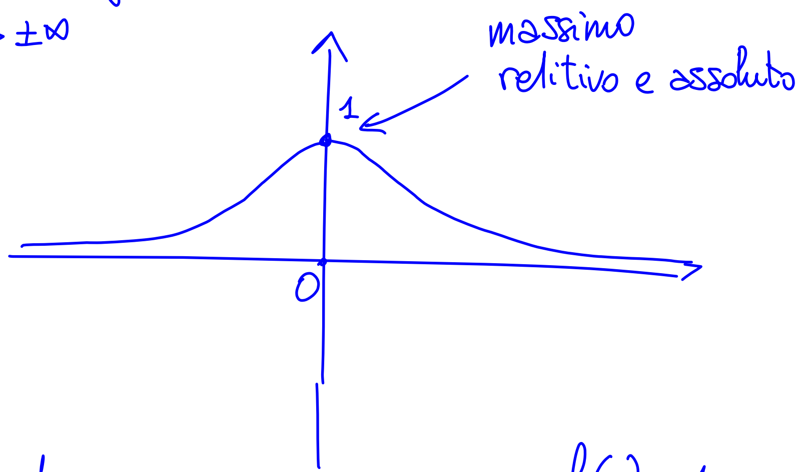
$$f''(-1) = e^{-1}(2-1) = \frac{1}{e} > 0$$

Studiare $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ dominio: $\mathbb{R}$

sempre positiva $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$$f(x) = f(-x)$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$



Punti stazionari: $x = 0$

$f(x)$ cresce per $x < 0$, decresce per $x > 0$ $f(0) = 1$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

dominio : $\mathbb{R}$ sempre positiva

"$e^{-\infty} = 0$"

"$e^{+\infty} = +\infty$"

$f(x) = f(-x)$: è una funzione pari

$$f(x) = e^{-x^2} = e^y$$

$$y = -x^2$$

$$f'(x) = e^y \cdot (-2x)$$

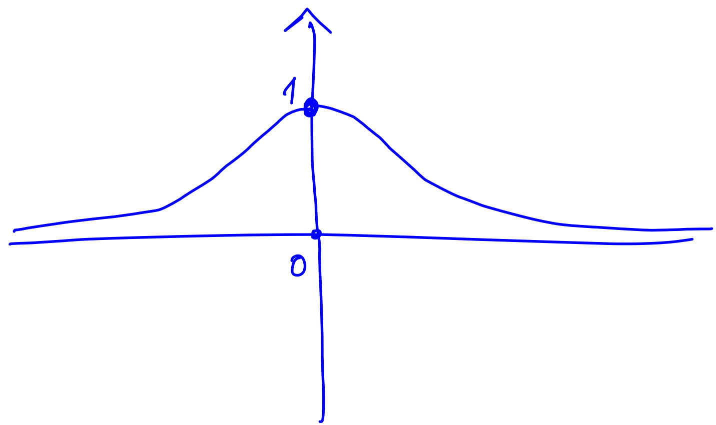
$$= -2x\, e^{-x^2}$$

Punti stazionari : $x = 0$

$f(x)$ cresce per $x < 0$

decresce per $x > 0$

$f(0) = 1$



Se $f(x)$ ha derivata $f'(x)$ si dice che $f(x)$ è una primitiva di $f'(x)$.

Data $g(x)$ si dice primitiva di $g(x)$ una qualunque funzione $G(x)$ tale che

$$G'(x) = g(x)$$

Es.: a ha come primitiva $ax + C$ $\quad a$ = costante, C = costante

ax ha come primitiva $\frac{ax^2}{2} + C$

$\frac{x^2}{2}$ ha derivata $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$

e^x ha come primitiva $e^x + c$

$\frac{1}{x}$ " " " $\ln|x| + c$

$\cos(x)$ " " " $\text{sen}(x) + c$

$\text{sen}(x)$ " " " $-\cos(x) + c$

$\ln(x)$ ...

x^n " " " $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$f(x) = x^{n+1}$ $\quad f'(x) = (n+1)x^n$

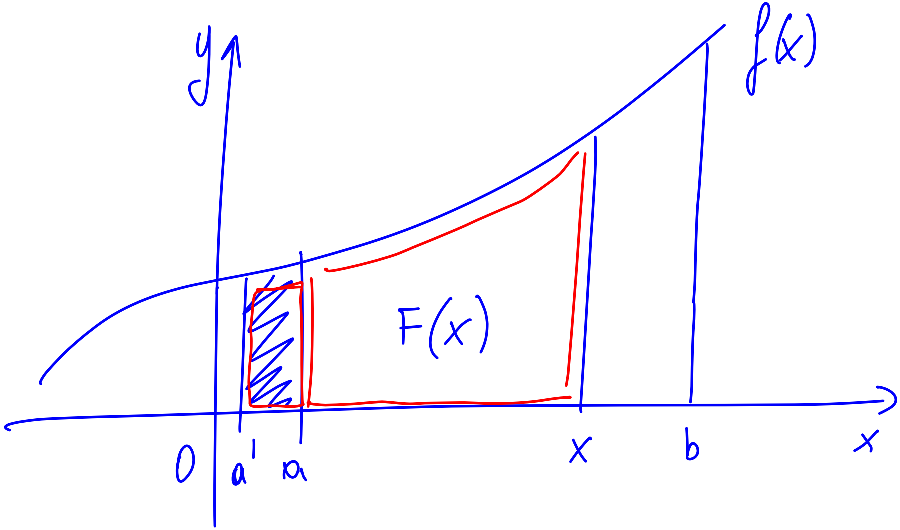
$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad f'(x) = x^n$

