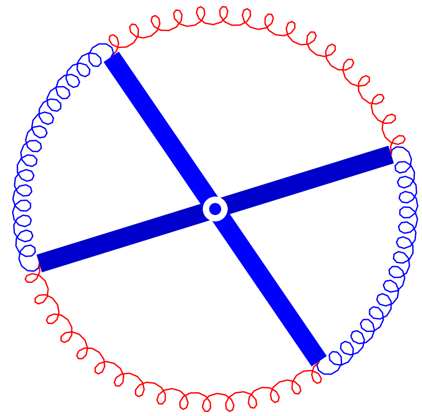
Compito di Fisica Generale I (18 Settembre 2000)

Meccanica

Due aste rigide, sottili, omogenee e di lunghezza 2ℓ e massa m sono libere di ruotare attorno al loro centro in un piano verticale. Gli estremi delle aste sono connesse come mostrato in figura da 4 molle di massa trascurabile, lunghezza a riposo nulla e costante elastica k distese su di una guida circolare. Le forze di attrito sono trascurabili. È presente un campo gravitazionale costante di intensità g.



1. Scrivere esplicitamente le costanti del moto.
2. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio.

Si mette il sistema in un campo gravitazionale con una piccola componente non costante $\boldsymbol{g} = -(g + \epsilon z)\hat{\boldsymbol{z}}$ ($z = 0$ nel centro delle aste) e lo si vuole utilizzare per misurare il gradiente di gravità ϵ

3. Scrivere esplicitamente le costanti del moto.
4. In condizioni di equilibrio, quanto varia l'angolo di equilibrio fra le due aste quando il sistema viene ruotato lentamente?
5. Sfruttando il fenomeno della risonanza è possibile ottenere maggiore sensibilità ad ϵ facendo ruotare il sistema con velocità angolare Ω opportuna. Calcolare Ω.

Soluzione:

1. *Chiamando θ_1 e θ_2 l'inclinazione delle due aste, le costanti del moto sono il momento angolare L è l'energia E:*

$$L = I(\dot\theta_1 + \dot\theta_2), \qquad E = \frac{I}{2}(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) + 8k\ell^2\varphi^2, \qquad \varphi \equiv \theta_1 - \theta_2 + \pi/2$$

dove $I = m\ell^2/3$. Il contributo totale della gravità al momento delle forze esterne ed al potenziale è zero.

2. *Si ha 'equilibrio' quando $\varphi = 0$: cioè quando le sbarre ruotano ortogonali con L costante (eventualmente $L = 0$, a seconda di come uno preferisce intendere la domanda). Scrivendo $\theta_1 = \alpha + \varphi/2$ e $\theta_2 = \alpha + \pi/2 - \varphi/2$ ($\alpha = L/2I$) si ha $E = \frac{1}{3}m\ell^2\dot\varphi^2 + 8k\ell^2\varphi^2 + \text{cte}$. Quindi, qualunque sia L, la frequenza delle oscillazioni è $\omega^2 = 24k/m$.*

3. *Ora la gravità produce un momento delle forze (per cui il momento angolare non è pi'u costante) e contribuisce all'energia potenziale. L'energia potenziale gravitazionale di un corpo puntiforme di massa m ad altezza z è $V(z) = m(gz + \epsilon z^2/2)$. Quindi l'energia potenziale di un'asta vale $V = \int_{-\ell}^{\ell} V(z)ds/2\ell = 0 + \frac{1}{6}m\epsilon\ell^2\sin^2\theta$ dove $z = s\sin\theta$. In conclusione, l'unica costante del moto è*

$$E' = E + \Delta V, \qquad \Delta V = \frac{m\epsilon\ell^2}{6}(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2)$$

4. *Il punto di equilibrio è dato da $dV/d\varphi = 0$ cioè $16k\ell^2\varphi = -\Delta V'|_{\varphi=0} = -\frac{1}{6}m\epsilon\ell^2\sin 2\alpha$. Come era ovvio è massimo per $\alpha = \pm 45^{\circ}$, e vale $\varphi = \pm m\epsilon/48k$.*

5. *Si ha la risonanza quando la forza indotta dal gradiente di gravità oscilla con la stessa frequenza ω delle piccole oscillazioni. Questo accade per $\Omega = \omega/2$ (la metà di ω perchè dopo 180 gradi il sistema ha già fatto un giro).*

Relatività

Le seguenti reazioni portano alla produzione di una particella a di massa $m_a > 0$ a partire da particelle γ di massa $m_\gamma = 0$:

$$(A)\ \ \gamma \to a, \qquad (B)\ \ \gamma \to \gamma a, \qquad (C)\ \ \gamma\gamma \to a, \qquad (D)\ \ \gamma\gamma \to \gamma a$$

1. Quali fra i processi elencati sono permessi dalla conservazione dell'energia e dell'impulso?
2. Nei processi permessi, quali valori dell'energia E_γ devono avere i fotoni rispetto al sistema del centro di massa?

Soluzione:

1. *Solo le ultime due sono possibili. In tutti i casi conviene utilizzare il sistema di riferimento in cui a è ferma.*
2. *Per la (C) serve $E_\gamma = m_a/2$, per la (D) $E_\gamma \geq m_a/2$.*

Termodinamica

Un gas di fotoni è caratterizzato dall'equazione di stato $p = \frac{1}{3}\alpha T^4$ e dall'energia interna $U = \alpha V T^4$, con $\alpha = 7.6 \cdot 10^{-16}\text{J K}^4/\text{m}^3$.

1. Rappresentare le isoterme nel piano (p, V).
2. Calcolare la capacità termica a volume costante per $V = 10^{18}\text{km}^3$ e $T = 2 \cdot 10^7\,\text{K}$ (temperatura e volume di una ipotetica stella), e la si confronti con la capacità termica di una stella di idrogeno monoatomico (gas perfetto) di massa 10^{34}g.
3. Calcolare la variazione di entropia per una trasformazione isoterma e per una trasformazione isovolumica
4. Calcolare la variazione di entropia per una generica trasformazione da T_1, V_1 a T_2, V_2.

Soluzione:

1. *rette 'orizzontali' ($p = \text{cte}$).*
2. *$C_V \equiv (\partial U/\partial T)|_V = 4\alpha V T^3 = 2.43 \cdot 10^{34}\text{J/K}$. Per un gas di idrogeno $C_V = n\frac{3}{2}R = 12.5\ 10^5\text{J/K}$ (dove $n = M/\wp_{\text{H}}$).*
3. *$dS = \delta Q/T = (dU + pdV)/T$ e $dU = 4\alpha T^3 V\,dT + \alpha T^4\,dV$. Per una isoterma $dS = \frac{4}{3}\alpha T^3 dV$, cioè $\Delta S = \frac{4}{3}\alpha T^3 \Delta V$. Per una isovolumica $dS = 4\alpha T^2 V\,dT$, quindi $\Delta S = \frac{4}{3}\alpha V \Delta(T^3)$.*
4. *in generale $dS = 4\alpha T^2 V\,dT + \frac{4}{3}\alpha T^3\,dV$, cioè $S = \frac{4}{3}\alpha T^3 V$. Quindi una trasformazione adiabatica $S = \text{cte}$ ha $V \propto 1/T^3$.*

Compito di Fisica Generale I (17 Luglio 2000)

Meccanica

Una semisfera di raggio R è fissata su un piano (tipo igloo). Sulla sommità c'e' una sferetta omogenea di massa m e raggio a. La sferetta comincia a rotolare, ad un certo punto si stacca e colpisce il piano. Nell'urto la velocità verticale si azzera e quella orizzontale rimane invariata. Fra sferetta e piano c'è un coefficiente di attrito dinamico μ_c.

1. Calcolare a che angolo $\bar{\theta}$ dalla verticale si stacca la sferetta.
2. Calcolare per $\theta = \bar{\theta}$ il valore della forza di contatto fra sferetta e semisfera.
3. Calcolare la velocità del punto di contatto fra sferetta e piano subito dopo l'urto
4. Calcolare la velocità con cui, a regime, la sferetta rotola senza strisciare sul piano.

Soluzione:

1. *Si stacca quando servirebbe una reazione vincolare $R_\rho < 0$ nell'equazione del moto*

   $$ma_\rho = -m(R+a)\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_\rho$$

   La conservazione dell'energia fornisce il valore di $\dot{\theta}$ in funzione di θ: chiamando α la velocità angolare di rotazione ($\dot{\alpha} = v_{\text{CM}}/a$)

   $$E_0 = 0 = E = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_{\text{CM}}^2 + \frac{I}{2}\dot{\alpha}^2 + mgz = \frac{m}{2}(R+a)^2(1+\frac{I}{a^2})\dot{\theta}^2 + mg(R+a)[\cos\theta - 1]$$

   quindi $(R+a)\dot{\theta}^2 = (1-\cos\theta)10g/7$ e $R_\rho = 0$ a $\cos\theta = 10/17$, cioè $\theta \approx 54^o$.

2. $R_\rho = 0$. *La componente R_θ — necessaria per mantenere il moto di puro rotolamento – si ottiene inserendo l'equazione del moto per θ*

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin\theta}{R+a}\frac{5g}{7} \qquad \textit{in} \qquad F_\theta = m(R+a)\ddot{\theta} = R_\theta + mg\sin\theta$$

da cui $R_\theta = -\frac{2}{7}mg\sin\theta$.

3. *Al momento del distacco la velocità angolare vale* $\dot{\theta}^2 = 10g/17(R+a)$ *ed il centro di massa ha velocità orizzontale* $v_{\text{CM}x} = (R+a)\dot{\theta}\cos\theta = (10/17)^{3/2}\sqrt{g(R+a)}$. *Durante la caduta rimangono costanti. La veloctà del punto di contatto è*

$$v_x = v_{\text{CM}x} - a\dot{\theta} = (10/17)^{3/2}(R - \frac{7a}{10})\sqrt{\frac{g}{a+R}} > 0$$

4. *La forza d'attrito riduce il momento angolare ma anche l'impulso:* $\Delta p_z = F\Delta t = \Delta L/a$. *La sferetta smette di strisciare quando* $\Delta L = Iv_x/a$. *A quel momento*

$$v_{\text{CM}x}(\text{a regime}) = v_{\text{CM}x} - \frac{I}{m}\frac{v_x}{a^2} = \frac{2}{17}\sqrt{\frac{2}{85}\frac{g}{a+R}}(32a+15R)$$

Relatività

Una particella di massa M ed energia $E = 10Mc^2$ decade in due particelle di massa $M/4$.

1) trovare il massimo angolo che una particella prodotta può fare con la direzione di volo della particella che decade.

2) Scrivere per tale angolo il valore dell'energia della particella.

Soluzione:

1. *Conviene usare il sistema del CM, legato al sistema iniziale da una trasformazione di Lorentz con* $\gamma = 10$. *Nel CM le particelle di massa* $m = M/4$ *hanno* $E_{\text{CM}} = M/2 = 2m$ *e quindi impulso* $p_{\text{CM}} = m\sqrt{\gamma_{\text{CM}}^2 - 1} = M\sqrt{3}/4$ *e direzione arbitraria* θ_{CM}. *Nel sistema originario l'angolo di decadimento è*

$$\tan\theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p_{\text{CM}}\sin\theta_{\text{CM}}}{\gamma(p_{\text{CM}}\cos\theta_{\text{CM}} + \beta E_{\text{CM}})} = \frac{\sin\theta_{\text{CM}}}{10\cos\theta_{\text{CM}} + 6\sqrt{11/3}}$$

θ è massimo quando $d\tan\theta/d\theta_{\text{CM}} \propto (5 + \sqrt{33}\cos\theta_{\text{CM}}) = 0$, *cioè per* $\theta_{\text{CM}} = \arccos(5/\sqrt{33}) \approx 150^{\text{o}}$ *e vale* $\tan\theta = \sqrt{3/(\gamma^2-4)}$, *cioè* $\theta \approx 10^{\text{ocirc}}$. *Se m/M o γ fossero stati troppo piccoli qualunque angolo sarebbe stato possibile.*

2. $E = \gamma(E_{\text{CM}} + \beta p_{\text{CM}}\cos\theta_{\text{CM}}) = 5M/4$.

Termodinamica

n moli di un gas perfetto monoatomico si trovano in uno stato A con pressione p e volume V. Si porta il gas con un'espansione adiabatica (irreversibile) in uno stato B con $p_B = 2p$ e $V_B = 2V$. Quindi con una isocora reversibile si porta in C, con $p_C = p$ ed infine il ciclo si chiude con una trasformazione isobara reversibile da C a A.

1) Calcolare il lavoro (col segno) effettuato dal gas nel ciclo.

2) Calcolare la variazione di entropia totale (gas + sorgenti) durante il ciclo.

3) Supponiamo ora che la trasformazione $A \to B$ invece di essere adiabatica possa avvenire a contatto con una sorgente termica a temperatura T_B. In questo caso qual'è il massimo lavoro che il ciclo può compiere?

Soluzione:

1. *Siccome* $T_C = 4T_A$ *e* $T_B = 2T_A$, $C_V = 3R/2$, $C_p = C_V + R$

$$L = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0 + nC_V(T_C - T_B) + nC_p(T_A - T_C) = -\frac{11}{2}nRT_A$$

2. *Sapendo che la prima trasformazione è adiabatica e le altre sono reversibili non occorre sapere in dettaglio come funzionano le sorgenti*

$$\Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{sorg}} = 0 + \Delta S_{\text{sorg}} = -\Delta S_{\text{gas}}^{BC} - \Delta S_{\text{gas}}^{CA} = -nC_V\ln\frac{T_C}{T_B} - nC_p\ln\frac{T_A}{T_C} = 4nR\ln 2 > 0$$

3. *Chiamando $L' = Q_{AB} - \frac{11}{2}nRT_A$ il lavoro del nuovo ciclo e Q_{AB} il calore scambiato dal gas nella trasformazione AB, si ha*
$$\Delta S'_{\rm tot} = -\frac{Q_{AB}}{T_B} + 4nR\ln 2 \geq 0$$
e quindi $L' \leq \frac{1}{2}nRT_A(-11 + 32\ln 2)$.

3'. *Altro modo di rispondere. Il lavoro fatto durante AB vale*
$$L_{AB} = T_B \int \frac{\delta Q}{T_B} - \int dU \leq T_B \Delta S_{AB} - \Delta U_{AB} = nRT_A(16\ln 2 - \frac{9}{2})$$
Quindi $L_{\rm tot} \leq L_{AB} + 0 + L_{CA} = L_{AB} - p_A V_A = nRT_A(16\ln 2 - \frac{11}{2})$. Esplicitamente, l'unica trasformazione AB reversibile è una adiabatica AX fino $T_X = T_B$ (e quindi $p_X = 32P_A$, $V_X = V_A/8$) seguita da una isoterma XB. In questo modo quando il gas scambia calore con la sorgente ha la sua stessa temperatura. Il lavoro vale $L_{AB} = L_{AX} + L_{XB} = nC_V(T_B - T_A) + nRT_B \ln(V_B/V_X)$ e coincide con il lavoro massimo ottenuto in precedenza.

