Università di Pisa
Corso di laurea in Fisica

Compitini di Fisica 1

www.cern.ch/astrumia/fisica1.html

Compitino di Fisica 1 del 31/5/2000

Esercizio 1: Due particelle di ugual massa m, si muovono rispettivamente lungo gli assi x ed y nel verso positivo con energie $E_1 = 2.80mc^2$ ed $E_2 = 2.20mc^2$. Arrivate nel punto di coordinate $\vec{x} = 0$ collidono producendo una particella di massa M e velocità $\vec{v}$

1. Calcolare il modulo di $\vec{v}$ (in unità c) (1,-1)

   $|\vec{v}|\ [c] =$ $\boxed{}$ A $\boxed{1.77}$ B $\boxed{0.654}$ C $\boxed{1.93}$ D $\boxed{0.915}$ E $\boxed{0.323}$

2. Calcolare M in unità di m (1,-1)

   $M\ [m] =$ $\boxed{}$ A $\boxed{8.06}$ B $\boxed{2.00}$ C $\boxed{4.59}$ D $\boxed{3.78}$ E $\boxed{2.76}$

La particella prodotta vive per un tempo proprio 1.70×10^{-6} s, e successivamente decade in due fotoni di massa $m' = 0$ ed energie $E'_i = E_i$

3. Calcolare la coordinata x del punto di decadimento. (1,-1)

   x [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{899}$ B $\boxed{440}$ C $\boxed{805}$ D $\boxed{703}$ E $\boxed{352}$

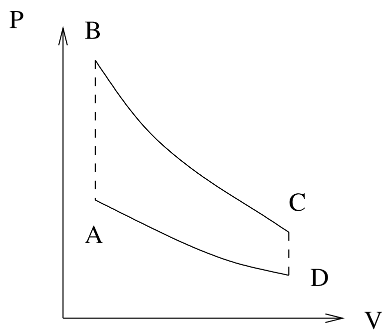
4. Calcolare l'angolo θ' fra le direzioni dei due fotoni. (1,-1)

   θ [Rad] = $\boxed{}$ A $\boxed{4.43}$ B $\boxed{3.80}$ C $\boxed{1.57}$ D $\boxed{2.11}$ E $\boxed{1.73}$

In unità $c = 1$

1. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\rm CM} = (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)/(E_1 + E_2)$ *quindi* $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}/(E_1 + E_2)$ *dove* $p_i^2 = E_i^2 - m^2$.
2. $M^2 = P^2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 = 2(m^2 + E_1E_2)$
3. $\Delta x = v_x \tau\gamma = \tau p_{1x}/M$ *avendo usato* $\gamma = (E_1 + E_2)/M$.
4. $P^2 = (P'_1 + P'_2)^2 = 2E_1E_2(1 - \cos\theta')$ *e quindi* $\cos\theta' = 1 - M^2/2E_1E_2 = -m^2/E_1E_2$. *Viene* $\theta' > 90^{\rm o}$, *infatti a parità di energia un fotone ha impulso maggiore di una particella massiva.*

Esercizio 2: Un gas perfetto percorre il ciclo illustrato in figura, costituito da due isocore e due adiabatiche. Durante l'isocora che porta 5.20 moli di ossigeno dallo stato A allo stato B a volume $V_A = V_B = 0.170$ m^3, il gas scambia calore solo con una sorgente alla temperatura $T_B = 400$ K, mentre durante l'isocora dallo stato C allo stato D a volume $V_C = V_D = 0.750$ m^3 il gas scambia calore solo con una sorgente alla temperatura $T_D = 100$ K. Le due adiabatiche che portano il gas dallo stato B allo stato C e da D ad A sono reversibili. Il gas nei punti B e D è in equilibrio termico con le sorgenti esterne.