Significato della primitiva

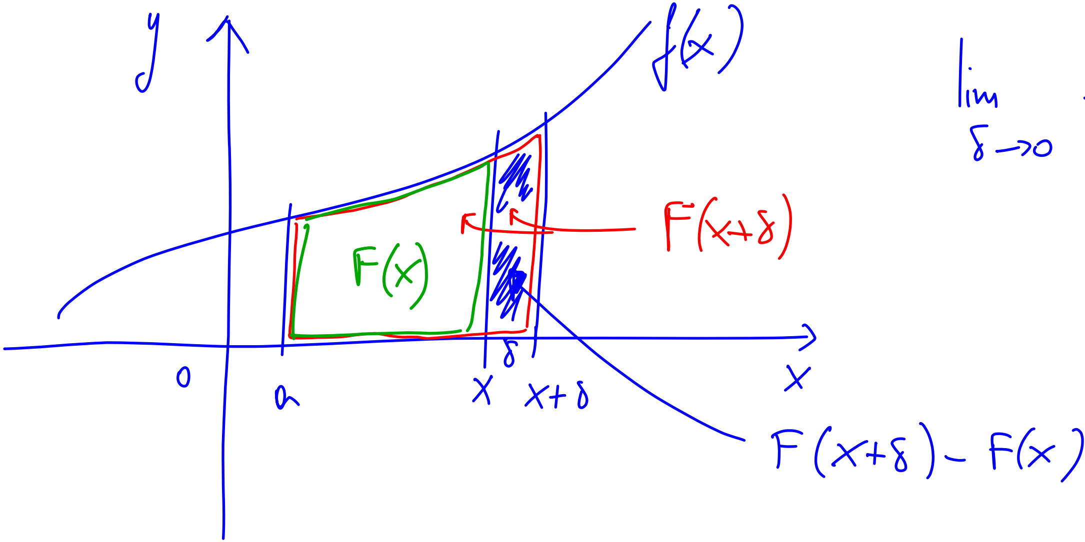
Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e $x \in [a,b]$

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ = area sottesa dal grafico di $f(x)$ tra a e x

a = costante

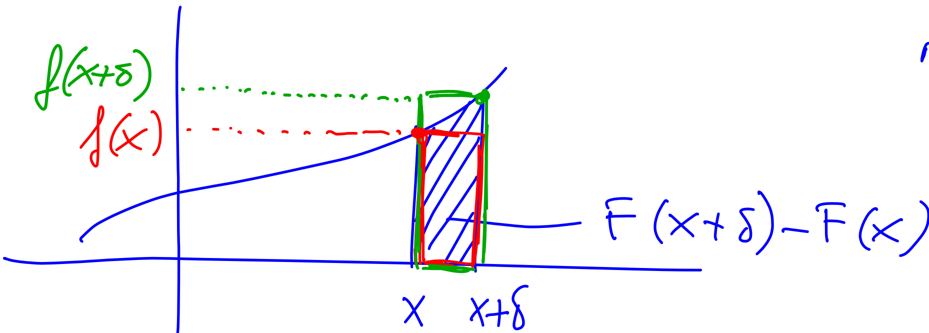


$$F'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = f(x)$$



$$\lim_{\delta \to 0} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

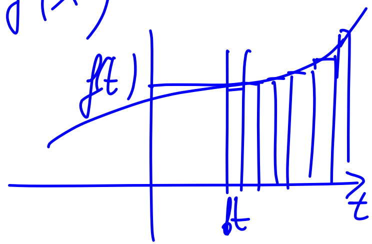
$$f(x)\,\delta \le F(x+\delta) - F(x) \le \delta\, f(x+\delta)$$



← divido tutto per δ

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{tende a } f(x) \\ \text{per } \delta \to 0 \\ \text{(non dipende} \\ \text{da } \delta)}} \leq \underbrace{\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}}_{F'(x)} \leq \underbrace{f(x+\delta)}_{\substack{\text{tende a } f(x) \\ \text{(perché } f \text{ è} \\ \text{continua)}}} \qquad \delta \to 0$$