Compito di Fisica Generale I (12 Giugno 2000)

Meccanica

Un pianeta sferico di raggio R ruota attorno a un suo asse di simmetria con velocità angolare Ω. Un'astronave si trova in orbita sincrona (stesso periodo di rotazione del pianeta) a un distanza $5R$ dal centro.

1. Determinare l'intensità del campo gravitazionale alla superficie del pianeta.

Il comandante dell'astronave decide di far atterrare un modulo sulla superficie del pianeta in modo tale che, durante la discesa, il modulo rimanga sempre sulla verticale dell'astronave. Durante la discesa, il computer di bordo regola il motore del modulo in modo che quest'ultimo scenda lungo il raggio che unisce l'astronave al centro del pianeta, con velocità relativa rispetto all'astronave di modulo $v_{rel}(t) = v_0 \sin(\frac{\Omega}{2}t)$. Si trascuri la variazione di massa del modulo durante il funzionamento dei motori. Determinare:

2. Il valore di v_0 in modo che il modulo atterri sul pianeta esattamente dopo che questo abbia fatto una rotazione completa.
3. L'accelerazione del modulo in funzione del tempo.
4. La forza F_m applicata dal motore sul modulo al tempo $t = 0$, $t = T/2$ e $t = T$ dove T è il periodo di rotazione del pianeta.
5. Il lavoro fatto dal motore di bordo durante la discesa del modulo.

Soluzione:

1. *$v^2/(5R) = GM/(5R)^2 = g/25$. Quindi $g = 5v^2/R = 125\Omega^2 R$.*
2. *Arriva al tempo $t_A = 2\pi/\Omega$ con velocità verticale $0 = v_{\rm rel}(t_A)$ e velocità orizzontale uguale a quella della superficie del pianeta. Serve che $4R = \int_0^{t_A} v_{\rm rel}(t')dt' = 4v_0/\Omega$, quindi $v_0 = R\Omega$.*
3. *In coordinate polari $\dot\rho = -v_{\rm rel}$, e $\dot\theta = \Omega$ quindi $\rho(t) = R[3 + 2\cos\Omega t/2]$ e $\theta(t) = \Omega t$ e*
$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\theta^2 = -\frac{\Omega^2 R}{2}(6 + 5\cos\frac{\Omega}{2}t), \qquad a_\theta = \rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta = -2R\Omega^2 \sin\frac{\Omega}{2}t$$
4. *$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\rm m} - \hat{\boldsymbol{\rho}}GmM/\rho^2$. Quindi $\boldsymbol{F} = (F_\rho, F_\theta) = m(a_\rho + gR^2/\rho^2, a_\theta)$. A $t = 0$ $\boldsymbol{F} = R\Omega^2(-1/2, 0)$. A $t = T/2 = \pi/\Omega$ $\boldsymbol{F} = R\Omega^2(98/9, -2)$. $A = t = T = 2\pi/\Omega$ $\boldsymbol{F} = R\Omega^2(249/2, 0)$.*
5. *$L = \Delta K + \Delta U = \dfrac{m}{2}(1 - 25)(R\Omega)^2 - \dfrac{GMm}{R}(1 - \dfrac{1}{5}) = -m(R\Omega)^2[24 + 100] = -124m(R\Omega)^2$. Il lavoro è negativo in quanto i motori servono a rallentare la discesa del modulo.*

Relatività

Un neutrino di massa zero ed energia E_ν proveniente dal sole urta un elettrone in quiete sulla terra. Dopo l'urto $e\nu \to e'\nu'$ l'elettrone si muove con energia $E'_e = m_e c^2 + K'_e$ in direzione θ rispetto alla direzione del neutrino incidente.

1. Assumendo che K'_e e θ vengano misurati, calcolare E_ν.

2. Assumendo che solo K'_e venga misurato, porre il miglior limite inferiore su E_ν.

Soluzione: *Impongo la conservazione del quadri-impulso: $P_\nu + P_e = P'_\nu + P'_e$ dove $P_e = (m_e, 0, 0, 0)$, $P_\nu = (E_\nu, E_\nu, 0, 0)$ e $P'_e = (E'_e, p'_e \cos\theta, p'_e \sin\theta, 0)$ (in unità $c = 1$). Siccome P'_ν non mi interessa riscrivo la legge di conservazione come $P'_\nu = P_\nu + P_e - P'_e$ e ne prendo il modulo quadro, ottenendo*

$$0 = 0 + 2m_e^2 + 2m_e E_\nu - 2m_e E'_e - 2E_\nu(E'_e - p'_e \cos\theta), \qquad \textit{dove} \quad p'_e = \sqrt{E'^2_e - m_e^2}$$

e quindi

$$E_\nu = \frac{m_e}{\cos\theta\sqrt{(E'_e + m_e)/(E'_e - m_e)} - 1} = \frac{m_e}{\cos\theta\sqrt{1 + 2m_e/K'_e} - 1}$$

Futuri esperimenti di neutrini solari misureranno in questo modo l'energia del neutrini. Al momento θ non viene misurato. In tal caso, per un dato E_ν, E'_e è massimo quando $\theta = 0$ (urto in avanti), quindi $E_\nu > E'_e(\cos\theta = 1) = K_e(1 + \sqrt{1 + 2m_e/K'_e})/2$. Nel limite $K'_e \gg m_e$ si ridue all'ovvio limite meno vincolante $E_\nu > E'_e - m_e = K'_e$.

Termodinamica

Due recipienti cilindrici di uguale volume $V_0 = 10$ l sono connessi tra loro tramite un tubo chiuso per mezzo di un'elettrovalvola controllabile dall'esterno. Il cilindro 1 contiene 10 moli di gas perfetto biatomico mentre il cilindro 2, chiuso ad un'estremità da un pistone mobile manovrabile dall'esterno è inizialmente vuoto. I due cilindri sono immersi in un bagno termico, che funge da sorgente termica ideale, alla temperatura $T_B = 300$ K. Tramite un comando esterno si apre l'elettrovalvola e si aspetta il tempo necessario affinché tutto il sistema torni nuovamente all'equilibrio termico e meccanico. Determinare:

1. La quantità di calore assorbita dal gas.

2. La variazione di entropia del gas.

3. La variazione di entropia della sorgente termica.

Manovrando il pistone dall'esterno, e facendo un lavoro $\mathcal{L}$, si riporta tutto il gas nel cilindro 1. In funzione del lavoro fatto determinare:

4. Il calore assorbito dalla sorgente termica durante quest'ultima trasformazione.

5. La variazione di entropia del gas.

6. La variazione di entropia della sorgente.

7. Il lavoro minimo necessario per riportare il tutto il gas all'interno del cilindro 1.

Soluzione:

1. $Q = \Delta U + L = 0 + 0 = 0$.

2. $\Delta S_{\rm gas} = nR\ln(V+V)/V = nR\ln 2$

3. $\Delta S_{\rm sorg} = Q_{\rm sorg}/T = -Q/T = 0$.

4. $Q = \Delta U + L = L$ *con* $L < 0$ *(il gas 'riceve' lavoro) e* $Q < 0$ *(in quanto il gas cede calore).*

5. $\Delta S'_{\rm gas} = -\Delta S$.

6. $\Delta S'_{\rm sorg} = -L/T$.

7. $\Delta S_{\rm gas} + \Delta S_{\rm sorg} = -nR\ln 2 - L/T \geq 0$, *quindi* $|L| \geq nRT\ln 2$. *Il lavoro minimo lo si realizza lungo un'isoterma reversibile* $L = \int p dV = nRT \int dV/V = nRT ln V_F/V_I = -nRT\ln 2$.

Meccanica

Una pallina è schematizzata come una sfera omogenea, rigida, di massa M e raggio R. La pallina si sta muovendo su un piano verticale $x - z$, e ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse parallelo al versore dell'asse y. Ad un certo istante, la pallina urta un piano orizzontale $x - y$, con un angolo di 45°. Subito prima dell'urto il C.M. della pallina ha velocitià $v_x = v = -v_z$. L'urto è caratterizzabile con due coefficienti di restituzione, così definiti: indicando con $\vec{w}$ la velocità del punto di contatto subito prima dell'urto e con $\vec{w}'$ la velocità del punto di contatto subito dopo l'urto, si ha $w'_x = -ew_x$ e $w'_z = -w_z$.

1. Si calcolino la velocità angolare e la velocità del C.M. dopo un urto, per $e = 1$.

2. Si calcolino la veloctà angolare e la velocità del C.M. dopo un urto, per $e = 0$.

3. Calcolare la variazione di energia cinetica, nei due casi $e = 1$ e $e = 0$.

4. Calcolare l'impulso trasferito al piano nell'urto, nei due casi $e = 1$ e $e = 0$. Scrivere la relazione tra la variazione di energia cinetica e impulso trasferito.

5. Per $0 < e < 1$, la pallina dopo un certo numero di rimbalzi tende a una velocità di traslazione e di rotazione limite: calcolarle.

Soluzione:

1. *La velocità del punto di contatto (prima e dopo l'urto) $w_x = \omega R + v_x$ ($\omega = \omega_0$ nel testo) $w'_x = \omega' R + v'_x$. So che $w'_x = -ew_x$, ma una sola equazione non basta per trovare le due incognite w'_x e ω'. So anche che il momento angolare rispetto al punto 'di urto' è costante il momento della forza di reazione vincolare è zero. Il momento angolare è la somma del momento angolare dovuto alla rotazione rispetto al centro di massa ($I = \frac{2}{5}MR^2$), più il momento angolare dovuto al moto del centro di massa: $L = L_y = I\omega + MRv_z = I\omega_0 - MRv$. Imponendo anche la conservazione del momento angolare*

$$\omega' R + v' = -e(\omega R + v), \qquad I\omega' - MRv = I\omega - MRv'$$

si trova, per un generico e

$$\omega' = \frac{2-5e}{7}\omega - \frac{5}{7}(1+e)\frac{v}{R}, \qquad v' = \frac{5-2e}{7}v - 2(1+e)\omega R$$

Per $e = 1$ diventano

$$\omega' = -\frac{3\omega + 10v/R}{7} \qquad v' = \frac{3v - 4R\omega}{7}$$

In questo caso la pallina può rimbalzare avanti ed indietro.

2. *Per $e = 0$ diventano*

$$\omega' = \frac{2\omega - 5v/R}{7} \qquad v' = \frac{5v - 2R\omega}{7}$$

3. *Siccome $v'_z = v_z$*

$$\Delta E = E' - E = \frac{M}{2}(v'^2_x - v^2_x) + \frac{I}{2}(\omega'^2 - \omega^2) = \frac{1}{7}(e^2 - 1)M(v + R\omega)^2$$

Per $e = 1$ l'energia è costante, mentre per $e = 1$ $E' < E$.

4. *$\Delta \boldsymbol{p} = M(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})$. In componenti $\Delta p_z = 2Mv_z$ e $\Delta p_x = -\frac{2}{7}(1+e)M(v + R\omega)$. Quindi*

$$\frac{\Delta E}{\Delta p_x} = (1-e)\frac{v + R\omega}{2} = \frac{w_x + w'_x}{2}$$

Questo risultato è istruttivo: scrivendo la variazione di energia cinetica come il lavoro delle forze di contatto $\Delta E = \int \boldsymbol{F}_C \cdot \boldsymbol{v}_C \, dt = \Delta \boldsymbol{p} \cdot \langle \boldsymbol{v}_C \rangle$ si scopre che quello che conta è la velocità media *$\langle \boldsymbol{v}_C \rangle$ del punto di contatto. Quando essa è zero l'urto è elastico. La stessa cosa è vera in urti più generali (ad esempio in un urto perfettamente anelastico, vedi esercizio a pagina* **??**.

5. *La relazione di riflessione $\omega_{n+1}R + v_{n+1} = -e(\omega_n R + v_n)$ è stabile se $v_n = -R\omega_n$ e $v_{n+1} = -R\omega_{n+1}$. Il momento angolare è conservato se $v_{n+1} = v_n$ e vale $L_n = -\frac{7}{5}\omega R v_n$. Imponendo che esso sia uguale al momento angolare iniziale si trova $v_n = (5v - 2\omega R)/7$.*

Relatività

Una particella di massa $m_1 = 4m/5$ in moto con energia E_1 lungo l'asse x collide elasticamente con una particella di massa $m_2 = m$ ferma. Dopo l'urto la particella di massa m_1 ha energia E_1' e direzione ortogonale all'asse x; la particella di massa m_2 si muove lungo una direzione che forma un angolo θ rispetto all'asse x.

1. Quanto vale E_1'?
2. Quanto vale θ?

Soluzione:

1. *Il quadri impulso si conserva: $P_1+P_2 = P_1'+P_2'$. Siccome non mi interessa P_2' la riscrivo come $P_2' = P_1+P_2-P_1'$ e prendo il modulo quadro dei due membri. Si trova $E_1' = (m_1^2 + E_1 m_2)/(E_1 + m_2)$. Questa soluzione ha senso (si ha cioè $E_1 > m_1$) solo se $m_2 > m_1$.*
2. *Per la conservazione dell'impulso $p_{2x}' = p_1$ e $p_{2\perp}' = -p_1'$. Quindi*

$$\tan\theta = \frac{p_1'}{p_1} = \sqrt{\frac{E_1'^2 - m_1^2}{E_1^2 - m_1^2}} = \frac{\sqrt{m_2^2 - m_1^2}}{E_1 + m_2} = \frac{3}{5}\frac{m_2}{E_1 + m_2}$$

Termodinamica

Consideriamo una pellicola sottile, ad esempio la superficie di una bolla di sapone. Si sa che il lavoro effettuato dal sistema in una espansione dell'area pari a dA vale $\delta\mathcal{L} = -\sigma(T)dA$, dove T è la temperatura del sistema e σ è legata alla tensione superficiale della pellicola.

1. Usando il primo ed il secondo principio della termodinamica trovare l'espressione dell'energia interna in funzione di $\sigma(T)$ e delle sue derivate rispetto a T. (Si consiglia di cercare una soluzione della forma $U(T, A) = \alpha(T)A$).
2. Scrivere l'espressione per l'entropia del sistema.
3. Supponiamo che $\sigma(T) = \sigma_a - \sigma_b T$. Tracciare nel piano (A, T) un ciclo di Carnot che operi tra due sorgenti a temperatura T_1 e T_2, con $T_1 > T_2$. Derivare esplicitamente il rendimento del ciclo, verificando che obbedisca la relazione nota.