Determinare:

1. La temperatura del gas nello stato A (1,-1)

   T [K] = $\boxed{}$ A $\boxed{181}$ B $\boxed{385}$ C $\boxed{473}$ D $\boxed{353}$ E $\boxed{269}$

2. Il rendimento del ciclo (1,-1)

$\eta =$ $\boxed{}$ A $\boxed{0.130}$ B $\boxed{0.900}$ C $\boxed{0.448}$ D $\boxed{0.750}$ E $\boxed{1.06}$

3. La variazione di entropia dell'ossigeno in un ciclo (1,-1)

ΔS [J/K] $=$ $\boxed{}$ A $\boxed{-71.5}$ B $\boxed{-88.2}$ C $\boxed{0.000}$ D $\boxed{-15.1}$ E $\boxed{-7.60}$

4. La variazione di entropia delle sorgenti (1,-1)

ΔS [J/K] $=$ $\boxed{}$ A $\boxed{204}$ B $\boxed{0.000}$ C $\boxed{11.1}$ D $\boxed{114}$ E $\boxed{71.5}$

Si supponga ora che le capacità termiche delle sorgenti B e D siano uguali e pari a 1500 J/K; si assuma inoltre che inizialmente le due sorgenti abbiano le stesse temperature indicate nella prima parte del problema. Non sono disponibili altre sorgenti. Si modifichi opportunamente il ciclo percorso dal gas perfetto, in modo da massimizzare il lavoro estraibile dalle due sorgenti.

5. Calcolare tale lavoro massimo (1,-1)

$\mathcal{L}$ [J] $=$ $\boxed{}$ A $\boxed{211000}$ B $\boxed{-24300}$ C $\boxed{0.000}$ D $\boxed{283000}$ E $\boxed{150000}$

L'ossigeno è biatomico, quindi $\gamma = 7/5$ e $C_V = 5R/2$.

1. *Lungo l'adiabatica DA $TV^{\gamma-1}$ è costante, quindi $T_A = T_D(V_D/V_A)^{\gamma-1}$. Similmente si trova $T_C = T_B(V_B/V_C)^{\gamma-1}$.*
2. *Il redimento è definito come $\eta \equiv L/Q_{AB}$ dove $Q_{AB} = nC_V(T_B - T_A)$ ed $L = Q = Q_{AB} + Q_{CD} = nC_V(T_B - T_A + T_C - T_D)$.*
3. *$\Delta S_{\text{gas}} = S(\text{fine}) - S(\text{inizio}) = 0$ per un ciclo.*
4. *$\Delta S_{\text{sorg}} = -Q_{AB}/T_B - Q_{CD}/T_D$.*
5. *Alla fine le due sorgenti avranno uguale temperatura T', ed il lavoro estratto sarà $L = C(T_A + T_B - 2T')$. La condizione $\Delta S_{\text{tot}} = 0 + C\ln(T'^2/T_BT_D) \geq 0$ dice che $T' \geq \sqrt{T_BT_D}$ e quindi $L \leq L_{\max} = C(T_A + T_B - 2\sqrt{T_AT_B})$. Il lavoro massimo lo si realizza operando mediante cicli di Carnot reversibili con isoterme infinitesime.*

Compitino di Fisica 1 del 27/3/2000

Esercizio 1: Due particelle di massa $m = 10\,\text{kg}$ interagiscono tramite un potenziale $V(r) = -k/r^4$ dove $k = 4.90\ \text{kg m}^6/\text{s}^2$ ed r è la distanza relativa. La prima particella è inizialmente ferma, mentre la seconda particella incide dall'infinito con velocità pari a $v_0 = 10\,\text{m/s}$.

1. Assumendo che, a causa dell'interazione, la particella incidente venga deviata di un angolo di 1.20 rad rispetto alla sua direzione iniziale, calcolare l'angolo formato dalla direzione finale dell'altra particella rispetto alla direzione iniziale della particella incidente. (4,-1)

   $\theta[\text{rad}] =$ $\boxed{0.371}$ A $\boxed{0.921}$ B $\boxed{0.763}$ C $\boxed{0.253}$ D $\boxed{0.839}$ <u>E</u> $\boxed{0.371}$

   *In un urto di due particelle di egual massa, una delle quali è inizialmente ferma, si ha $\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$ (vedi es. **??**).*

Assumendo invece che il parametro d'impatto valga $b = 3.8\,\text{m}$, calcolare:

2. la componente tangenziale della velocità relativa fra le due particelle quando la distanza relativa vale $r = 3.4\,\text{m}$. (3,-1)

   $v_\theta[\text{m/s}] =$ $\boxed{11.2}$ A $\boxed{17.1}$ B $\boxed{22.1}$ C $\boxed{27.1}$ D $\boxed{13.2}$ <u>E</u> $\boxed{11.2}$

   Il momento angolare rispetto al CM è una costante del moto e vale $L_{\text{CM}} = \mu b v_0 = \mu r v_\theta$, quindi $v_\theta = v_0 b/r$.

3. la minima distanza relativa raggiunta nel moto successivo (4,-1)

   $r_{\min}[m] =$ $\boxed{3.80}$ A $\boxed{0.0368}$ B $\boxed{2.34}$ <u>C</u> $\boxed{3.80}$ D $\boxed{10.3}$ E $\boxed{0.992}$

   L'energia rispetto al CM è una costante del moto e vale $E_{\text{CM}} = \frac{1}{2}\mu v_0^2$. Il potenziale effettivo $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + L_{\text{CM}}^2/2\mu r^2$ ha un massimo ad un valore intermedio di r. Imponendo $V_{\text{eff}}(r_{\min}) = E_{\text{CM}}$ si trova

$$r_{\min}^2 = \frac{L_{\text{CM}}^2}{2E_{\text{CM}}m}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4E_{\text{CM}}km^2}{L_{\text{CM}}^4}}\right)$$

la distanza minima effettivamente raggiunta è data dalla soluzione con $\pm \to +$. Per i valori dati di L_{CM} ed E_{CM} la soluzione con $\pm \to -$ è separata dai valori di r accessibili da una barriera di potenziale (effettivo).

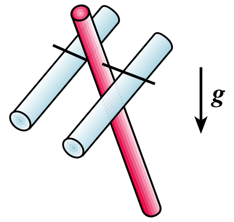
Se il parametro di impatto è minore di un certo valore limite, la distanza minima vale zero.

4. Calcolare questo valore limite. (4,-1)

$b_{\min}[m] =$ $\boxed{0.529}$ A $\boxed{0.529}$ B $\boxed{0.683}$ C $\boxed{0.599}$ D $\boxed{0.781}$ E $\boxed{1.09}$

Per un dato L_{CM} il potenziale effettivo ha un massimo $V_{\text{eff max}} = L_{CM}^4/4km^2$ ad $r_*^2 = 2km/L_{CM}$. Se $E_{CM} > V_{\text{eff max}}$ la barriera viene superata. Per fisso v_0 questo accade quando $b > 2(k/mv^2)^{1/4}$.

Esercizio 2: Un'asta sottile omogenea di massa $m = 2\,\text{kg}$ e lunghezza $\ell = 1.3\,\text{m}$ è attraversata perpendicolarmente da un perno di massa trascurabile, posto a $d = 0.34\,\text{m}$ da uno degli estremi. Il perno poggia su due guide orizzontali parallele, e può muoversi senza che si eserciti alcuna forza di attrito. All'istante zero l'asta è ferma, con il centro di massa in basso rispetto al perno, e l'angolo che essa forma con il vettore $\vec{g}$ è 0.850 rad. L'asta viene quindi lasciata andare.



1 Determinare il modulo della componente orizzontale della forza di contatto tra guide e perno dell'asta subito dopo averla rilasciata. (1,-1)

$F_{\text{orizzontale}}\,[\text{N}] =$ $\boxed{0}$ A $\boxed{4.74}$ B $\boxed{8.63}$ C $\boxed{0}$ D $\boxed{15.0}$ E $\boxed{17.3}$

Non essendoci alcuna forza 'orizzontale' $F_x = 0$.