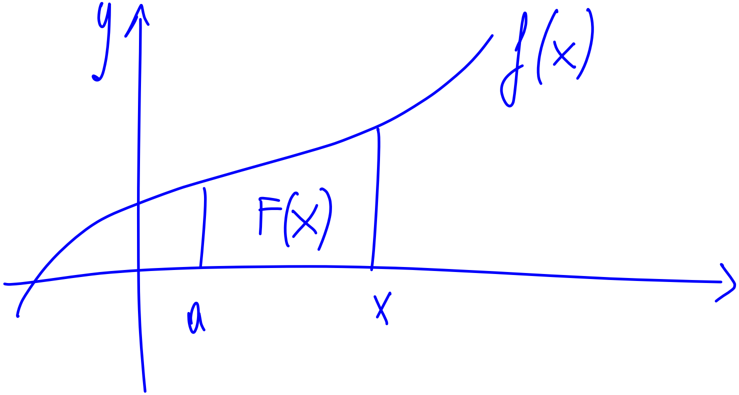
Teorema del confronto $\Rightarrow$ $F'(x) = f(x)$



$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

integrale di $\underbrace{f \text{ di } t}_{f(t)}$ de t

$\int$ "somma



La primitiva di $f(x) + g(x)$ è $F(x) + G(x)$

dove F e G sono, rispettivamente, le primitive di

f e g

La primitiva di $k\, f(x)$ è $k\, F(x)$, k = costante

La primitiva di $f(x)\, g(x) = ?$

È forse $F(x)\,G(x)$?

No, perché la derivata di $F \cdot G$ è

$$F'(x)\,G(x) + F(x)\,G'(x) =$$

$$= f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x)$$

Però sappiamo che la derivata di $F(x)\,g(x)$ è

$$f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x)$$

Quindi, la primitiva di $f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x)$ è $F(x)g(x)$

$$\text{prim}\big(f(x)\,g(x)\big) + \text{prim}\big(F(x)g'(x)\big) = F(x)\,g(x)$$

$$\text{prim}\left(f(x)\, g(x) \right) = F(x)\, g(x) - \text{prim}\left(F(x)\, g'(x) \right)$$

(formula per l'integrale per parti)

$\ln|x|$: trovare una primitiva

$$1 \cdot \ln|x| = f(x) \cdot g(x) \qquad F(x) = x$$

$$f(x) = 1 \qquad g(x) = \ln|x| \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{prim}\left(\ln|x|\right) = x \ln|x| - \text{prim}(1) = \underbrace{x \ln|x| - x}_{} + C$$

derivata di $x \ln|x| - x$

$$= 1 \cdot \ln|x| + \cancel{x \cdot \frac{1}{x} - 1}$$

$$= \ln|x|$$

derivata della funzione composta:

$h(x) = f(g(x))$ $\qquad y = g(x)$

$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$ dove $y = g(x)$

Quindi so fare la primitiva di

$g'(x)\, f'(g(x)) \dashrightarrow$ che è $f(g(x))$

$\cos(x) \xrightarrow{\text{primitiva}} \operatorname{sen}(x)$

$2x \cos(x^2) = g'(x) \cos(g(x)) \xrightarrow{\text{prim}} \operatorname{sen}(g(x))$

$g'(x)$ $\qquad g(x) = y$ $\qquad \operatorname{sen}(x^2)$

Verifica: derivata di $\operatorname{sen}(x^2)$

$$y = g(x) = x^2$$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$f(y) = \operatorname{sen}(y)$$

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$x^n \to n x^{n-1}$$

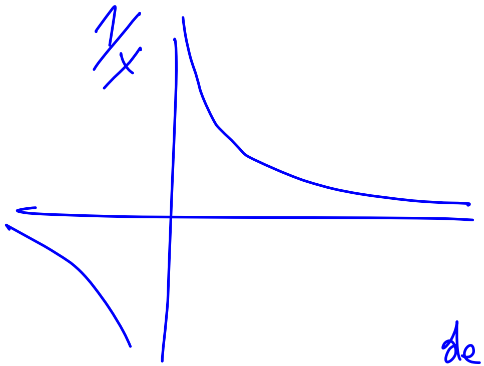
$n = -1$

$$\frac{1}{x} \to -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln|x| = \lim_{x \to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} =$$

$$0 \cdot (-\infty)$$

$$\frac{\infty}{\pm\infty}$$



$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \quad x^{\cancel{2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}} \quad \cancel{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

de l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} x \ln|x| = 0$$

Studiare $\quad x e^{-x} \qquad \dfrac{x}{1+x^2} \qquad x^3 e^{-x^2}$

Trovare la primitiva di $\dfrac{3x^2}{3} e^{x^3} = \dfrac{1}{3} e^{x^3}$

$e^y \qquad y = x^3 \quad y' = 3x^2$

Verifica: derivata di $\dfrac{e^{x^3}}{3} = \dfrac{\cancel{3}x^2 \cdot e^{x^3}}{\cancel{3}} = x^2 e^{x^3}$