Soluzione: *Per una bolla (o un buco nero) A gioca lo stesso ruolo che aveva V in un gas.*

1. *Abbreviando $\alpha' \equiv \partial\alpha/\partial T$ etc $dU = A\alpha' dT + \alpha dA$, quindi*

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + \delta L}{T} = \frac{A\alpha'}{T}dT + \frac{\alpha - \sigma}{T}dA = S_T dT + S_A dA$$

Imponendo che dS sia un differenziale, cioè che le derivate in croce siano uguali $S_{TA} + S_{AT}$ si ottiene

$$\frac{1}{T}\frac{\partial\alpha}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\alpha - \sigma}{T}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -T^2\frac{\partial}{\partial T}\frac{\sigma}{T} = \sigma - T\sigma'$$

2. *A questo punto inseriamo nell'espressione di dS il valore di α ed integriamo. Usando $\alpha' = -T\sigma''$*

$$dS = -\sigma'' A\; dT - \sigma' dA \qquad \Rightarrow \qquad S = -\sigma' A$$

3. *Se $\sigma = \sigma_a - \sigma_b T$ allora $U = \sigma_a A$ e $S = \sigma_b A$ non dipende da T. In un piano $(x, y) = (A, T)$ le adiabatiche sono rette verticali e le isoterme sono rette orizzontali: quindi il un ciclo di Carnot è un rettangolo. Il lavoro fatto ed il calore scambiato lungo un isoterma a temperatura T valgono*

$$L = -\sigma(T)\Delta A, \qquad Q = \Delta U + \mathcal{L} = \sigma_a\Delta A - \sigma(T)\Delta A = \sigma_b T\;\Delta A$$

mentre durante un adiabatica non viene scambiato calore e per questo sistema non viene neanche eseguito lavoro. Quindi eseguendo il ciclo in senso $A \to B \to C \to D$ orario (con A il punto in alto a sinistra del rettangolo):

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= T_1\sigma_b(A_2 - A_1) > 0 \\ Q_{CD} &= T_2\sigma_b(A_1 - A_2) < 0 \\ L_{AB} &= -(\sigma_a - \sigma_b T_1)(A_2 - A_1) \\ L_{CD} &= -(\sigma_a - \sigma_b T_2)(A_1 - A_2) \end{aligned}$$

In totale il lavoro prodotto durante il ciclo ed il calore assorbito valgono

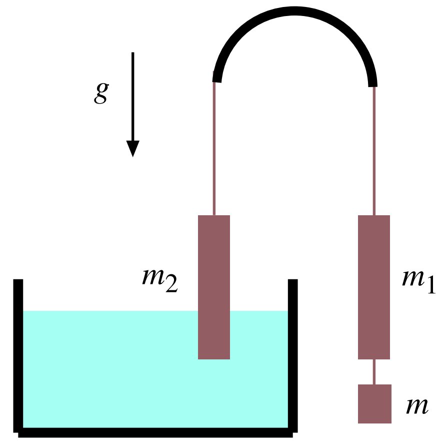
$$L = L_{AB} + L_{CD} = (A_2 - A_1)\sigma_b(T_1 - T_2) \qquad Q_{\rm ass} = Q_{AB} = T_1\sigma_b(A_2 - A_1) \qquad \eta = \frac{L}{Q_{\rm ss}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

in accordo con il teorema di Carnot.

Compito di Fisica Generale I (4 Ottobre 1999)

Meccanica

Tre corpi di masse $m = 2\,\mathrm{g}$, $m_1 = 113\,\mathrm{g}$ e $m_2 = 121\,\mathrm{g}$ sono collegati tra loro, come illustrato in figura, da un filo inestensibile di massa trascurabile che può scorrere senza attrito su un supporto a forma di $\cap$ appeso al soffitto. Il corpo di massa m_2 è un cilindro di altezza $h = 15.5\,\mathrm{cm}$, densità $\rho = 7.80\,\mathrm{g}/cm^3$, ed è immerso parzialmente in un recipiente, contenente acqua (densità $\rho_A = 1\,\mathrm{g/\,cm^3}$), di dimensioni tali che il livello del liquido non subisca variazioni misurabili in seguito all'immersione del cilindro e che questo non tocchi il fondo. La forza di attrito tra il fluido ed il cilindro è descritta dalla relazione $\vec{F}_A = -\gamma\vec{v}$, dove $\gamma = 3.90\ 10^{-2}\,\mathrm{kg/\,s}$ e $\vec{v}$ è la velocità del cilindro.



1. In condizioni di equilibrio determinare l'altezza della parte immersa del cilindro di massa m_2.
2. All'istante $t = 0$ si taglia il filo che collega la massa m a m_1. Scrivere l'equazione del moto del sistema per $t \geq 0$.
3. Verificare che in queste condizioni il moto è oscillatorio e determinare la differenza tra la frequenza delle oscillazioni libere ($\gamma = 0$) e quelle smorzate.
4. Scrivere esplicitamente la legge oraria del moto corrispondente alle condizioni iniziali descritte al punto 2. Verificare che il cilindro rimane sempre parzialmente immerso nell'acqua.

Soluzione:

1. *Detta $x > 0$ la parte immersa, sul cilindro 1 agisce la forza $F_1 = (m_2 - m_1 - m)g - \rho_A Sgx$. Si ha equilibrio quando $F_1 = 0$, cioè per $x = x_{\rm eq} = (m_2 - m_1 - m)g/\rho_A S = 0.06\,m$. Il cilindro 2 è lungo $\ell_2 = m_2/S\rho = 0.15\,m$, quindi è solo parzialmente immerso.*

2. *L'equazione del moto è $(m_1 + m_2)\ddot{x} = (m_2 - m_1)g - \rho_A Sgx - \gamma\dot{x}$. (Si ricava facilmente scrivendo due equazioni per le due masse 1 e 2, ed usando $\tau_1 = -\tau_2$ ed $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$). Il nuovo punto di equilibrio $x'_{\rm eq}$ è $\delta x_{\rm eq} = 2$ cm più in alto. Quindi il cilindro risale al massimo di 4 cm: rimane quindi sempre parzialmente immerso.*

3. *Spostando l'origine possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma $\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\dot{x}/\tau$. La soluzione (quasi) generale di tale equazione differenziale è $x(t) = Re\,[c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}]$ dove*

$$\gamma_i = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega^2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega'$$

Se $\omega\tau > 1$ allora γ_i è complesso e la soluzione è oscillatoria. Nel nostro caso $\omega^2 = \rho_A Sg/(m_1+m_2)$ ($1/\omega = 0.49\,s$) e $\tau = 2(m_1 + m_2)/\gamma = 12\,s$, quindi $\omega\tau = 24.5 > 1$. La frequenza dell'oscillazione smorzata vale $\omega' = 2.0448/\,s < \omega = 2.0465/\,s$.

4. *La soluzione può essere scritta nelle forme $x(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\omega_0 t + \varphi) = e^{-t/\tau}[A_C\cos(\omega_0 t) + A_S\sin(\omega_0 t)]$. Per le condizioni iniziali in b. $x(0) = A_C = -2$ cm e $\dot{x}(0) = A_C\beta/2 + A_S\omega_0 = 0$, da cui $A_S = -2\,cm/\tau\omega_0 = -0.081$.*

   Con ottima approssimazione corrsiponde ad $A = -2.0016\,cm \approx -2\,cm$ e $\phi = -0.04$.

Relatività

Due particelle di egual massa 1 e 2 hanno equazioni della traiettoria

$$\begin{cases} x_1(t) = vt \\ y_1(t) = 0 \\ z_1(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 0 \\ y_2(t) = d + vt \\ z_2(t) = 0 \end{cases}$$

1. Trovare il modulo della velocità del riferimento del centro di massa.
2. Quale è la minima distanza di avvicinamento fra le due particelle rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la prima particella?
3. Come variano le risposte alle domande precedenti se le particelle si muovono con velocità non relativistica?

Soluzione:

1. *Siccome le due particelle hanno egual modulo della velocità, capita che il risultato finale coincide con quello non-relativistico*
$$\boldsymbol{v}_{\rm CM} = \frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2}{E_1 + E_2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$$

2. *Eseguendo una trasformazione di Lorentz si trovano le equazioni del moto delle due particelle rispetto al sistema S' solidale con la prima particella*
$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - vt_1) = 0 \\ y_1' = 0 \\ z_1' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = -\gamma v t_2 \\ y_2' = d + vt_2 \\ z_2' = 0 \end{cases}$$
la distanza vale $d^2(t_2) = (d + vt_2)^2 + (\gamma v t_2)^2$. La distanza minima si ha al tempo $t_2 = -dv/(1+\gamma^2)$ e vale $d_{\min} = d(1+\gamma^{-2})^{-1/2} = d/\sqrt{2 - v^2/c^2}$.

3. *La prima non cambia, la seconda viene d.*

Termodinamica

Un gas, la cui capacità termica a volume costante vale $\mathcal{C}_V = 100\,\mathrm{J/\,K}$, compie un ciclo di trasformazioni reversibili costituito da:

a. riscaldamento a volume costante dalla temperatura iniziale $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ alla temperatura $T_2 = 400\,\mathrm{K}$;

b. trasformazione per cui la capacità termica è una funzione delle temeratura T, data da $C = \mathcal{C}_V(1 + T/T_*)$, con $T_* = 600\,\mathrm{K}$, al termine della quale la temperatura del gas è $T_3 = 500\,\mathrm{K}$;

c. raffreddamento a volume costante che riporta il gas alla temperatura iniziale T_1

d. trasformazione isoterma alla temperatura T_1 che chiude il ciclo.

Determinare

1. il calore assorbito dal gas nella trasformazione b.
2. la variazione di entropia del gas nella trasformazione b.
3. il lavoro totale compiuto nel ciclo.

Si supponga ora che il gas sia un gas perfetto monoatomico:

4. determinare la relazione tra volume e temperatura nella trasformazione b.

Soluzione:

1. $Q_b = \int \delta Q = \int C(T)dT = \mathcal{C}_V \int_{T_2}^{T_3} (1 + T/T_*)dT = \mathcal{C}_V(T_3 - T_2) + \dfrac{\mathcal{C}_V}{2T_*}(T_3^2 - T_2^2) = 17500\ J$

2. $\Delta S_b = \int \dfrac{\delta Q}{T} = \mathcal{C}_V \int_{T_2}^{T_3} (\dfrac{1}{T} + \dfrac{1}{T_*})dT = \mathcal{C}_V \ln \dfrac{T_3}{T_2} + \mathcal{C}_V \dfrac{T_3 - T_2}{T_*} = 39\ J/\,K$

3. *$\mathcal{L} = \Delta U + Q = Q_a + Q_b + Q_c + Q_d$. Le quantità di calore scambiate nelle due isocore Q_a e Q_b valgono $\mathcal{C}_V \Delta T$; Q_b è già stato calcolato; Q_d può essere calcolato usando il secondo principio della termodinamica:*
$$0 = \Delta S_{\rm ciclo} = \sum \Delta S_i = \mathcal{C}_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \Delta S_b + \mathcal{C}_V \ln \frac{T_1}{T_3} + \frac{Q_d}{T_1} = \mathcal{C}_V \frac{T_3 - T_2}{T_*} + \frac{Q_d}{T_1}$$
Quindi $Q_d = -\mathcal{C}_V \frac{T_1}{T_*}(T_3 - T_2) = -5000\ J$ e $\mathcal{L} = \frac{\mathcal{C}_V}{2T_*}(T_3^2 - T_2^2) + Q_d = 2500\ J$.

4. *La capacità termica lungo una trasformazione generica vale, per un gas perfetto, $C(T) = \delta Q/dT = \mathcal{C}_V + pdV/dT = \mathcal{C}_V + (nRT/V)dV/dT$ (attenzione alla notazione un po'balorda: $C_V = \frac{3}{2}nR$, mentre $\mathcal{C}_V = nC_V$). Quindi $C(T) = C_b(T)$ se*
$$\frac{dV}{dT} = \frac{C_V}{R}\frac{V}{T_*} = \frac{3}{2}\frac{V}{T_*}, \qquad \Rightarrow \qquad V(T) = V_i \exp\left[\frac{3(T - T_i)}{2T_*}\right]$$
dove V_i e T_i determina lo stato 'di partenza', non specificato dai dati del problema.

Compito di Fisica Generale I (13 Settembre 1999)

Meccanica

Una particella A di massa m si avvicina con velocità v_∞ (all'infinito) ad un'altra particella B di uguale massa, inizialmente in quiete nell'origine. Tra le due particelle A e B si esercita una forza che dipende dal vettore relativo $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ secondo la legge

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{per } |\vec{r}| > r_0 \\ F_0\vec{r}/r & \text{per } a < |\vec{r}| < r_0 \\ -k\vec{r}/r^3 & \text{per } |\vec{r}| < a \end{cases}$$

dove $\vec{F}$ è la forza che si esercita su B, F_0 e k sono costanti positive.

1. Si scriva il potenziale di interazione tra le due particelle in funzione della distanza relativa $r \equiv |\vec{r}|$.

Dato il parametro d'urto $b < a$, determinare

2. il valore che v_∞ deve superare perché possa essere raggiunta una distanza minima tra le due particelle inferiore ad a,

3. la distanza minima, nel caso in cui possa essere inferiore ad a.

Soluzione:

1. *La forza è attrattiva nella regione centrale e repulsiva in quella intermedia. Essendo la forza radiale la si può scrivere come $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(r)$. Il potenziale, scelto essere uguale a zero ad $r \to \infty$, è*

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \textit{per } r > r_0 \\ F_0(r_0 - r) & \textit{per } a < r < r_0 \\ -k/r + k/a + F_0(r_0 - a) & \textit{per } r < a \end{cases}$$

2. *La soluzione standard di questo genere di problemi fa uso di $T = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$, $L = \mu r^2\dot{\theta}$ ('energia cinetica radiale' e 'momento angolare', calcolati rispetto al centro di massa) e del 'potenziale effettivo' $V_{\rm eff}(r) = V(r) + L^2/2\mu r^2$. Nel nostro caso la 'massa ridotta' vale $\mu = m/2$, quindi $T = mv_\infty^2/4$, $L = mbv_\infty/2$ e $V_{\rm eff}(r) = V(r) + mv_\infty^2 b^2/4r^2$. La distanza minima vale a quando $T = V_{\rm eff}(a)$: si ottiene un'equazione lineare in v_∞^2 la cui soluzione è $v_\infty^2 = 4(F_0/m)(r_0 - a)/(1 - b^2/a^2)$.*

3. *Nuovamente la condizione da imporre è $T = V_{\rm eff}(r_{\rm min})$. In questo caso l'incognita è $r_{\rm min}$ che viene*

$$r_{\rm min} = \frac{k}{2T'}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4T'L^2}{mk^2}}\right) = \frac{k}{2T'}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{b^2 m v_\infty^2 T'}{k^2}}\right), \qquad T' \equiv T - \frac{k}{a} + F_0(a - r_0)$$

Relatività

Due particelle A e B hanno, in un riferimento S, energia costante pari a 4 volte l'energia di quiete e si muovono nella stessa direzione e verso lungo l'asse x sa distanza $d = 20\,\mathrm{m}$ l'uno dall'altra. Determinare

1. il modulo della velocità delle due particelle.