2 Determinare il modulo del rapporto tra velocità del centro di massa e velocità di rotazione attorno al centro di massa quando l'angolo che l'asta forma con la verticale si è ridotto a metà dell'angolo iniziale (4,-1)

$|v_{CM}/\dot\theta_{CM}|[\text{m}] =$ $\boxed{0.128}$ A $\boxed{0.292}$ B $\boxed{0.0481}$ C $\boxed{0.253}$ D $\boxed{0.128}$ E $\boxed{0.171}$

$z_{CM} = -b\cos\theta$ con $b \equiv (\ell/2 - d)$. Quindi $\dot z_{CM} = \dot\theta \cdot b\sin\theta$.

3 Determinare il modulo della velocità di rotazione attorno al centro di massa allo stesso istante della domanda precedente (3,-1)

$|\dot\theta_{CM}|[\text{rad/s}] =$ $\boxed{3.15}$ A $\boxed{3.78}$ B $\boxed{3.15}$ C $\boxed{6.50}$ D $\boxed{8.61}$ E $\boxed{7.63}$

L'energia è una costante del moto e vale

$$E = \frac{m}{2}\dot z_{CM}^2 + \frac{I_{CM}}{2}\dot\theta^2 + mgz_{CM} = \frac{m}{2}\dot\theta^2\left[\frac{\ell^2}{12} + b\sin^2\theta\right] + mgb\cos\theta$$

con $I_{CM} = m\ell^2/12$. All'istante iniziale $\dot\theta_0 = 0$, quindi ad un qualunque istante successivo $\dot\theta^2 = \dfrac{2gb(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{\ell^2/12 + b^2\sin^2\theta}$.

4 Determinare il modulo dell'accelerazione angolare attorno al centro di massa allo stesso istante (3,-1)

$|\ddot\theta_{CM}|[\text{rad/s}^2] =$ $\boxed{10.4}$ A $\boxed{3.36}$ B $\boxed{1.54}$ C $\boxed{27.8}$ D $\boxed{10.4}$ E $\boxed{15.3}$

$\dot E = 0$ fornisce l'equazione del moto

$$\ddot\theta = -\frac{b\sin\theta(g - b\dot\theta^2\cos\theta)}{\ell^2/12 + b^2\sin^2\theta}$$

5 Determinare la pulsazione delle piccole oscillazioni dell'asta attorno al punto di equilibrio stabile. (4,-1)

$\omega[\text{rad/s}] =$ $\boxed{4.69}$ A $\boxed{10.0}$ B $\boxed{11.3}$ C $\boxed{0.553}$ D $\boxed{4.69}$ E $\boxed{6.49}$

Nel limite di piccole oscillazioni l'equazione del moto si riduce a $\ddot\theta = -\omega^2\theta$ con $\omega^2 = 12gb/\ell^2$.

Compitino di Fisica 1 del 11/1/2000

Esercizio 1: Una massa $m = 0.490$ Kg è attaccata ad un estremo A di una asta rigida di massa trascurabile e lunghezza pari a $\ell = 1.50$ m. Asta e massa sono immerse in un campo gravitazionale di intensità g diretto lungo la verticale. L'asta viene fatta ruotare con velocità angolare $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 2.00 + 3.90\ t$ Rad/s (t in sec) in un piano verticale attorno al secondo estremo B. Inoltre, il punto B viene spostato con velocità costante pari a $v_0 = 5.00$ m/s in direzione verticale, verso l'alto. Al tempo $t = 0$ s l'asta è in posizione verticale, con la massa in basso; la velocità angolare è positiva se in senso antiorario. Al tempo $t_1 = 0.450$ s, si calcolino:

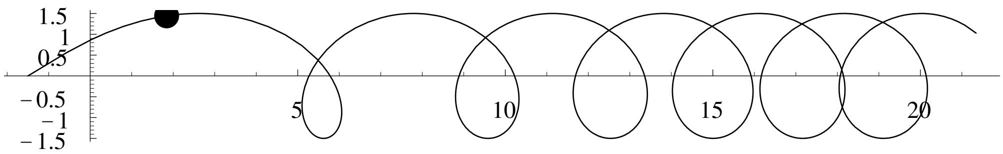
1. Il modulo della velocità della massa (3,-1)