Esercizi di riepilogo

$$2x + 5y = -1 \qquad -x - 3y = 2$$

Se $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ trovare la matrice A e il vettore V

tale che $AX = V$

Calcolare A^{-1}, $\det A$ e la soluzione $X = A^{-1}V$

Sia $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $\det B$, B^{-1} e B^2

Calcolare $h'(x)$ se $h(x) = \ln|\cos(x)|$

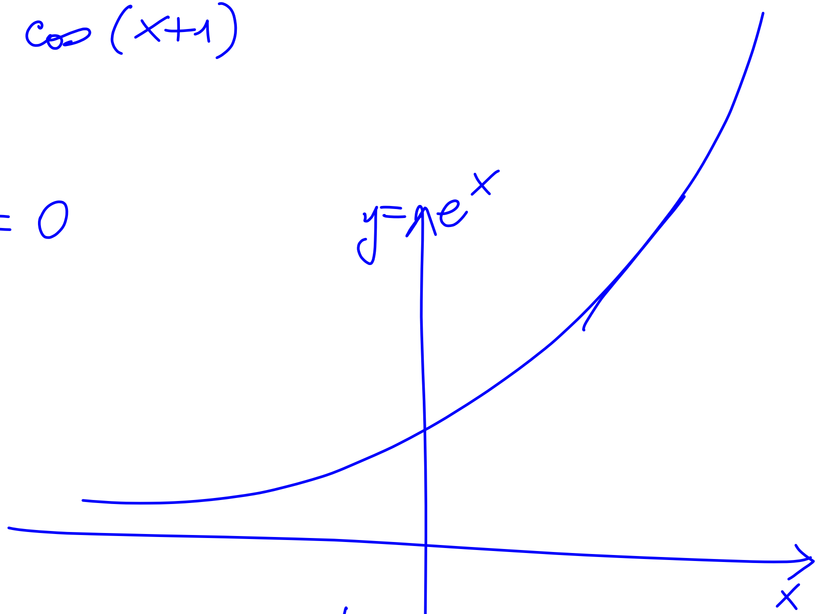
$h'(x)$ se $h(x) = x \cdot \operatorname{sen}(e^x)$

$h'(x)$ se $h(x) = x\cos(x+1)$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} = 0$$

$$\infty \cdot e^{-\infty}$$

potenza



$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}} \underset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3x^{\cancel{2}}}{e^{x^2}\cdot 2\cancel{x}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} =$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\underset{\text{Hopital}}{=} \frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0$$

$$\frac{1}{a} = a^{-1} \qquad \frac{1}{a^b} = a^{-b} \qquad \frac{1}{e^u} = e^{-u}$$

Studiare la funzione $f(x) = xe^x$

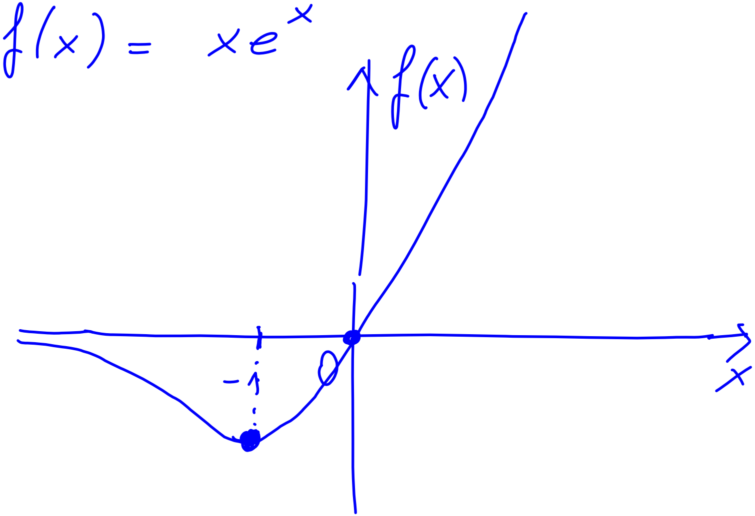
Dominio : $\mathbb{R}$

positiva in: $(0, \infty)$

negativa in: $(-\infty, 0)$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



$f(0) = 0$

derivata $= (x+1)e^x = f'(x)$

cresce in : $f'(x) > 0$ per $x+1 > 0$, $x > -1$

decresce in : $x < -1$

stazionaria in : $x = -1$

$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$

$e = 2.781\ldots$ $f(-1) \sim -4$

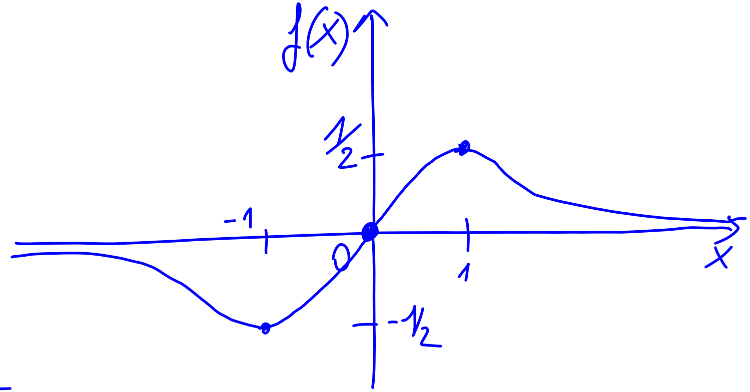
Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Dominio: $\mathbb{R}$