Le due particelle decadono simultaneamente nel loro riferimento di quiete. Determinare

2. l'intervallo di tempo tra gli istanti di decadimento di A e B nel riferimento S.

Soluzione:

1. *$v/c = (1 - 1/\gamma^2)^{1/2} = \sqrt{15}/4 \approx 0.968$.*

2. *Se $x_A(t) = vt$ e $x_B(t) = vt + d$, allora $0 = \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) = \gamma[(1 - v^2/c^2)\Delta t - vd/c^2]$ quindi $\Delta t = vd\gamma^2/c^2 = 1.03\ \mu$s.*

   Si potrebbe fare anche usando gli invarianti (ma non conviene): $\Delta x^2 - \Delta t^2 = \Delta x'^2$ con $\Delta x = \delta + v\Delta t$.

Termodinamica

Un tubo cilindrico di area di base S, è chiuso superiormente da un pistone di peso P scorrevole con attrito trascurabile lungo l'asse verticale del cilindro, mentre la base è fissa. Il pistone è collegato alla base da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo trascurabile. Il cilindro contiene una mole di gas perfetto monoatomico che, nello stato di equilibrio iniziale, occupa un volume V_1. L'ambiente esterno è alla pressione costante p_0. Sono da considerare trascurabili le capacità termiche di recipiente, pistone e molla.

Si fornisce reversibilmente calore al gas, che, al termine della trasformazione, occupa un volume V_2. Determinare

1. la relazione tra volume e temperatura del gas durante la trasformazione,

2. la quantità di calore fornita.

Al termine della trasformazione il gas viene posto in contatto termico con una sorgente ideale alla temperatura che il gas aveva nello stato di equilibrio iniziale. Determinare per questa trasformazione, ad equilibrio raggiunto

3. la variazione di entropia del gas,

4. la variazione di entropia della sorgente.

Soluzione:

1. *La pressione del gas è data da* $p = p_0 + P/S + kV/S^2 \equiv p_c + bV$ *con* $p_c = p_0 + P/S$ *e* $b = k/S^2$. *L'equazione di stato dei gas perfetti fornisce la relazione fra volume e temperatura:* $pV = (p_c + bV)V = RT$.

2. *Usando il primo principio della termodinamica* $Q_{\rm gas}^{(1\to 2)} = \Delta U + \mathcal{L}$, *dove* $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}[(p_c + bV_2)V_2 - (p_c + bV_1)V_1] = \frac{3}{2}p_c(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}b(V_2^2 - V_1^2)$. *Il lavoro fatto dal gas è* $\mathcal{L} = \int p\, dV = p_c(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}b(V_2^2 - V_1^2)$ *(il secondo termine è l'energia potenziale della molla). Quindi* $Q_{\rm gas}^{(1\to 2)} = 2b(V_2^2 - V_1^2) + \frac{5}{2}p_c(V_2 - V_1)$.

3. *Alla fine* $T_f = T_1$ *e* $V_f = V_1$, *quindi* $\Delta S_{\rm gas}^{(2\to 1)} = C_V \ln(T_1/T_2) + R\ln(V_1/V_2) < 0$.

4. $\Delta S_{\rm sorg}^{(2\to 1)} = Q_{\rm sorg}^{(2\to 1)}/T_{\rm sorg}$ *dove il calore assorbito dalla sorgente è* $Q_{\rm sorg}^{(2\to 1)} = +Q_{\rm gas}^{1\to 2}$, *già calcolato al punto 2. Siccome la trasformazione non è reversibile* $\Delta S_{\rm sorg}^{(2\to 1)} > -\Delta S_{\rm gas}^{(2\to 1)} > 0$.

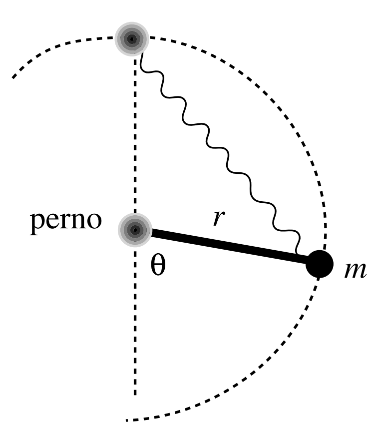
Compito di Fisica Generale I (19 Luglio 1999)

Meccanica

Un gravimetro è composto da una massa m appesa ad una molla di costante elastica k ($k/m = 4\pi^2$ s^{-2}) libera di oscillare verticalmente nel campo gravitazionale terrestre di intensità $g = 10$ m s^{-2}.

1. Se la più piccola ampiezza di oscillazione rivelabile è $\Delta z = 10^{-5}$ m, quale è la più piccola variazione Δg misurabile?

Per ottenere un gravimetro con alta sensibilità è stato costruito il sistema illustrato in figura. La massa m è attaccata ad un'asta di massa trascurabile di lunghezza r libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un perno. La molla è connessa ad un estremo alla massa m ed all'altro ad un punto fisso a distanza r sulla verticale del perno.



2. Mostrare che se la molla ha lunghezza a riposo $\ell_0 = 0$ e se $r = mg/k$, il pendolo è in equilibrio per ogni θ.

3. Supposto $mg = 0.9\ kr$, determinare la lunghezza a riposo ℓ_0 tale che la posizione 'orizzontale' $\theta = \pi/2$ sia di equilibrio stabile e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni.

4. Se la più piccola ampiezza di oscillazione rivelabile è $\Delta z = 10^{-5}$ m, quale è la più piccola variazione Δg misurabile?

Soluzione:

1. *L'equazione del moto è* $ma = kz - mg$ *(*$z = z' - \ell_0$*, se* $\ell_0 \neq 0$*), quindi la posizione di equilibrio è* $z_{\rm eq} = mg/k$*, da cui* $\Delta z_{\rm eq}/\Delta g = m/k$*. Siccome* $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$ *si può riscrivere* $\Delta z_{\rm eq}/\Delta g = T^2/4\pi^2$*: Uno strumento sensibile ha* T *alto. Al punto 4. mostreremo che questa relazione è valida in generale, non solo per una molla appesa in verticale.*

2. *Il potenziale* $V(\delta) = -mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0^2)$ *con* $\ell = 2d\cos\theta/2$*. Se* $\ell_0 = 0$ *allora* $V = -mgr\cos\theta + kr^2(1+\cos\theta)$*. Quindi se* $r = mg/k$ *il potenziale non dipende da* θ*.*

3. $V'(\theta = \pi/2) = mgr + kr(r - \ell_0/\sqrt{2}) = 0$ *se* $\ell_0 = \sqrt{2}(r - mg/k) = \sqrt{2}0.9r$*.*

4. *Si ha* $V''(\theta = \pi/2) = +kr\ell_0/2\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(kr - mg) = 0.1 \cdot kr^2/2 > 0$*. La frequenza delle piccole oscillazioni vale* $\omega^2 = V''(\theta_{\rm min})/mr^2 = 0.05k/m$*.*

5. *La formula vista al punto 1 è vera in generale. Dim: In generale* $V(z) = mgz + U(z)$*. La condizione di equilibrio è* $U'(z_{\rm eq}(g)) + mg = 0$*. Derivandola rispetto a* g *si ottiene* $U''(z_{\rm eq})(dz_{\rm eq}/dg) + m = 0$*, quindi* $dz_{\rm eq}/dg = m/U''(z_{\rm eq})$*, che è esattamente il rapporto legato al periodo* T *delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio:* $T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/U'')^{1/2}$*. Si può fare la stessa dimostrazione con 'meno matematica' sviluppando il potenziale in serie di Taylor attorno al punto di equilibrio:* $U(z) \approx U' \cdot (z - z_{\rm eq}) + \frac{U''}{2}(z - z_{\rm eq})^2 + \cdot$*.*

   Quindi la risoluzione dello strumento, come T*, è aumentata di un fattore* $\sqrt{20}$*.*

Relatività

Un protone urta frontalmente un fotone di energia $E_\gamma = 10^{-12}\ m_p c^2$, dove m_p è la massa del protone.

1. Quale energia E_p deve avere il protone affinchè il processo $p\gamma \to \Delta$ sia possibile, se $m_\Delta = 1.3 m_p$?

2. La Δ viene prodotta e successivamente decade in un protone p' ed in un fotone γ'. Quali energie hanno le particelle di decadimento, nel sistema di quiete della Δ?

3. Nel sistema di quiete della Δ, p' e γ' vengono emessi in direzione ortogonale alle velocità delle particelle p e γ originarie. Quali energie $E_{p'}$ ed $E_{\gamma'}$ hanno le particelle di decadimento nel sistema iniziale?

Soluzione: *È un problema di soglia più difficile del solito perchè il sistema rilevante non è nè il CM nè il lab (ma è il sistema in cui le stelle sono ferme).*

1. *Predendo il modulo quadro di* $P_p + P_\gamma = P_\Delta$ *trovo*

$$2(E_p - p_p\cos\theta) = \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{E_\gamma}$$

   Il protone è ultra-relativistico: $p_p \approx E_p$*. La minima* E_p *è richiesta quando* $\cos\theta = -1$ *(scontro frontale). Quindi protoni con energia maggiore di* $E_p > (m_\Delta^2 - m_p^2)/4E_\gamma = 5.5\ 10^{11}$ *GeV vengono assorbiti.*

2. *Da* $P_\Delta = P'_p + P'_\gamma$ *si ha* $P_\gamma'^2 = (P_\Delta - P'_p)^2$ *cioè, nel sistema del CM in cui la* Δ *è ferma* $0 = m_\Delta^2 + m_P^2 - 2m_\Delta E'_{p\rm CM}/c^2$*, da cui* $E'_{p\rm CM}/c^2 = (m_\Delta^2 + m_p^2)/2m_\Delta$*. Procedendo in modo simile, o usando* $E'_{\gamma\rm CM} + E'_{p\rm CM} = m_\Delta c^2$ *si trova* $E'_{\gamma\rm CM} = (m_\Delta^2 - m_p^2)c^2/2m_\Delta$*.*

3. *Facendo una trasformazione di Lorentz* $E' = \gamma(E'_{\rm CM} + v_{\rm CM}p'_{x\rm CM}) = \gamma E'_{\rm CM}$ *dove* $E'_{\rm CM}$ *sono le energie calcolate nel CM al punto 2. Il fattore* γ *vale* $E_\Delta/m_\Delta c^2 \approx E_p/m_\Delta c^2 \approx 10^{11}$*. Qualitativamente* $E'_p \sim E'_\gamma \sim \gamma m_\Delta$*. Quindi nel processo (ogni volta che l'angolo di decadimento nel CM è diverso da 0) il fotone ha acquistato energia a spese del protone.*

Questo problema è attualmente anche uno dei problemi della cosmologia. L'universo è riempito da 'radiazione cosmica di fondo' (fotoni con energia $E_\gamma \approx 2.73\,{\rm K}$*) e da raggi cosmici (protoni). I protoni possono venir distrutti tramite il processo* $p\gamma \to \Delta$*. Quindi in questo problema abbiamo mostrato che non dovrebbero esistere raggi cosmici di energia superiore a* $5\ 10^{10}$ *GeV (numero ufficiale ottenuto da calcolo esatto nel 1966: Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) cutoff), o —più precisamente, tenendo conto della densità di fotoni — che possono arrivare sulla terra solo se prodotti entro* $d = 1/n_\gamma\sigma \sim 10$ *Mpc dove* $n_\gamma \sim 400/\ cm^3$ *e* $\sigma_{p\gamma} \sim 10^{-28}\ cm^2$*. (In realtà il decadimento dominante è* $\Delta \to N\pi$ *invece di* $\Delta \to p\gamma$*, ma questo rafforza il bound) Il problema è che raggi cosmici (protoni?) sopra il GZK cutoff sono stati osservati, mentre non si osserva nessuna possibile sorgente abbastanza vicina. Una possibile spiegazione è che intensi campi magnetici extra galattici facciano fare giri bislacchi ai protoni, per cui non arrivano nè dalla stessa direzione nè allo stesso tempo dei fotoni emessi dalla sorgente che non si riesce a vedere e che quindi può essere morta nel frattempo. Altra possibile soluzione è che la relatività sia sbagliata: nessuno la ha mai testata ad* E/mc^2 *tanto alti. Altra possibilità è che siano prodotti vicino alla Terra dal decadimento di particelle relitte di enorme massa.*

Termodinamica

Si considerino tre corpi incomprimibili A, B e C, della stessa capacità termica costante nelle trasformazioni che saranno indicate. Le temperature iniziali dei tre corpi sono $T_A = T_B = 300$ K e $T_C = 100$ K. Una macchina termica preleva calore da B e cede calore a C fino ad esaurimento della differenza di temperatura producendo lavoro nei suoi cicli. Il sistema complessivo è termicamente isolato.

1. Determinare la temperatura finale di B e C a cui corrisponde il massimo lavoro prodotto L_{max}, giustificando brevemente il risultato.

Viene quindi prelevato calore da B, ceduto calore ad A di cui viene aumentata la temperatura, mediante cicli reversibili in cui viene utilizzato il lavoro $L = L_{\mathrm{max}}$.

2. Determinare la temperatura raggiunta da A.

3. Quali relazioni legano alle altre temperature la temperatura massima T_{max} che uno dei corpi può raggiungere operando mediante macchine reversibili senza fornire calore o lavoro al sistema dall'esterno? Si verifichi che $T_{\mathrm{max}} = 400$ K soddisfa queste relazioni, e si determinino le corrispondenti temperature degli altri due corpi.

Soluzione:

1. *Alla fine $T'_B = T'_C = T'$. La conservazione dell'entropia fornisce T': $\Delta S = \Delta S_{\mathrm{ABC}} + \Delta S_{\mathrm{macchina}} = \Delta S_{\mathrm{BC}} = C \ln T_B T_C / T'^2$. Quindi $T' = (T_B T_C)^{1/2} = 173\,K$. Abbiamo usato $\Delta S_{\mathrm{macchina}} = 0$ in quanto la macchina compie cicli e $\Delta S_A = 0$ in quanto A non interviene. Il lavoro ottenuto vale $L_{\mathrm{max}} = \Delta U = C(T_B + T_C - 2T')$.*

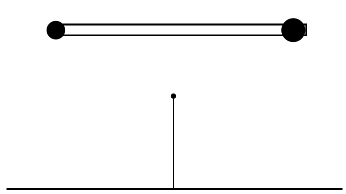
2 *Imponendo $\Delta U_{\mathrm{A+B}} = L_{\mathrm{max}}$ e $\Delta S_{\mathrm{A+B}} = 0$ si trova $T''_A = 395.\,K$ e $T''_B = 131.\,K$.*

3 *Per trovare le tre temperature finali servono tre equazioni. Una è data dal problema: $T'_B = T'_C$. Le altre due sono la conservazione dell'energia $U = \sum C T_i$ (la macchina compie cicli ed il sistema è isolato, quindi $T_A + T_B + T_C = T'_A + T'_B + T'_C$) e dell'entropia $S = \sum C \ln T_i$ (tutti i processi sono reversibili, quindi $T_A T_B T_C = T'_A T'_B T'_C$).*

L'equazione (di terzo grado) ha tre soluzioni: una stupida $T' = T$[1], una non fisica $T'_B < 0$ ed una fisica: $T'_A = 400\,K$, $T'_B = T'_C = 150\,K$.