   $|v|$ [m/s] = $\boxed{10.53}$ <u>A</u> $\boxed{10.5}$ B $\boxed{26.1}$ C $\boxed{7.18}$ D $\boxed{15.8}$ E $\boxed{22.5}$

   Introducendo $\theta(t) = -\pi/2 + \int_0^t \omega\ dt = -\pi/2 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ la legge del moto in coordinate cartesiane è

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \ell_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} t \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}(t) = \ell_0\omega(t) \begin{pmatrix} +\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.53 \\ 10.41 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad a\ t = t_1$$

   Disegnando l'asse z in orizzontale (per usare meno carta) il moto è



2. Il valore assoluto della componente dell'accelerazione perpendicolare all'asta (3,-1)

   $a_\perp$ [m/s^2] = $\boxed{5.85}$ A $\boxed{11.6}$ B $\boxed{14.2}$ C $\boxed{6.90}$ D $\boxed{17.5}$ <u>E</u> $\boxed{5.85}$

   Si può rispondere calcolando

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \ell_0\dot\omega \begin{pmatrix} +\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} - \ell_0\omega^2 \begin{pmatrix} +\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

   e notando che il primo termine è ortogonale all'asta mentre il secondo è parallelo. Quindi $|\boldsymbol{a}_\perp| = \ell_0\dot\omega = \ell_0\alpha = 5.85\,\mathrm{m/\,s^2}$. Sarebbe stato più semplice rispondere usando un sistema inerziale di coordinate polari con centro nel punto di rotazione (in moto a velocità costante). Viene chiesto $a_\theta = \rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta = \ell_0\dot\omega$. L'accelerazione parallela all'asta (ed ortogonale alla velocità) non viene chiesta e vale $a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\theta^2 = -\ell_0\omega^2$.

3. Il modulo della risultante delle forze che agiscono sulla massa (3,-1)

   $|F|$ [N] = $\boxed{10.75}$ A $\boxed{6.62}$ B $\boxed{2.81}$ C $\boxed{29.2}$ D $\boxed{12.1}$ <u>E</u> $\boxed{10.8}$

   Viene chiesto $|\boldsymbol{F}| = |m\boldsymbol{a}| = m = m\sqrt{a_\theta^2 + a_\rho^2} = m\sqrt{(\ell_0\dot\omega)^2 + (\ell_0\omega^2)^2} = 10.75\,\mathrm{N}$.

4. Il modulo della forza esterna applicata al punto B dell'asta (4,-1)

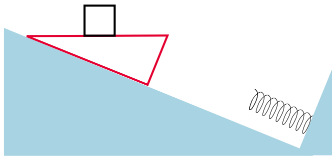
   $|F|$ [N] = $\boxed{13.94}$ A $\boxed{18.0}$ B $\boxed{15.8}$ C $\boxed{20.6}$ D $\boxed{2.04}$ <u>E</u> $\boxed{13.9}$

   L'equazione del moto per tutto il sistema (massa più asta) è $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_{\rm ext}$ dove $\boldsymbol{F}$ è la forza totale ed $\boldsymbol{P}$ è la forza peso $\boldsymbol{P} = (0, -mg)$. Conviene utilizzare le coordinate cartesiane in cui $\boldsymbol{P}$ è semplice:

$$|\boldsymbol{F}_{\rm ext}| = |m\boldsymbol{a} - \boldsymbol{P}| = m \begin{vmatrix} \ddot x \\ \ddot z + g \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -18.75 \\ 11.39 + 10 \end{vmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 13.94\,\mathrm{N}$$

Esercizio 2: Lungo un piano inclinato, immobile e che forma un angolo di $\theta = 0.690$ rad con l'orizzontale, scorre, senza attrito, un cuneo (si veda la figura) di massa $M = 0.990$ Kg: la geometria del cuneo è tale per cui la faccia superiore è parallela all'orizzontale. Sul cuneo è posto un blocchetto di massa $m = 0.650$ Kg. Il sistema è immerso in un campo gravitazionale di intensità g, diretto lungo la verticale. Si supponga che il blocchetto sia incollato al cuneo. Si determinino:

1. Il modulo dell'accelerazione con la quale si muove il cuneo (3,-1)



$|a|$ [m/s^2] = $\boxed{6.365}$ A $\boxed{2.01}$ B $\boxed{3.66}$ <u>C</u> $\boxed{6.37}$ D $\boxed{3.05}$ E $\boxed{7.31}$

Ovviamente cade con $A = g\sin\theta$.