$x \to \infty$: $\dfrac{\infty}{\infty}$ Hopital $\dfrac{1}{2x} \Rightarrow 0$

positiva in: $(0, \infty)$

negativa in: $(-\infty, 0)$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

derivata $= f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f(-x) = -f(x)$

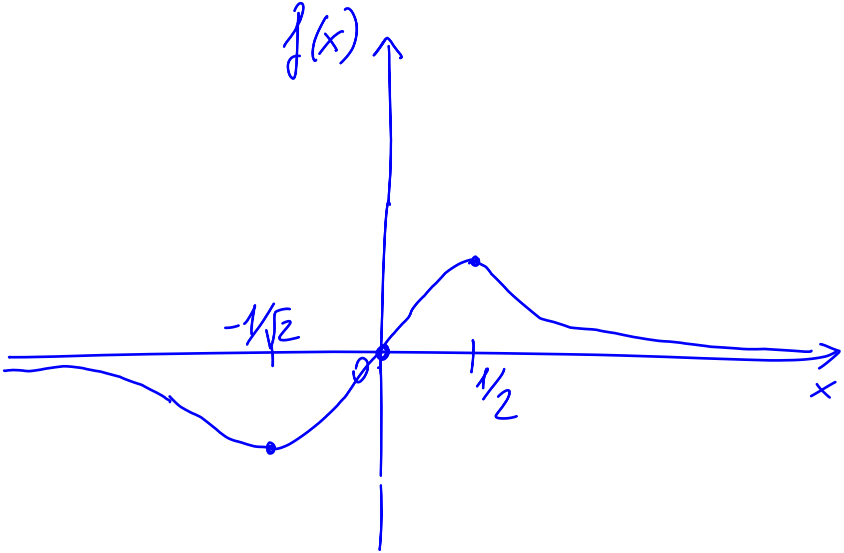
cresce in: $(-1, 1)$ $f'(x) > 0$

decresce in: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

stazionaria in: $f'(x) = 0$ in $x^2 = 1$ $x = \pm 1$

$f(0) = 0$ $f(1) = \dfrac{1}{2}$ $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

$f(x) = x e^{-x^2}$



Dominio: $\mathbb{R}$

positiva in: $(0, \infty)$

negativa in: $(-\infty, 0)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

derivata $= f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

cresce in: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

decresce in: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$

stazionaria in: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Derivata di $\ln^2|x| = f(x) = (\ln|x|)^2$

$$f'(x) = 2y \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln|x|}{x} \qquad y^2 \qquad y = \ln|x|$$

$$f(x) = \ln|x| \cdot \ln|x|$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln|x| + \ln|x| \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln|x|}{x}$$

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n\,x^{n-1}$$

$$h(x) = (g(x))^n = f(g(x)) \qquad h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$$

$$y = g(x) \qquad f(y) = y^n \qquad = n(g(x))^{n-1} g'(x)$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$$

Primitiva di $\frac{1}{x} = \ln|x|$

" " $\frac{1}{x+1} = \ln|x+1|$

" " $\frac{2x}{1+x^2} = \ln(1+x^2)$

$$f(x) = \ln(1+x^2) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$$

Primitiva di $2x e^{x^2}$ = e^{x^2}

$f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

$(2x+1) e^{x^2+x}$ primitiva = e^{x^2+x}

x^4 deriv = 4

Primitiva di $7x^3$ $\frac{7x^4}{4}$

" " $5x^6$: $\frac{5x^7}{7}$

" " $f'(x) \cdot f(x)$ è $\frac{1}{2}(f(x))^2$

derivata di $\frac{1}{2}(f(x))^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} f(x) \cdot f'(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Dominio : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

positiva in: $x>0, x>1$ o $x<0, x<1$ cioè $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$

negativa in: $(0,1)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

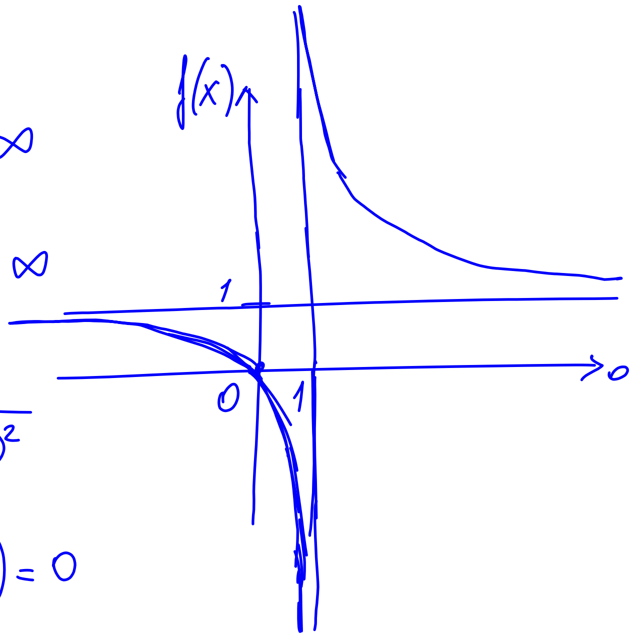
derivata $= \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