Compito di Fisica Generale I (28 Giugno 1999)

1. Meccanica



Un manubrio è formato da due sfere di raggio trascurabile e masse m e $2m$ collegate come mostrato in figura da un'asta rigida di lunghezza 2ℓ e massa trascurabile. Il manubrio viene posto orizzontalmente in quiete e lasciato cadere. Il punto centrale C dell'asta colpisce la punta P a distanza h lungo la verticale. Dopo l'urto, l'asta è vincolata a ruotare attorno a P. Tutti gli attriti sono trascurabili.

1. Subito prima dell'urto: quali sono le velocità delle masse e quali sono le forze che l'asta esercita su di esse?

2. Subito dopo l'urto: quale è la velocità angolare del manubrio?

3. Di quanto sono variati l'impulso e l'energia cinetica del manubrio durante l'urto?

Si attende fino a che l'asta ha ruotato di un angolo pari a $\pi/6$. A quell'istante si calcolino:

4. La velocità del centro di massa

5. La forza di contatto tra asta e punta

[1] Sapendo che l'equazione deve avere questa soluzione, è possibile ridurre l'equazione ad una di secondo grado.

Soluzione:

1. *$v = v_1 = v_2 = -\hat{z}\sqrt{2gh}$ e $F_i = 0$ (ovvio nel sistema non interziale di caduta libera dove non ci sono forze; se uno vuole fare calcoli può vederlo come conseguenza delle equazioni cardinali).*

2. *Durante l'urto si conserva il momento angolare L_P rispetto a P: Prima dell'urto $L_P = v(2m - m)\ell$. Dopo l'urto $L_P = (m + 2m)\omega\ell^2$, da cui $\omega = v/3\ell$.*

3. *La variazione di impulso (lungo z) è*

$$\Delta p_z = p_{\rm in} - p_{\rm out} = (m + 2m)v - (2m - m)\omega\ell = (1 - \frac{1}{9})p_{\rm in} = -\frac{8}{3}mv$$

L'energia dissipata è $E_{\rm in} - E_{\rm out} = \frac{1}{2}3m\ v^2 - \frac{1}{2}3m(\omega\ell)^2 = (1 - \frac{1}{9})E_{\rm in} = \frac{4}{3}mv^2$.

4. *Dopo l'urto si conserva l'energia. Quindi*

$$\frac{3m\ell^2}{2}\omega^2_{\rm CM} = \frac{3m\ell^2}{2}\omega^2 + (2m - m)g\frac{\ell}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2_{\rm CM} = \omega^2 + \frac{g}{3\ell}$$

Il CM dista $\ell/3$ dal centro, quindi ha velocità $v_{\rm CM} = \ell\omega_{\rm CM}/3 = \sqrt{g(3\ell + 2h)}/9$.

5. *da $F_{\rm CM} = m_{\rm CM}a_{\rm CM}$ con*

$$m_{\rm CM} = 3m, \qquad F = F_C - 3mg\ \hat{z}, \qquad a_{\rm CM} = \frac{\ell}{3}(-\hat{\rho}\omega^2_{\rm CM} + \ddot{\theta}_{\rm CM})$$

dove $-\hat{\rho} = (-\sqrt{3}, 1)/2$ e $\hat{\theta} = -(1, \sqrt{3})/2$ (segno OK: accelera verso il basso). Da $\dot{E} = \frac{d}{dt}(\frac{3}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\sin\theta) = 0$ trovo $\ddot{\theta} = (g/3\ell)\cos\theta$ e quindi $F_C = 3m(g\ \hat{z} - \frac{\ell}{3}\omega^2_{\rm CM}\ \hat{\rho} + \hat{\theta}\frac{g}{9}\cos\theta)$.

2. Relatività

Una particella P di massa M, inizialmente in moto con velocità $\boldsymbol{v}_0$, decade in tre particelle di massa m. Nel laboratorio si osserva che

a) Una delle tre particelle ha la stessa velocità $\boldsymbol{v}_0$ di P prima del decadimento,

b) la componente lungo $\boldsymbol{v}_0$ della velocità di una delle altre particelle è uguale a $|\boldsymbol{v}_0|$.

Determinare, per le tre particelle di decadimento:

1. le energie nel riferimento di quiete di P,
2. le quantità di moto nel riferimento del laboratorio.

Soluzione:

1. *Nel sistema del CM, $M \to 3m$ decade in tre particelle m di cui una ferma. Per cui è come $M - m \to 2m$: le energie delle due particelle in moto sono $(M - m)c^2/2$.*

2. *Usando (b) imparo che nel CM la seconda particella viene emessa ortogonalmente a $\boldsymbol{v}_0$, con impulso $p_{\rm CM}$ (noto perchè so l'energia $E_{\rm CM}$). Quindi la conservazione dell'impuslo dice che la terza particella viene emessa in direzione opposta. Non rimane che da trasformare CM $\to$ LAB. Facendo una trasformazione di Lorentz, i corrispondenti impulsi nel LAB sono $P_x = \gamma E_{\rm CM}/c$ ed a $P_y = p_{\rm CM}$.*

3. Termodinamica

Un recipiente cilindrico chiuso di volume totale $V_t = 14 \times 10^{-3}$ m^3 è diviso in due parti da un pistone conduttore di spessore e massa trascurabile scorrevole parallelamente all'asse del cilindro con attrito trascurabile. Il recipiente contiene in ciascuna delle due parti $n = 5$ moli di un gas che ha equazione di stato $(p + n^2a/V^2)V = nRT$, dove a e R sono costanti date da $a = 0.14$ J m^3/mol^2, $R = 8.3$ J/(mol K) e gli altri simboli hanno il significato usuale. Il calore molare a volume costante del gas è costante e dato da $C_v = 21$ J/(mol K).

Il gas è mantenuto in contatto termico con una grande massa di acqua e ghiaccio in equilibrio alla pressione atmosferica. Il calore di fusione del ghiaccio a questa temperatura $T_0 = 273$ K è $c = 334 \times 10^3$ J/kg. Il sistema complessivo è isolato termicamente dall'esterno.

Il pistone viene manovrato dall'esterno in modo che il volume di una delle due parti si riduca reversibilmente alla metà del volume occupato nello stato di equilibrio iniziale. Determinare

1. la variazione di entropia del gas,

2. il lavoro compiuto dall'esterno sul gas,
3. la massa di ghiaccio fusa durante il processo.

Si consideri ora il caso in cui lo spostamento reversibile del pistone dalla posizione iniziale abbia luogo mantenendo il gas isolato termicamente. Determinare

4. la relazione durante la trasformazione tra temperatura e volume del gas contenuto in una delle due parti (separata dall'altra dal pistone conduttore).

Soluzione: *Scrivendo* $dU = dT\ U_T + dV\ U_V$ *ed imponendo che* $dS = \delta Q/T$ *sia un differenziale si trova* $U_V = Tp_T - p$. *Nel nostro caso* $p_T \equiv (\partial p/\partial T)_V = nR/V$ *da cui* $U_V = n^2a/V^2$. *Siccome* C_V *è costante, segue* $U(V,T) = nC_VT - n^2a/V$. *L'entropia di un gas reale vale* $dS = \delta Q/T = (p + n^2a/V^2)dV/T + C_V\ dT/T = nR\ dV/V + nC_V\ dT/T$, *quindi* $S = nR\ln V + nC_V\ln T$.

1. *Le variazioni dei volumi sono* $V_0 \to 3/2V_0$ *e* $V \to V_0/2$. *Quindi* $\Delta S = nR[\ln(1/2) + \ln(3/2)] = nR\ln(3/4) = -11.94\ J/K$.
2. $\mathcal{L}_{\text{sui gas}} = -\mathcal{L}_A - \mathcal{L}_B = -\sum_i \int p_i\ dV_i$, *che non è troppo noioso calcolare per una isoterma:*
$$\int p\ dV = \int (\frac{nRT}{V} - \frac{n^2a}{V})dV = nRT\ln\frac{V_f}{V_i} + n^2a(V_f^{-1} - V_i^{-1})$$
Siccome è una isoterma esiste un modo più rapido per calcolare il lavoro: $\mathcal{L}_{\text{sul gas}} = -\mathcal{L} = \Delta U - Q = \Delta U - T\ \Delta S$. *Nel nostro caso* $\Delta U = -n^2a/V_0(2 + 2/3 - 1 - 1) = \frac{2}{3}n^2a/V_0 = -333\ J$. *Quindi* $\mathcal{L} = 2926\ J$.
3. *Il calore ceduto dal gas vale* $Q = -T\ \Delta S$, *quindi la quantità di ghiaccio sciolta è* $Q/c = 9/76\ g$.
4. *Lungo la trasformazione i due gas avranno stessa temperatura (perchè il pistone è conduttore) e volumi* V_1 *e* $V_2 = V_t - V_1$. *Lungo una adiabatica si ha* $\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$ *e quindi* $S = S_1 + S_2 = \text{Cte}$. *Siccome abbiamo già calcolato l'entropia, l'equazione dell'adiabatica è* $T(V_1V_2)^{R/2C_V} = \text{Cte}$.

Compito di Fisica Generale I (7 Giugno 1999)

Meccanica

In un progetto spaziale si prevede la costruzione di una grande stazione a forma di toro a sezione rettangolare. Il raggio esterno a e il raggio interno b del toro sono stati previsti rispettivamente di 300 m e di 294 m. Per creare una gravità artificiale la stazione viene messa in rotazione attorno al suo asse di simmetria con velocità angolare ω rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

1. Calcolare la velocità angolare ω affinché gli oggetti al "suolo" della stazione abbiano un "peso" uguale a quello che hanno sulla terra.

Nella stazione un oggetto di massa m viene lasciato cadere da un'altezza $h = 3$ m.

2. Determinare il tempo necessario affinché l'oggetto arrivi al "suolo".
3. Determinare la distanza misurata dal piede della "verticale" per il punto in cui si trovava l'oggetto al tempo $t = 0$ al punto in cui questo tocca il suolo.

Un pendolo, costituito da una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza l e da una massa m puntiforme all'estremo libero, viene appeso al "soffitto" dell'astronave. Il pendolo è vincolato a muoversi su un piano perpendicolare all'asse di rotazione dell'astronave.

4. Determinare il periodo di oscillazione del pendolo per piccoli spostamenti angolari dalla "verticale".

Soluzione:

1. *Il pavimento è il cerchio esterno e* $g = \omega^2 r$
2. *Facendo il calcolo nel sistema ineraziale, per 'cadere' deve percorrere una distanza* $d = \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$ $(r_2 = r_1 + h)$ *con velocità* $v = \omega r_1$. *Quindi*
$$t = \frac{d}{v} = \frac{\sqrt{h(2r_1 + h)}}{\omega r_1} \to \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \text{per } h \ll r_1$$
Il risultato esatto è $0.780s$, *quello approssimato* $0.775\,s$.

3. *Nel sistema inerziale atterra spostato dalla 'verticale' di un angolo θ dato da $\cos\theta = r_1/r_2$. Quindi $\Delta s = (\theta - \omega t) r_2 = -0.2858\,m$. Notare che ωt e quindi tutto Δs non dipende da g ma solo dalla geometria.*

   Un modo approssimato: $\ddot{x} = \omega^2 x - 2\omega\dot{y}$. Sicuramente per h abbastanza piccolo domina il secondo termine. Proviamo quindi a trascurare il primo. Approssimo $\dot{y} = \omega t$, da cui $\Delta x = -\omega g t^3/3 = -h 2/3\sqrt{2h/r_2} = -0.2828\,m$. Nuovamente non dipende da g, cioè da ω. Il primo termine darebbe $\Delta y' = -\omega^2 g t^5/(3\ 4\ 5) \approx -1.6$ mm chè effettivamente piccolo.

4. *$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. L'accelerazione di Coriolis $2\omega_P v_P$ è $2\sqrt{\ell/r}$ volte minore della accelerazione di gravità $\omega^2 r\theta_P$ lungo la direzione del moto.*

Relatività

Il giorno del loro 30$^{\rm o}$ compleanno, due gemelli sono nella stessa posizione, il primo (T) a terra e il secondo (A) su un'astronave diretta a velocità costante verso una stazione spaziale S. La stazione spaziale è ferma rispetto a terra, e ne dista due anni luce.

1. Al momento dell'arrivo su S, A emette un segnale luminoso. Si calcoli la velocità alla quale l'astronave deve viaggiare affinchè la terra lo riceva 10 anni dopo la partenza.

2. Quale velocità dovrebbe invece avere l'astronave affinchè A arrivi a destinazione il giorno del suo 40$^{\rm o}$ compleanno?

Se l'astronave viaggia alla velocità calcolata in 2.,

3. a quale età T deve inviare un segnale luminoso ad A in modo che A lo riceva il giorno del suo 40$^{\rm o}$ compleanno?

Soluzione:

1. *La relatività non cambia la risposta: $\Delta t = d(1/v + 1/c)$, quindi $v/c = d/(c\Delta t - d) = 1/4$.*

2. *Siccome $\Delta t_A^2 = \Delta t_T^2 - \Delta x_T/c^2 = d^2(1/v^2 - 1/c^2)$, quindi $v/c = (1 + (c\Delta t_T/d)^2)^{1/2} = 1/\sqrt{26} = 0.196$.*

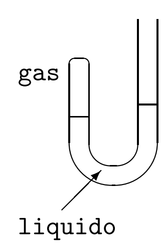
   Si può anche fare con le trasformazioni di Lorentz: $\Delta t_T = d/\beta = \gamma\Delta t_A = \gamma 10$, cioè $5 = 1/\beta\gamma$ cioè $25 = 1/\beta^2 - 1$ cioè $\beta^2 = 1/26$.

3. *Dal punto di vista di T il viaggio dura $\Delta t_T = d/v$, quindi il messaggio va inviato dopo $t = d/v - d/c = 2(\sqrt{26} - 1) = 8.198$ anni.*

   Se avessimo anche chiesto 'quanto tempo dopo la partenza A deve inviare un segnale luminoso a T in modo che T lo riceva il giorno del suo 40o compleanno?' la risposta sarebbe la stessa che in 3.

Termodinamica

Un tubo a forma di U, di sezione costante S, con rami verticali, è aperto da una parte e contiene un liquido di densità costante ρ, inizialmente allo stesso livello nei due rami. Sopra il liquido, nel ramo chiuso, si trovano n moli di un gas perfetto monoatomico, che occupano inizialmente un volume V_0. L'altro ramo è aperto all'atmosfera la cui pressione è P_a. Non ci sono scambi di calore tra liquido e gas.
Si fornisce reversibilmente calore al gas e si osserva che al termine della trasformazione il livello del liquido nel ramo chiuso si è abbassato di un tratto h rispetto alla posizione iniziale.