2. Il modulo della forza di contatto del cuneo sul blocchetto (3,-1)

$|F|$ [N] = $\boxed{5.01}$ A $\boxed{11.5}$ B $\boxed{1.89}$ C $\boxed{9.93}$ <u>D</u> $\boxed{5.01}$ E $\boxed{6.69}$

Nel sistema di riferimento accelerato solidale al cueno il blocchetto è soggetto ad una forza $\boldsymbol{F}_C + m\boldsymbol{g}_\perp$, dove $\boldsymbol{F}_C$ è la forza di contatto richiesta dove $\boldsymbol{g}_\perp = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{A}$ è la componente della accelerazione di gravità perpendicolare al piano. Siccome in tale sistema il blocchetto è fermo $|\boldsymbol{F}_C| = m|\boldsymbol{g}_\perp| = mg\cos\theta = 5.01\,\mathrm{N}$. La forza di contatto comprende sia la reazione vincolare (verticale: $F_C^z = mg\cos^2\theta$) che la forza della colla (orizzontale: $F_C^x = mg\sin\theta\cos\theta$), senza la quale il blocchetto non avrebbe accelerazione orizzontale.

3. Dopo aver percorso un tratto di $d = 0.20$ m, il cuneo entra in contatto con la molla mostrata in figura. Sapendo che la molla ha massa trascurabile e costante elastica pari a $k = 30.00$N/m, e che cuneo e blocchetto sono partiti da fermi, si calcoli quale è la massima compressione a cui è sottoposta la molla, nel moto successivo (3,-1)

Δx [m] = $\boxed{0.858}$ A $\boxed{1.03}$ <u>B</u> $\boxed{0.858}$ C $\boxed{1.77}$ D $\boxed{2.35}$ E $\boxed{2.08}$

All'inizio è fermo. Nel momento di massima compressione è fermo ed ha acquistato una energia potenziale $\Delta V = -(m+M)(d+\Delta x)\sin\theta + \frac{1}{2}k\Delta x^2$. Siccome l'energia è costane allora $\Delta E = \Delta V = 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado in Δx si trova $\Delta x = a/k(1 \pm \sqrt{1 + 2dk/a})$ dove $a \equiv (m+M)g\sin\theta$ e la soluzione di interesse fisico corrisponde a $\pm = +$.

Si torni adesso alla situazione in cui il cuneo non è ancora arrivato in contatto con la molla; supponiamo che non ci sia più la colla tra blocchetto e cuneo, e che i due corpi possano muoversi uno rispetto all'altro senza attrito. Si osserva che durante il moto blocchetto e cuneo si muovono rimanendo in contatto. Si determinino:

4. Il modulo dell'accelerazione del cuneo (5,-2)

$|a|$ [m/s^2] = $\boxed{8.33}$ A $\boxed{2.69}$ B $\boxed{1.24}$ C $\boxed{22.3}$ <u>D</u> $\boxed{8.33}$ E $\boxed{12.3}$

L'accelerazione del cuneo ha solo una componente parallela al vincolo data da $MA = (R + Mg)\sin\theta$. Il blocco deve avere $a_z = A_z = A\sin\theta$. La sua equazione del moto lungo la verticale è $ma_z = -R + mg$. Risolvendo il sistema di 2 equazioni in 2 incognite si trova

$$A = \frac{(m+M)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta} = 8.33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad R = \frac{mMg\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta} = 3.054\,\mathrm{N}$$

5. Il modulo della forza di contatto tra blocchetto e cuneo (3,-1)

$|F|$ [N] = $\boxed{3.05}$ A $\boxed{6.52}$ B $\boxed{7.35}$ C $\boxed{0.360}$ <u>D</u> $\boxed{3.05}$ E $\boxed{4.23}$