cresce in : mai

decresce in : sempre

$f(0) = 0$

stazionaria in : non ci sono



Primitiva di $\frac{1}{x}\ln|x| = f'(x)\,f(x)$

$f(x) = \ln|x|$

$= \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 = \frac{1}{2}\ln^2|x|$

Primitiva di $e^x \operatorname{sen}(e^x)$ ... è $-\cos(e^x)$

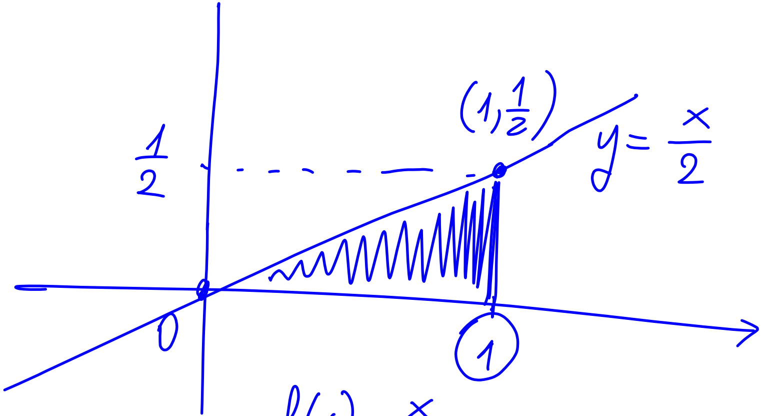
$f(x) = e^x$ $\qquad f'(x)\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$

Primitiva di $\frac{1}{2}2e^x \operatorname{sen}(2e^x)$ ... è $-\frac{1}{2}\cos(2e^x)$

$f'(x) = 2e^x \qquad f(x) = 2e^x \qquad \frac{1}{2} f'(x) \operatorname{sen}(f(x))$

Calcolare l'area di

$\frac{1}{4}$



$f(x)=\frac{x}{2}$

$y=mx+q$

$q=0$

$y=mx$

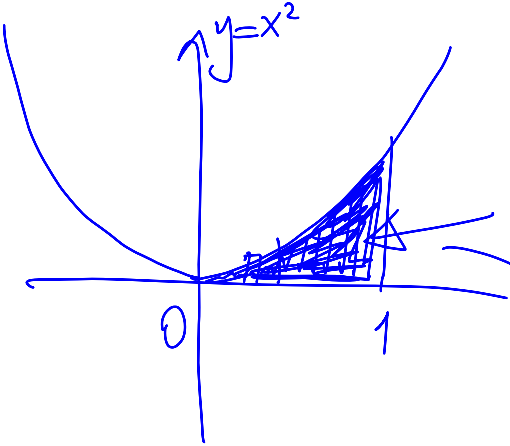
passa per $(1,\frac{1}{2})$

$\frac{1}{2}=m\cdot 1 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$

Primitiva di $\frac{x}{2}$ è $F(x)=\frac{x^2}{4}+c$

Verifica dell'area $F(1)-F(0)=\frac{1}{4}+\cancel{c}-\cancel{c}=\frac{1}{4}$

$F'(x)=f(x)$



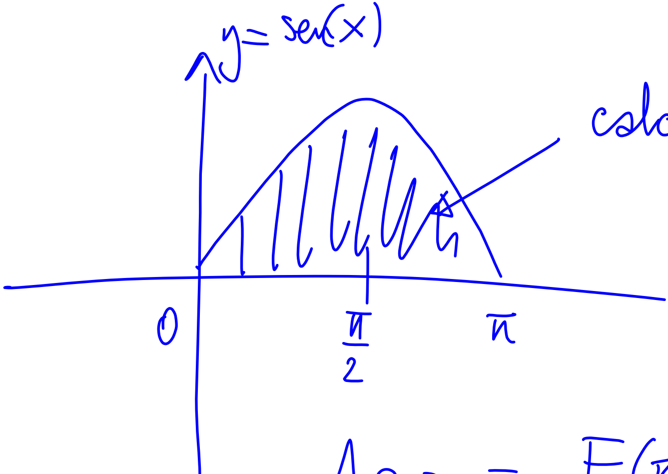
calcolare

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\text{Area} = F(1) - F(0) =$$

$$= \frac{1}{3} + \cancel{C} - \cancel{C} = \frac{1}{3}$$



calcolare

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$F(x) = -\cos(x) + C$$

$$\text{Area} = F(\pi) - F(0) = 1 + \cancel{C} - (-1 + \cancel{C}) = 2$$

Studiare $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ per $x \in [0, \sqrt{\pi}]$