1. Determinare la relazione tra pressione e volume del gas, durante la trasformazione.

2. Esprimere il calore molare del gas in funzione del volume.

Al termine della trasformazione, il gas, il cui volume è mantenuto costante al valore precedentemente raggiunto, è posto in contatto termico con una sorgente alla temperatura che il gas aveva inizialmente. Una volta raggiunto l'equilibrio si determini, per questa trasformazione:

3. La variazione di entropia del gas.

4. La variazione di entropia della sorgente.

Soluzione:

1. *$p(V) = p_A + 2\rho(V - V_0)/S$ che conviene riscrivere come $p_c + cV$*

2. *$nC\ dT = nC_V\ dT + p\ dV$, quindi $C = C_V + p(dV/dT)/n$. Differenziando la traiettoria della trasformazione trovo dV/dT: $(p_c + 2cV)dV = nR\ dT$. Quindi*

$$C = C_V + R\frac{p_c + cV}{p_c + 2cV}$$

Altra domanda possibile è il calore totale $Q = \int \delta Q = \int p\ dV + nC_V \int dT = p_c\Delta V + c(\Delta V^2)/2 + C_V\Delta T$.

3. *$\Delta S_{\text{gas}} = nC_V \ln(T_2/T_1)$ dove $T_2 = T_0 = P_a V_0/nR$ e $T_1 = p_1V_1/nR$.*

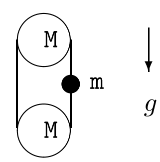
4. *La trasformazione avviene a volume costante per cui $\Delta S_{\text{sorg}} = -Q/T = -\Delta U/T = nC_V(T_1 - T_0)/T_0$.*

Compito di Fisica Generale I (15 gennaio 1999)

Meccanica

Si considerino due dischi omogenei, di massa M e raggio R, liberi di ruotare senza attrito attorno ad assi orizzontali passanti per il loro centri geometrici, posti uno sulla verticale dell'altro. La distanza tra i centri dei dischi è h. Attorno ai due dischi è posta una cinghia di massa trascurabile e inestensibile.

Sulla cinghia è fissata una massa m, come mostrato in figura. Il sistema è immerso in un campo gravitazionale di intensità g. Le forze tra la cinghia, i dischi e la massa sono tali da far sì che la cinghia non possa strisciare, e, quando in contatto con i dischi, la massa compia un moto circolare.



Sugli assi dei dischi agiscono forze tali da mantenere i centri dei dischi fermi in un sistema di riferimento inerziale. Al tempo $t = 0$ la massa m si trova, in quiete, a metà altezza tra le carrucole.

1. Che velocità avrà la massa m quando passa per il punto più basso?

2. Quanto vale la forza totale che all'istante $t = 0$ agisce sugli assi dei dischi?

Si considerino piccole oscillazioni della massa m attorno al punto di equilibrio stabile.

3. Quanto vale la frequenza di queste oscillazioni?

Soluzione:

1. *L'energia E vale*

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2}{2}I\omega^2 + mgz, \qquad I = \frac{1}{2}MR^2, \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

Quindi $v^2 = 2mg(R + h/2)/(m + M)$

2. *La massa m cade con accelerazione $\ddot{z} = mg/(m + M)$, quindi*

$$F = 2Mg + m(g - \ddot{z}) = [2M + \frac{mM}{m + M}]g$$

3. *da $\dot{E}$ con $z = -R\cos\theta$ si trova l'equazione del moto*

$$\ddot{\theta} = -\frac{mg}{m + M}\frac{1}{R}\sin\theta \to -\omega^2[\theta + \mathcal{O}(\theta^3)]$$

Relatività

Si osserva il moto di una particella P in un dato riferimento S. La particella è prodotta all'istante $t = 0$ all'origine delle coordinate, procede di moto rettilineo uniforme e poi decade all'istante $t = 17 \times 10^{-10}$s in due particelle. Il punto di decadimento è uno dei punti A e B di coordinate $\{x_A = 0.15\text{m}, y_A = 0.20\text{m}, z_A = 0\}$ e $\{x_B = 0.60\text{m}, y_B = 0.80\text{m}, z_B = 0\}$. L'energia di quiete di P è 80×10^{-15}J e le due particelle in cui decade hanno una massa uguale a 28/100 della massa di P.

1. Individuare il punto di decadimento.
2. Calcolare l'energia di P nel riferimento S.
3. Calcolare l'energia di una delle particelle di decadimento nel riferimento di quiete di P.
4. Calcolare l'energia di una delle due particelle di decadimento nel riferimento di quiete dell'altra.

Soluzione:

1. *Il primo. Il secondo richiederebbe $v > c$.*
2. *Si ha $v = 0.49c$ per cui $\gamma = 1.15$ e $E = \gamma M$.*
3. $E = Mc^2/2$.
4. *Siccome $P = P_1 + P_2$ allora $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2}(P^2 - P_1^2 - P_2^2)$, cioè, calcolando $P_1 \cdot P_2$ nel sistema in cui la particella 1 è ferma $(P_1 = (mc^2, 0))$ si ottiene $E_2 = c^2(M^2 - 2m^2)/2m = 120\ 10^{-15}J$.*

Termodinamica

Un gas ha equazione di stato $p(V - nb) = nRT$, calore molare a volume costante C_v, dove b, R e C_v sono costanti note e gli altri simboli hanno il significato usuale.

1. Si scrivano per questo gas, giustificando brevemente, le espressioni delle variazioni di energia interna ed entropia in funzione del numero di moli, temperature e volumi, e degli altri parametri dati.

Si considerino n moli del gas che, a partire da uno stato di equilibrio iniziale a temperatura T_1 e volume V_1, compiono il seguente ciclo:
a) espansione adiabatica senza lavoro esterno fino ad uno stato di equilibrio in cui il volume è V_2,
b) compressione reversibile fino a riportare il gas al volume iniziale mediante una trasformazione per cui il calore molare e' dato da $C = C_v + aT$ con a costante nota,
c) contatto termico con una sorgente ideale alla temperatura T_1.
Determinare:

2. Le variazioni di energia interna ed entropia tra gli stati di equilibrio iniziale e finale di ciascuna delle trasformazioni a), b) e c).
3. Il lavoro fatto sul gas durante il ciclo.
4. La variazione totale di entropia delle sorgenti con cui il gas ha scambiato calore.

Soluzione:

1. *Per costante n la termodinamica è identica a quella di un gas perfetto con volume $V' = V - nb$ $(dV' = dV)$. Quindi $\Delta U = nC_V \Delta T$. $dS \equiv \delta Q/T = nC_V dT/T + p\ dV/T$. Usando l'equazione di stato per esprimere p in funzione di T e V ed integrando si ottiene $S = nC_V \ln T + nR \ln(V - nb) + cte$.*
2. *Per una qualunque trasformazione ΔU e ΔS sono dati dalle formule generali ricavate al punto 1. Occorre solo sapere i valori limite di (V, T) nelle tre trasformazioni.*
   - a *Per la (a) $\mathcal{L} = \Delta U_a = 0$. La trasformazione non è reversibile; consiste nell'aumentare il volume del gas aprendo un rubinetto.*
     Usando l'espressione di S, $\Delta S_a = nR \ln(V_2 - nb)/(V1 - nb)$.
   - b *Occorre determinare quale trasformazione dà $\delta Q \equiv C_V dT + p dV = (C_V + aT)dT$. Eliminando p si ottiene $na\ dT = nR\ dV/(V - nb)$, cioè $(V - nb)e^{aT/R}$ è costante. Quindi $T' = T_1 + R/a \ln(V_1 - nb)/(V_2 - nb)$ e $\Delta U_b = nC_V(T' - T_1)$ e $\Delta S_b = nC_V \ln(T'/T_1) + nR \ln(V_1 - nb)/(V_2 - nb)$.*
   - c *Mettere in contatto termico un corpo caldo con un corpo freddo non è una trasformazione reversibile. $\mathcal{L} = 0$ per cui $Q = \Delta U_c = nC_V(T_1 - T')$ e $\Delta S_c = nC_V \ln(T_1/T')$.*
3. *Solo nella trasformazione (b) è stato fatto lavoro: il lavoro fatto* sul *gas è $\mathcal{L} = -\int p\ dV = -\int nRT\ dV/(V - nb) = -an \int T\ dT = -\frac{na}{2}(T'^2 - T^2)$.*

4. $\Delta S_{\rm sorg} = -\Delta S_b + nC_V(T' - T_1)/T_1$ *(la trasformazione b è reversibile; la c no; la a neanche ma in essa non viene scambiato calore).*

Compito di Fisica Generale I (5 ottobre 1998)

Meccanica

Una particella A di massa M si muove inizialmente con velocità $\vec{V}_A$ e si avvicina ad una particella B di uguale massa che si muove con velocità $\vec{V}_B = c\vec{V}_A$ con $-1 \le c < 1$. Inizialmente la loro distanza relativa è infinita e il parametro d'impatto è d. Fra le particelle si esercita una forza di tipo coulombiano, cioè la forza che risente la particella A è

$$\vec{F}_A = \frac{k}{r^2}\hat{r}, \qquad \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B. \tag{1}$$

Quando, dopo l'urto, la distanza relativa diventa di nuovo grande (infinita) la direzione del moto della particella A forma un angolo ϕ_A (angolo di diffusione) rispetto alla direzione iniziale $\vec{V}_A/|\vec{V}_A|$.

1. Nel caso $c < 0$, assumendo noto l'angolo di diffusione ϕ_A, calcolare il modulo della velocità finale di A.
2. Nel caso $c > 0$, esiste un valore massimo che può assumere ϕ_A compatibilmente con le sole leggi di conservazione? In caso affermativo calcolarlo.
3. Calcolare la minima distanza tra le due particelle durante il loro moto.

In realtà le informazioni sopra elencate permettono di calcolare l'angolo di diffusione ϕ_A.

4. Calcolare ϕ_A.

A questo fine può essere utile il seguente risultato. In un problema di diffusione da sorgente fissa, dove una particella di massa m si avvicina dall'infinito con velocità v e parametro d'impatto b, ed è soggetta ad una forza centrale $\vec{F} = \hat{r}\frac{\alpha}{r^2}$, l'angolo di diffusione φ (cioè l'angolo tra la direzione del moto iniziale e quella finale) è dato dalla formula

$$\varphi = 2\ \arctan \frac{\alpha}{mbv^2}.$$

Soluzione: *Conviene utilizzare il sistema CM nel quale $\boldsymbol{v}_{iCM} = \boldsymbol{v}_i - \Delta\boldsymbol{v}$, dove $\Delta\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B)/2$, per cui $v_{ACM} = v_{BCM} \equiv v_{CM} = v_A(1-c)/2$.*

1. *Nel CM dopo l'urto $\boldsymbol{v}'_{ACM} = \boldsymbol{v}'_A - (\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B)/2$ ha modulo $v'_{iCM} = v_{CM}$. Imponendo che il modulo sia giusto si trova un'equazione quadratica per v'_A:*

$$v_{CM}^2 = {v'}_A^2 + v'_A v_A \cos\alpha \frac{1+c}{2} + v_A^2(\frac{1+c}{2})^2$$

la cui soluzione risponde alla domanda.

2. *Nel CM le sole leggi di conservazione consentono ad α_{CM} di essere qualunque; esso è legato ad α da*

$$\tan\alpha = \frac{v_{CM}\sin\alpha_{CM}}{\Delta V + c_{CM}\cos\alpha_{CM}} = \frac{(1-c)\sin\alpha_{CM}}{(1+c) + (1-c)\cos\alpha_{CM}}$$

Il valore massimo di $\tan\alpha$ si ha per $\cos\alpha_{CM} = (c-1)/(c+1)$ e vale $\frac{1}{2}(c-1)\sqrt{c}$.

3. *Chiamiamo $u_{ACM} = -u_{BCM} = u$ le velocità nel momento di massimo avvicinamento nel CM. Per la conservazione dell'energia cinetica*

$$\frac{2}{2}mu^2 + \frac{k}{r_{\min}} = \frac{2}{2}mv_{CM}^2$$

Per trovare $r_{\min}$ occorre conoscere u: esso è determinato dalla conservazione del momento angolare

$$2mu\frac{r_{\min}}{2} = 2mv_{CM}\frac{d}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad u = v_{CM}\frac{d}{r_{\min}}$$

Si ottiene un equazione di secondo grado in $r_{\min}$ la cui soluzione è

$$r_{\min} = \frac{k}{2mv_{CM}^2} + \sqrt{(\frac{k}{2mv_{CM}^2})^2 + d^2}$$

4. *Basta shiftare il sys*

Relatività

Due particelle A e B si muovono in direzioni perpendicolari con le velocità nel laboratorio $v_A = 0.6c$ e $v_B = 0.8c$. Determinare:

1. il modulo di $\vec{v}_B - \vec{v}_A$.

2. il modulo della velocità di B nel riferimento di quiete di A.

Le due particelle, che hanno masse uguali, si incontrano e formano un'unica particella C. Determinare:

3. la velocità di C nel riferimento di quiete di A.

Soluzione:

1. *ovvio:* $|\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B|^2 = v_A^2 + v_B^2$.

2. *Il prodotto scalare dei quadrivettori* $V_A \cdot V_B$ *è invariante. Nel sistema di laboratorio vale* $\gamma_A\gamma_B$*; nel sistema 'B' in cui* $V_{BB} = (1, 0)$ *e* $V_{AB} = (\gamma_{AB}, \gamma_{AB}\boldsymbol{v}_{AB})$ *vale* γ_{AB}*. Per cui* $\gamma_{AB} = \gamma_A\gamma_B$ *cioè* $v_{AB}^2 = 1 - 1/\gamma_A^2\gamma_B^2$.

3. *Per la conservazione del quadri-impulso* $P_C = m_C V_C = m(V_A + V_B)$*. Per prima cosa determiniamo* $m_C^2 = P_C^2 = m^2(V_A^2 + V_B^2 + 2V_A \cdot V_B) = 2m^2(1 + \gamma_A\gamma_B)$*. Considero poi il prodotto scalare con* $V_C \cdot V_A$ *nel sistemi 'L' ed 'A':*

$$V_C \cdot V_A = \gamma_{CA} = \frac{m}{m_C}(V_A^2 + V_B \cdot V_A) = \frac{m}{m_C}(1 + \gamma_A\gamma_B)$$

da cui $v_{CA}^2 = 1 - 1/\gamma_{CA}^2 = \cdots$.

Termodinamica

Un recipiente cilindrico, chiuso alle estremità, è diviso in due parti A e B da un pistone scorrevole, con attrito trascurabile, lungo l'asse orizzontale del cilindro. Le due parti contengono ciascuna una mole di gas perfetto mantenuto in contatto termico con una sorgente ideale a temperatura $T = 300K$. Cilindro e pistone sono indeformabili. Il pistone può essere manovrato dall'esterno e, nello stato di equiibrio iniziale, i volumi delle due parti sono $V_A = \frac{1}{2}V_B$. Il pistone è quindi spostato reversibilmente in modo che nello stato finale sia $V'_A = \frac{3}{4}V'_B$. Determinare:

1. la quantità totale di calore scambiata dal gas con la sorgente durante la trasformazione.

Il pistone viene rilasciato e raggiunge una nuova posizione di equilibrio. Determinare, per il complesso delle due trasformazioni:

2. la variazione totale di entropia del gas;

3. la variazione di entropia della sorgente.

Soluzione:

1. $\Delta Q = \Delta U + L$*. In questo caso* $\Delta U = 0$ *perchè stiamo lavorando con gas perfetti a* T *costante.* $L = \int_{V_A}^{V'_A}(p_A - p_B)dV = nRT\ln[(V'_A/V_A)/(V'_B/V_B)] = RT\ln 3/2$.

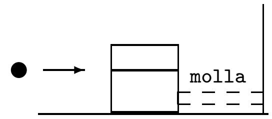
2. *La seconda trasformazione è irreversibile in quanto* $p'_A \neq p'_B$*. Alla fine* $V''_A = V''_B$*. La variazione di entropia è* $\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = nR\ln[(V''_A/V_A)/(V''_B/V_B)] = R\ln 2$.

3. *Il calcolo esplicito del lavoro* $\mathcal{L}_A = \int p_B\ dV_A = nRT\int dV_A/(V_{\rm tot} - V_A) = nRT\ln(V_{\rm tot} - V''_A)/(V_{\rm tot} - V'_A) = nRT\ln(V''_B/V'_B)$*. Quindi la variazione di entropia della sorgente,* $\Delta Q/T = -\mathcal{L}/T$*, compensa quella dei gas come se fosse irreversibile. Questo è dovuto al fatto che* $T_A = T_B = T$sorgente *in tutti gli stadi.*

Compito di Fisica Generale I (14 settembre 1998)

Meccanica

Un blocco cubico di massa M e spigolo L, attaccato a una molla di costante elastica K, può scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea orizzontale. Una pallina di massa m è sparata con velocità iniziale V_0 sul blocco, e lo attraversa completamente dentro un foro praticato parallelamente alla guida (vedi figura). Nell'istante in cui la pallina entra nel foro il blocco è fermo e la molla è in condizioni di riposo.



1. Nell'ipotesi in cui il tempo di transito attraverso il foro sia trascurabile rispetto al tempo di oscillazione del sistema, calcolare la velocità di uscita della pallina dal foro, sapendo che la massima compressione raggiunta dalla molla è d.

Si abbandoni ora l'ipotesi sul tempo di transito fatta alla domanda precedente. Si osserva che mentre la pallina attraversa il foro, ha una accelerazione costante $\vec{a}_r$ rispetto al blocco. Per il tempo durante il quale la pallina è all'interno del foro:

2. Scrivere l'equazione del moto per la pallina e per il blocco;
3. Determinare l'andamento della quantità di moto in funzione del tempo per il sistema blocco più pallina.

Relatività

Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella A di massa m si muove con velocità U. Un'altra particella B della stessa massa si muove nella stessa direzione e verso con velocità $V > U$.

1. Calcolare la velocità di B nel sistema di riferimento in cui A è ferma.
2. Le particelle A e B si urtano. Nel sistema del laboratorio calcolare la velocità minima V_m di B, tenendo fissata la velocità U di A, affinché lo stato finale sia composto da due particelle di massa uguale $M > m$.

Termodinamica

Un gas ha equazione di stato $(P + n^2a/V^2)V = nRT$, dove i simboli hanno il significato usuale, a e R sono costanti note. È anche noto e da considerare indipendente dalla temperatura il calore molare a volume costante C_V del gas. Un campione di n moli di questo gas compie un ciclo costituito da:
(a) una trasformazione reversibile dalla temperatura T_0 e volume V_0 alla temperatura T_1, durante la quale $TV =$ costante;
(b) una trasformazione a volume costante in cui il gas è messo a contatto termico con una sorgente ideale alla temperatura T_0;
(c) un'isoterma reversibile alla temperatura T_0 che chiude il ciclo.
Determinare:

1. la capacità termica del gas per la prima trasformazione;
2. la variazione di energia interna del gas nella trasformazione isoterma;
3. la variazione totale di entropia delle sorgenti con cui il gas ha scambiato calore nel complesso delle tre trasformazioni.

Compito di Fisica Generale I (3 luglio 1998)

Meccanica

Un'asta omogenea di massa M e lunghezza L è incernierata ad un estremo O attorno al quale può rotare senza attrito in un piano orizzontale. Un manicotto di massa $m = M/3$ può scorrere senza attrito lungo l'asta. All'istante $t = 0$ l'asta ruota con velocità ω_0 e il manicotto, che si trova all'estremo libero dell'asta, ha una velocità relativa diretta verso il centro di rotazione O di modulo $|\omega_0|L$.

1. Scrivere in coordinate polari le quantità conservate.
2. Calcolare la minima distanza dall'asse di rotazione O a cui arriva il manicotto.

Calcolare inoltre:

3. La forza esercitata dall'asta sul manicotto all'istante $t = 0$.
4. La forza esercitata dalla cerniera sull'asta all'istante $t = 0$.

Relatività

Una particella di massa M e energia E urta un'altra particella ferma di massa uguale. Nell'urto vengono prodotte due particelle di massa $m < M$. Calcolare:

1. La velocità del sistema di riferimento del centro di massa.

2. L'energia delle particelle prodotte nel sistema di riferimento del centro di massa.

Nel sistema di riferimento del laboratorio una delle due particelle prodotte viene rivelata in direzione ortogonale alla direzione della particella incidente.

3. Calcolare l'energia e l'impulso di questa particella.

Termodinamica

All'interno di un tubo, disposto con l'asse orizzontale, possono scorrere con attrito trascurabile due pistoni collegati tra loro mediante una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. Tra i due pistoni sono contenute n moli di un gas perfetto monoatomico. All'esterno è fatto il vuoto. Nello stato di equilibrio iniziale la distanza tra i due pistoni è l_0. Mediante contatto termico con opportune sorgenti, viene fornito reversibilmente calore al sistema finché la distanza tra i due pistoni raggiunge il valore l. Determinare:

1. Il calore molare del gas lungo la trasformazione considerata e il calore fornito.

2. La variazione di entropia del gas.

3. La variazione totale di entropia delle sorgenti.

Il pistone viene quindi bloccato nella posizione raggiunta ed il sistema posto in contatto termico con una sorgente alla temperatura iniziale del gas. Determinare, per questa trasformazione

4. La variazione di entropia del gas.

5. La variazione di entropia della sorgente.

Si trascurino le capacità termiche dei pistoni, recipiente e molla.

Compito Fisica Generale I per Fisica del 12 giugno 1998

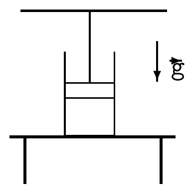
Meccanica

Due stelle di uguale massa M, soggette alla reciproca forza gravitazionale, percorrono traiettorie circolari di raggio R.
(1) Determinare il periodo del loro moto.
Un corpo celeste di massa m si avvicina al sistema di stelle sopra descritto e ne colpisce una. L'urto è completamente anelastico. Al momento dell'impatto la velocità $\vec{v}_0$ del corpo celeste è nella stessa direzione ma verso opposto a quella della stella colpita. Si assuma trascurabile l'interazione gravitazionale tra le due stelle e il corpo celeste prima dell'urto. Si considerino le stelle e il corpo celeste come puntiformi. Determinare:
(2) la velocità della stella urtata, subito dopo l'urto;
(3) il minimo del modulo della velocità del corpo celeste necessario affinché le stelle raggiungano una distanza relativa infinita dopo l'urto;
(4) la distanza relativa minima e massima nel moto delle due stelle dopo l'urto per valori della velocità del corpo celeste inferiori alla velocità limite della domanda precedente.

Relatività

In un dato sistema di riferimento una particella A è ferma in un punto O ed una particella B, che si trova ad un certo istante nel punto P a distanza $l = 36m$ da O, si muove verso O di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 0.8c$. Si determinino:
(1) il tempo impiegato da B per percorrere il tratto PO in questo sistema di riferimento;
(2) il tempo impiegato da B per percorrere il tratto PO nel riferimento di quiete di B.
Nell'urto tra A e B, che hanno la stessa massa, si forma un'unica particella C.
(3) Si determini il rapporto tra la massa di C e la massa comune di A e B.

Termodinamica



Un cilindro di peso F e sezione S è chiuso superiormente da un pistone scorrevole senza attrito all'interno del cilindro. Le pareti esterne del cilindro e del pistone sono rivestite di un materiale isolante che impedisce lo scambio di calore con l'atmosfera e gli oggetti circostanti. La capacità termica complessiva di questi due corpi, supposti indeformabili, ha un valore costante C. La pressione dell'atmosfera esterna vale p_0. Tutto il sistema è appoggiato sopra un tavolo. Una mole di azoto, contenuta nel cilindro, ha, all'equilibrio, un volume V_i ed una temperatura T_i.

(1) Determinare il peso del pistone.

Il pistone viene ora collegato al soffitto per mezzo di un filo inestensibile di massa trascurabile. Il filo è completamente disteso e ha una tensione nulla. Il tavolo è poi rimosso ed il sistema raggiunge un nuovo stato di equilibrio. In questo nuovo stato del sistema determinare:

(2) La tensione del filo N_f e la pressione del gas p_f;

(3) La temperatura T_f ed il volume V_f del gas.

Determinare inoltre

(4) La variazione di entropia di tutto il sistema nella trasformazione.

Soluzione:

1. *all'equilibrio* $p_i = nRT_i/V_i = P_P/S + p_0$ *da cui si determina* $P_P = F$.
2. *Le equazioni di moto del pistone e del bidone sono*

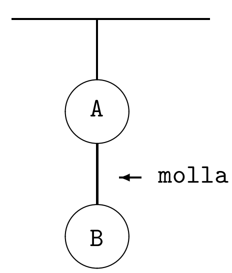
$$\begin{aligned} m_P \ddot{z}_P &= 0 = -P_P + S(p_f - p_0) + N_f \\ m_B \ddot{z}_B &= 0 = -P_B + S(p_0 - p_f) \end{aligned}$$

da cui $p_f = p_0 - P_B/S$ *e* $N_f = (m_P + m_B)g$ *(cioè il filo regge i pesi sotto, come ovvio). Se* $p_B > Sp_0$ *il bidone casca.*

3. *Per la conservazione dell'energia:* $\Delta U = -P_B(V_f - V_i)/S + C(T_f - T_i) = 0$ *(segni: siccome il bidone scende l'energia cinetica media, cioè* T*, deve aumentare. Usando* $pV = nRT$ *si ha un'equazione lineare, risolta da* $V_f = V_i(p_i - p_B)/(p_0 - 2p_B)$¿
4. *La variazione di entropia sarebbe zero se la trasformazione adiabatica fosse reversibile,* $dS = \delta Q/T = 0$. *In realtà è irreversibile, quindi* $\Delta S = nC_V \ln(T_f/T_i) + nR\ln(V_f/V_i)$.

Compito di Fisica Generale I (16 Gennaio 1998)

Meccanica



Una sfera A di massa m è appesa al soffitto per mezzo di un filo perfettamente flessibile, inestensibile e di massa trascurabile. Come indicato in figura, una sfera B, di massa m, è appesa ad A mediante una molla di massa trascurabile, lunghezza a riposo l_0, e costante elastica definita dalla relazione $K = 4P/l_0$, dove P è il peso di ciascuna sfera. Le sfere sono vincolate a muoversi solo verticalmente. All'istante $t = 0$ viene impressa istantaneamente una velocità V_0 diretta verso il basso alla sfera B, che si trova nella sua posizione di equilibrio. Nell'ipotesi che la sfera A rimanga sempre ferma nella sua posizione e trascurando ogni forma di attrito, scrivere:

1. L'equazione di moto della sfera B.
2. L'espressione che determina la forza di contatto esercitata dal filo sulla sfera A.

   Si determini inoltre:

3. La velocità limite V_{lim} tale che per ogni $V_0 < V_{lim}$ la condizione che la sfera A rimanga sempre nella sua posizione sia sempre verificata durante il moto della sfera B.

Nell'ipotesi $V_0 = 2V_{lim}$, si determini:

4. Per quale valore t^* del tempo t cessa la condizione di immobilità di A.
5. La massima quota a cui può salire il centro di massa del sistema costituito dalle due sfere A e B, molla e filo.

Soluzione:

1. *Le equazioni del moto sono*
$$m\ddot{z}_A = -mg - F_{\rm molla} + F_{\rm filo}, \qquad m\ddot{z}_B = -mg + F_{\rm molla}$$
2. *dove* $F_{\rm molla} = K(z_A - z_B - l_0)$ *e* $F_{\rm filo} > 0$
3. *Occorre che* $mg + F_{\rm molla} > 0$ *cioè che* $z_A - z_B < l_0 - mg/K$. *Per la conservazione dell'energia* $E = \frac{1}{2}m\dot{z}_B^2 + \frac{1}{2}K(z_A - z_B - l_0)^2 + mgz_B$ *(a* $t = 0$ $E_0 = \frac{1}{2}V_0^2 + m^2g^2/2K + mgz_{B0} + mgz_{A0}$, *con* $z_{B0} = z_{A0} - l_0 - \frac{mg}{K}$*) questa condizione è soddisfatta se* $V^2 < 4g^2m/K$.
4. *La soluzione delle equazioni del moto è*
$$z_B(t) = z_{B0} - \frac{V}{\omega}\sin\omega t, \qquad \omega^2 = \frac{K}{m}$$
La quota limite $z_B - z_A = l_0 - mg/K$ *è raggiunta quando* $\sin\omega t = -2gm\omega/KV = -m\omega^2/K * (V_{\rm lim}/V)$.
5. *Assumendo che dopo l'urto le due sfere rimangano a distanza fissa* $z_A - z_B = l_0$ *allora* $z_{CM} = z_B + l_0/2$: *imponendo* $E(\text{quota massima}) = 2mgz_{CM} = E_0$ *si trova* z_{CM}.

Relatività

Una nave spaziale, a forma di parallelepipedo retto a base rettangolare con lati di lunghezza a riposo L_1, L_2, L_3, si muove rispetto alla terra con velocità V nella direzione di uno dei lati, quello di lunghezza L_1.

(1) Calcolare il volume della nave spaziale misurato dalla terra.

Nel sistema terra un osservatore fermo si pone lungo la traiettoria della nave spaziale, in un punto P.

(2) Calcolare l'intervallo di tempo tra il passaggio dei due estremi della nave spaziale in P misurato nel riferimento di questo osservatore.