$f(0) = 0$

$f(\sqrt{\pi}) = 0$

$y = x^2 = g(x) \quad f(y) = \operatorname{sen}(y)$

$h(x) = f(g(x)) = \operatorname{sen}(x^2)$

$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x)$

dove $y = g(x)$

$f'(y) = \cos(y)$

$g'(x) = 2x$

derivata: $2x \cdot \cos(x^2)$

punti stazionari: $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

cresce per: $x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$

decresce per: $x \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}\right]$

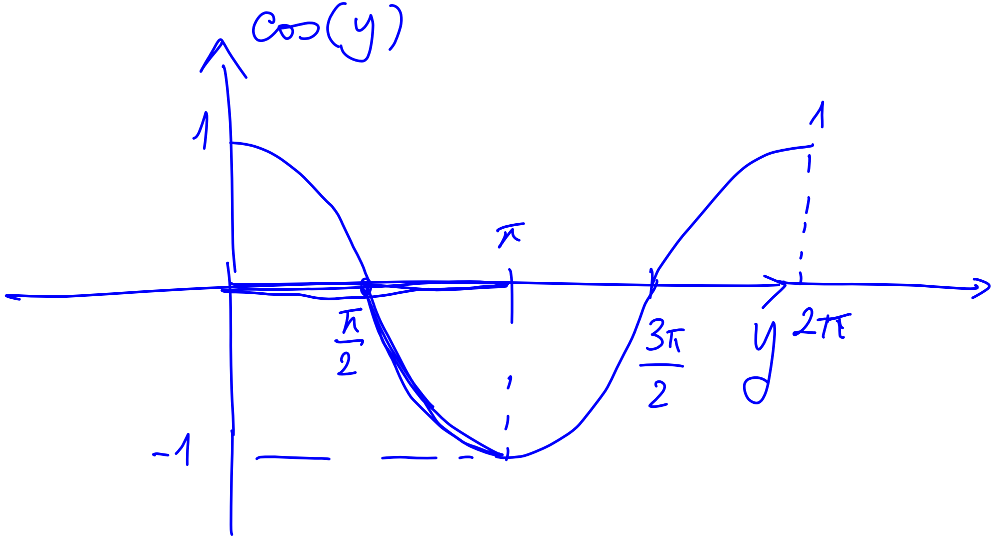
$f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\cos(y) = 0$ per

$x^2 = y = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$k = 1, 2, 3$
$-1, -2,$

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$



$\cos(y) > 0$

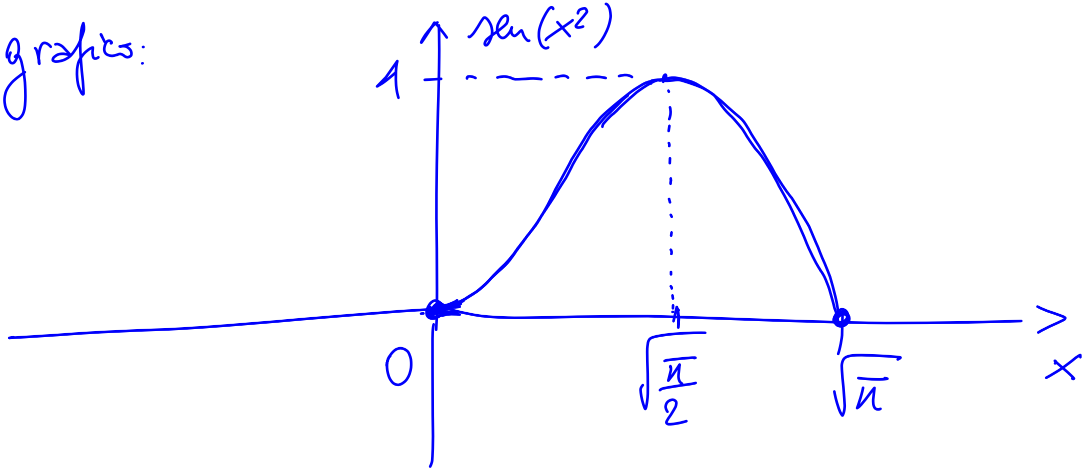
Se $x \in [0, \sqrt{\pi}]$ $\qquad x = \sqrt{y}$

$y = x^2 \in [0, \pi]$

$\cos(y) > 0$ per $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ cioè $x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$

$\cos(y) < 0$ per $y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ cioè $x \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}\right]$

grafico:



Studiare $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

$f(-x) = f(x)$ funzione pari

dominio: $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \underset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}\, e^{x^2}} =$$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \operatorname{deriv}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

$$\operatorname{deriv.}\left(e^{-x^2}\right) = -2x\, e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2x\, e^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} =$$

$$= 2x \cdot e^{-x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)$$

punti stazionari: $f'(x) = 0$ per $x = 0, \pm 1$

cresce dove $\quad x(1-x^2) > 0$

$$x(1-x)(1+x) > 0$$

$$x \cdot (1-x) \cdot (1+x) > 0$$

$+ \quad + \quad +$ $\qquad x>0, \; 1-x>0, \; 1+x>0$

$x>0, \; x<1, \; \cancel{x>-1}$

$\underline{0<x<1}$

$- \quad - \quad +$ $\qquad x<0, \; 1-x<0, \; 1+x>0$

$x<0, \; x>1$: impossibile

$+ \quad - \quad -$ $\qquad x>0, \; 1-x<0, \; 1+x<0$

$x>0, \; x<1, \; x<-1$ impossibile

$- \quad + \quad -$ $\qquad x<0 \quad 1-x>0 \quad 1+x<0$

$x < 0 \qquad 1 - x > 0 \qquad 1 + x < 0$

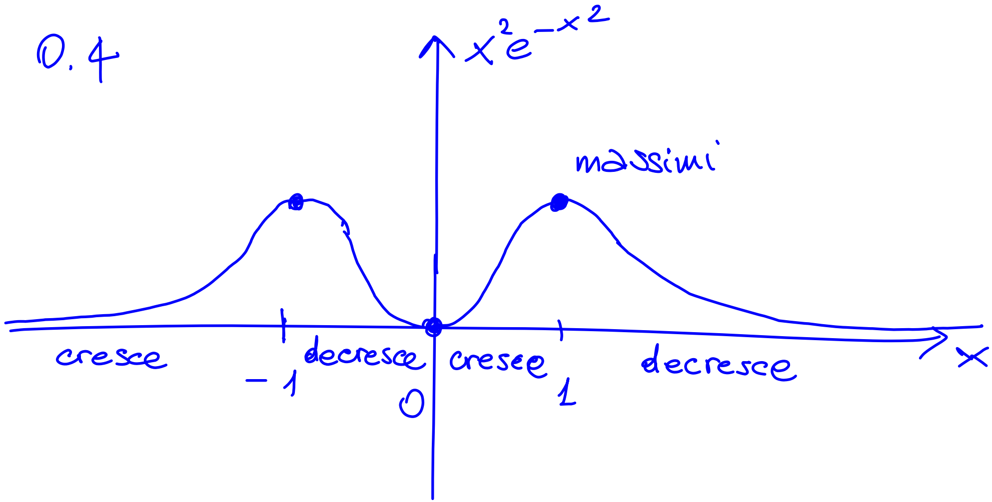
$\cancel{x < 0} \qquad \cancel{x < 1} \qquad x < -1 \qquad$ ok per $\underline{\underline{x < -1}}$

$f(x)$ cresce per $x < -1$ e $0 < x < 1$

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{2.7\ldots} \sim 0.4 \qquad f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f(-1) = 0.4$$

$$f(0) = 0$$



Studiare $f(x) = \frac{e^x}{x}$ dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \underset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$

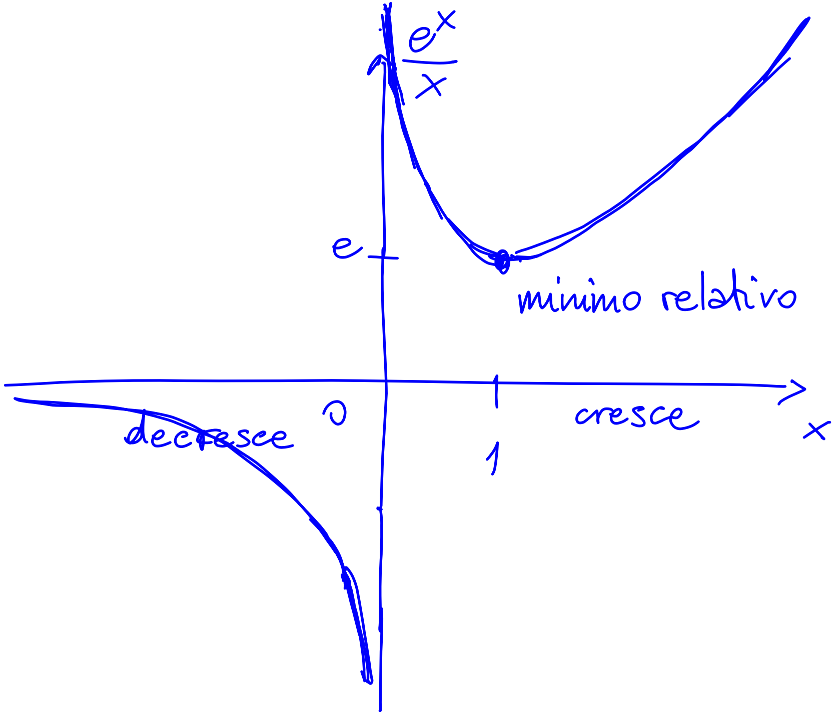
$\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$

derivata: $\frac{e^x \cdot x - 1 \cdot e^x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} e^x$

punti stazionari: $x = 1$ cresce per $x > 1$ $f(1) = e$



$\frac{e^x}{x}$
e
minimo relativo
0
1
decresce
cresce
x