(3) Calcolare l'intervallo di tempo corrispondente al passaggio dei due estremi da P misurato da un osservatore fermo rispetto alla nave spaziale.

Termodinamica

Una sostanza compie un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: (a) una trasformazione, lungo la quale la capacità termica C_1 è nota e costante, in cui la temperatura passa dal valore iniziale T_1 al valore T_2; (b) una trasformazione, lungo la quale la capacità termica C_2 è nota e costante, in cui la temperatura passa dal valore T_2 ad un valore incognito T_3; (c) una trasformazione adiabatica che chiude il ciclo.

Si determinino:

(1) le variazioni di entropia in ciascuna trasformazione e la temperatura incognita T_3;

(2) il lavoro totale nel ciclo.

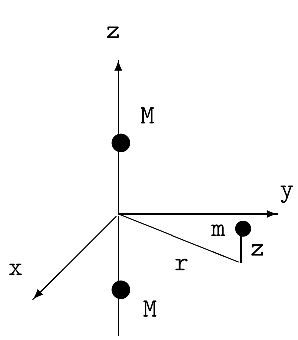
Si consideri ora il caso in cui la sostanza sia costituita da n moli di gas perfetto di calore molare a volume costante C_V. Sia dato inoltre il volume iniziale V_1 del gas.

(3) Si determinino i volumi alla fine delle trasformazioni (a) e (b).

Compito di Fisica Generale I (14 Ottobre 1997)

Meccanica

Consideriamo il moto di un corpo di massa m nel campo gravitazionale di due corpi fissi di uguale massa M posti ad una distanza $2d$ l'uno dall'altro. Per la soluzione del problema si usi un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z) in cui i corpi M hanno coordinate $r = 0$, e $z = -d, +d$ rispettivamente (vedi figura).



Le quantità richieste dovranno essere scritte in funzione delle coordinate cilindriche specificate.

(1) Scrivere l'energia potenziale del corpo m.

(2) Tra le seguenti quantità: E, p_x, p_y, p_z, L_x, L_y e L_z (dove le componenti x e y si riferiscono al piano perpendicolare all'asse z) quali sono costanti del moto? Scrivere esplicitamente le costanti del moto.

Consideriamo le condizioni iniziali $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $z(0) = 0$, $\dot{r}(0) = v_r$, $\dot{\theta}(0) = \omega$, e $\dot{z}(0) = 0$.

(3) Mostrare (molto brevemente) che la traiettoria del corpo m è piana. Calcolare le componenti F_r e F_θ della forza in funzione della posizione nel piano del moto.

(4) Dare la condizione necessaria e sufficiente a cui devono soddisfare r_0,θ_0,v_r e ω affinché il corpo non passi per l'origine.

(5) Dare la condizione a cui devono soddisfare $r_0, \theta_0, v_r, \omega$ affinché il moto del corpo m sia circolare.

(6) Determinare la distanza minima dall'origine raggiunta dal corpo, sapendo che le condizioni iniziali sono tali per cui $E = 0$, nell'ipotesi in cui tale distanza è maggiore di zero.

Soluzione:

1. *$E = T + V$ con $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$ e $V = -GMm(1/r_1 + 1/r_2)$ con $r_1^2 = r^2 + (z \pm d)^2$.*

2. *Solo E ed L_z sono costanti. Il particolarissimo moto studiato al punto successivo ha p_z, L_x ed L_y costantemente uguali a zero.*

3. *Siccome si parte con $z = \dot{z} = 0$ e si ha $\ddot{z} = 0$ (ma instabile!) si avra sempre $z = 0$.*

4. *Riscrivendo $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$, con $V_{\text{eff}}(r) = L^2/(2mr^2) - 2GMm/\sqrt{r^2+d^2}$, si nota che non è possibile arrivare a $r = 0$ se $L = mr_0^2\omega \neq 0$ cioè se $\omega \neq 0$. Alternativamente la costante del moto $L = mr^2\omega$ vale zero a $r = 0$; per cui se $L \neq 0$ non può passare da zero. Se invece $\omega = 0$ è possibile evitare di passare da zero se $\dot{r}_0 > v_{\text{fuga}} = \ldots$.*

5. *Un moto circolare ha $v_r = 0$ e $mv_\theta^2/r_0 = -F = V'$, cioè $\omega^2 = 2GM/(r_0^2 + d^2)^{3/2}$. In alternativa la condizione è $V'_{\text{eff}} = 0$ cioè $L^2 = m^2 r_0^4 \cdot 2GM/(r_0^2+d^2)^{3/2}$ ($L = mr_0^2\omega$).*

6. *Se $E = 0$ nel punto di distanza minima si ha $V_{\text{eff}}(r_{\min}) = 0$, cioè*

$$r_{\min} = \frac{L^2}{4\sqrt{2}Gm^2M}\sqrt{1 - \sqrt{1 + (8dGMm^2/L^2)^2}}$$

Relatività

Una particella di massa m si muove con velocità costante di modulo $v_A = c/4$. Quando si trova alla minima distanza da un punto O non appartenente alla retta su cui si muove, da O viene emessa una particella B di massa m e velocità, che si mantiene costante, di modulo $v_B = c/2$. La particella B incide su A e dà luogo alla reazione $A + B \to C + D$. Determinare:

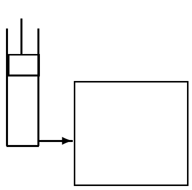
(1) In quale direzione deve essere emessa la particella B per colpire A.

(2) L'energia di A e B.

(3) L'energia del sistema formato da A e B nel riferimento del loro centro di massa.

(4) il valore delle masse $m_C = m_D$ delle particelle C e D al di sopra del quale la reazione citata non è possibile.

Termodinamica



Si consideri il sistema in figura, modellizzazione di una pompa. Il contenitore di sinistra ("pompa") è un cilindro chiuso in alto da un pistone senza massa e libero di muoversi senza attrito; il pistone ha un'area A e il gas nel contenitore sinistro ha un volume iniziale V_S. Il contenitore di destra si assuma indeformabile, di volume V_D. I due recipienti sono collegati da un tubetto di volume trascurabile, con una valvola che consente il passaggio di gas quando la forza esercitata su di essa dal gas a sinistra supera quella esercitata a destra. Inizialmente il gas all'interno del sistema ha la stessa temperatura T_0 dell'ambiente, la pressione nel contenitore di sinistra eguaglia la pressione esterna P_0, mentre la pressione nel contenitore di destra vale $P_D > P_0$. Si assuma che il gas nei contenitori sia perfetto e di calore molare a volume costante C_V.

(1) Si aggiunge sul pistone di sinistra la forza costante F ($F/A + P_0 > P_D$) e si lascia evolvere il sistema. Che temperatura raggiungerà il gas? Si assuma trascurabile il calore scambiato con l'esterno in questa trasformazione, che il volume raggiunto a sinistra sia maggiore di zero e che il gas, alla fine della trasformazione, possa essere considerato in equilibrio.

Si tiene chiusa la valvola e si blocca il pistone nella posizione raggiunta, lasciando che i due contenitori vadano all'equilibrio termico con l'ambiente.

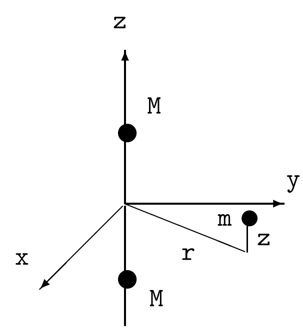
(2) Quale sarà la pressione finale del gas?

(3) Di quanto è variata l'entropia dell'ambiente nel complesso di tutte le trasformazioni?

Compito di Fisica Generale I (16/09/1997)

Meccanica

Un manubrio consiste di due corpi puntiformi di massa m connessi tra loro da un sistema che può essere schematizzato come una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo $2L$. Il sistema di connessione consente solo oscillazioni longitudinali delle masse.



Il manubrio, tenuto orizzontalmente, viene appoggiato come illustrato in figura, all'interno di una superficie conica liscia a base circolare, con asse verticale, e di apertura $\alpha = \pi/2$ (nella figura, il cono è visto in sezione).

1) Determinare la posizione di equilibrio y_0 del manubrio e a quale condizione deve soddisfare K affinché sia $y_0 > 0$.

Il manubrio, in quiete e sorretto orizzontalmente ad una distanza dal vertice pari a $y_0/2$ è successivamente lasciato libero di muoversi.

2) Determinare la legge oraria del manubrio, con le date condizioni iniziali.

3) Determinare la posizione in cui il manubrio, posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare Ω, può mantenersi ad una quota costante rispetto al piano $y = 0$.

4) Determinare, se esiste, il valore massimo di Ω al di sopra del quale non è possibile soddisfare la richiesta formulata nella domanda 3).

5) Scrivere, se esistono, le costanti del moto.

Relatività

Rispetto ad un sistema di riferimento K, la traiettoria di una particella di massa m e energia E forma un angolo θ rispetto ad una direzione fissata $\hat{x}$. Si consideri un altro sistema di riferimento K' in moto rispetto al primo con velocità $v\hat{x}$.

1) Rispetto a K' si calcoli l'angolo che la traiettoria della particella forma con l'asse $\hat{x}$.

Dare l'espressione di quest'angolo:

2) nel limite $v << c$;

3) nel limite di massa nulla della particella;

Termodinamica

Un recipiente cilindrico verticale, di area di base S, chiuso superiormente da un pistone mobile con attrito trascurabile lungo l'asse del cilindro, contiene n moli di gas perfetto di calore molare a volume costante c_V. Il gas è mantenuto in contatto termico con un corpo di capacità termica (che supporremo costante) C. Il sistema complessivo è isolato termicamente dall'esterno.

Nello stato di equilibrio iniziale il gas è alla pressione atmosferica P_0 (il peso del pistone è trascurabile) e alla temperatura T_0. Un corpo di massa M viene posto sul pistone e il sistema raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Si determini (trascurando le capacità termiche del recipiente e del pistone):

1) la temperatura nello stato di equilibrio finale.

Da questo stato di equilibrio il gas viene riportato reversibilmente (senza togliere il corpo di massa M) al volume iniziale. Si determinino:

2) la temperatura finale del gas;

3) la variazione di entropia totale subita dalle sorgenti con cui il gas è stato in contatto termico durante quest'ultima trasformazione;

4) la variazione di entropia del gas nel complesso delle trasformazioni subite.

5) Si dia inoltre il risultato richiesto in 1) nel caso in cui l'equazione di stato del gas sia $PV = nRT(1 + aP)$ con $a = K/T$, e K, R, c_V costanti note.

Compito di Fisica Generale I (6 Giugno 1997)

Meccanica

Un satellite di massa M in orbita circolare a distanza R dalla terra si spacca in due parti di ugual massa a causa di un'esplosione interna. L'esplosione ha origine chimica e fornisce una quantità di energia meccanica ΔE al sistema. Rispetto al c.m. del satellite, uno dei due frammenti viene emesso con un angolo θ_0, misurato a partire dalla direzione del campo gravitazionale terrestre.

(1) Calcolare in funzione di θ_0 la velocità, l'energia e il momento angolare del frammento rispetto alla terra.

(2) Dare la condizione affinché il frammento sfugga all'attrazione terrestre, supposta la terra puntiforme.

(3) Nel caso questa condizione non venga soddisfatta, determinare il periodo dell' orbita.

(4) Nel caso della domanda (3) e tenendo conto che la terra ha raggio R_T, dare la condizione affinché il frammento non ricada sulla terra.

Relatività

Consideriamo il seguente processo:

$$e^+ + e^- \longrightarrow Z_0 \longrightarrow \mu^+ + \mu^-,$$

cioè un processo di annichilazione della coppia elettrone-positrone (e^-, e^+) in cui viene generata la particella Z_0, che poi decade in una coppia di particelle μ^+ e μ^-. Le masse delle varie particelle soddisfano le seguenti relazioni:

$$M_\mu \simeq 2 \times 10^2 M_e, \qquad M_{Z_0} \simeq 2 \times 10^5 M_e.$$

Chiamiamo sistema di riferimento del laboratorio quello in cui l'elettrone e^- è inizialmente fermo.

(1) Calcolare l' energia del positrone e^+ incidente nel laboratorio e nel sistema del c.m..

(2) Calcolare l'energia dei μ nel sistema del c.m..

(3) Nel laboratorio, è possibile osservare un μ nella stessa direzione e verso opposto al positrone incidente? Giustificare la risposta.

(4) Scrivere, nel sistema del laboratorio, la relazione tra l'energia e la direzione di volo del μ. Facoltativo: si dica se, fissato l'angolo di emissione, l'energia del μ è univocamente determinata.

Si esprimano le energie richieste in unità $M_e c^2$.

Soluzione:

1. *Per la conservazione dell'impulso* $P_e + P_{\bar{e}} = P_Z$. *Prendendo il modulo* $M_Z^2 = 2m_e^2 + m_e E_{\bar{e}}$ *cioè* $E_{\bar{e}} \approx M_Z^2/m_e$.

2. *Per la conservazione dell'impulso* $P_Z = P_\mu + P_{\bar{\mu}} =$. *Nel CM* $P_Z = (M_Z, 0)$: *moltiplicando entrambi i membri per* P_Z *si ottiene* $M_Z^2 = M_Z(E_\mu + E_{\bar{\mu}})$, *da cui* $E_\mu = E_{\bar{\mu}} = M_Z/2$. *Qui* $E^2 = m^2 + K^2$, *cioè* E *include la masa.*

3. *no, i* μ *escono più lenti del positrone perchè* $m_\mu > m_e$.

4. *noiosetto. Direi di si.*
$$P_\mu = P_e + P_{\bar{e}} + P_{\bar{\mu}}, \qquad m_\mu^2 = (E_e + m_e + E_\mu)^2 - ..$$

Termodinamica

Un cilindro chiuso da un pistone mobile contiene n moli di gas perfetto monoatomico. Il gas si trova alla temperatura T_0 ed è in equilibrio con una pressione esterna P_0. Dopo aver isolato termicamente il cilindro la pressione viene ridotta istantaneamente al valore $P_1 = P_0/2$ e si aspetta che il sistema vada di nuovo all'equilibrio termodinamico.

(1) Determinare la temperatura T_1 e il volume V_1 di questo nuovo stato di equilibrio. Da questo stato, per mezzo di una trasformazione isoterma reversibile a temperatura T_1 il gas viene fatto espandere fino a raggiungere il volume $2V_1$.

A partire da queste condizioni, tramite un adiabatica, ottenuta aumentando istantaneamente di un'opportuna quantità ΔP la pressione esterna sul gas questo viene riportato alla temperatura T_0.

(2) Determinare la variazione di pressione ΔP.

Una trasformazione isoterma reversibile alla temperatura T_0 chiude il ciclo riportando il gas nello stato iniziale.

(3) Determinare il lavoro fatto durante il ciclo specificando se il lavoro è fatto dalla macchina o dall'esterno.

(4) Determinare la variazione complessiva di entropia delle sorgenti e del gas quando questo è ritornato nello stato iniziale.