Abbiamo già risolto in modo veloce. In modo più pedante si ottengono le stesse risposte scrivendo tutte le equazioni del moto e risolvendo il sistemone risultante:

$$MA_z = -Mg - R + P\cos\theta, \qquad MA_x = -F_C + P\sin\theta, \qquad ma_z = -mg + R, \qquad ma_z = F_C$$

dove P è la reazione del piano di appoggio, R la reazione vincolare fra cuneo e blocco e F_C è la forza della colla presente nelle domande iniziali. I vincoli geometrici sono $a_z = A_Z$ e $A_z/A_x = -\tan\theta$. In presenza della colla si ha anche il vincolo $a_x = A_x$; in assenza della colla $F_C = 0$.

Compitino di Fisica 1 del 26/05/1999

Esercizio 1 Si consideri un urto fra due particelle della stessa massa M che dà luogo a due particelle di masse uguali fra loro.

1. Nel riferimento del centro di massa le particelle entranti hanno ciascuna energia 92.0 Mc^2. Quale è il massimo valore della massa delle particelle prodotte per il quale il processo è cinematicamente possibile, in unità di M?

   $m\ [M] =$ $\boxed{\text{C}}$ A $\boxed{105}$ B $\boxed{120}$ C $\boxed{92.0}$ D $\boxed{264}$ E $\boxed{202}$

Nel riferimento del 'laboratorio' la particelle incidente ha ora invece energia 100 Mc^2 mentre l'altra è in quiete.

2. Quale è il massimo valore della massa delle particelle prodotte per il quale il processo è cinematicamente possibile, in unità di M?

   $m\ [M] =$ $\boxed{\text{C}}$ A $\boxed{7.78}$ B $\boxed{16.7}$ C $\boxed{7.11}$ D $\boxed{21.1}$ E $\boxed{9.63}$

Si osserva che le particelle prodotte hanno massa uguale a 4.40 M.

3. Quale è l'impulso delle particelle prodotte, nel riferimento del centro di massa del sistema, in unità Mc?

   $p_{max}\ [Mc] =$ $\boxed{\text{D}}$ A $\boxed{7.35}$ B $\boxed{12.2}$ C $\boxed{0.559}$ D $\boxed{5.58}$ E $\boxed{9.73}$

4. Nel riferimento del laboratorio, quale è il massimo valore che può avere l'impulso di una delle particelle prodotte, in unità di Mc?

   $p\ [Mc] =$ $\boxed{\text{A}}$ A $\boxed{89.7}$ B $\boxed{159}$ C $\boxed{193}$ D $\boxed{172}$ E $\boxed{225}$

1. Se vengono prodotte ferme $P'_1 + P'_2 \equiv P_{\rm out} = (2m', 0) = P_{\rm in} = (2m\gamma, 0)$ *quindi* $m' = \gamma m$.

2. $(2m')^2 = P^2_{\rm out} = (P_1 + P_2)^2 = 2m^2 + 2mE$ *quindi* $m' = m\sqrt{(1+\gamma)/2} = 7.106m$

3. $(2\gamma_{\rm CM} m)^2 = (P_1 + P_2)^2 = 2m^2(1+\gamma)$ *cioè* $\gamma_{\rm CM} = \sqrt{(1+\gamma)/2}$. *Ricavo* $\gamma'_{\rm CM}$ *dalla conservazione dell'energia:* $m\gamma_{\rm CM} = m'\gamma'_{\rm CM}$. *Quindi* $p'_{\rm CM} = m'v'_{\rm CM}\gamma'_{\rm CM} = 5.58mc$. *O anche* $p'_{\rm CM} = \sqrt{E'^2_{\rm CM} - m'^2} = m'\sqrt{\gamma'^2_{\rm CM} - 1}$.

4. Impulso massimo nel lab si ha per impulso in avanti nel CM. Quindi $p'_{\rm max} = \gamma_{\rm CM}(p'_{\rm CM} + v_{\rm CM}E'_{\rm CM}) = 89.65mc$.

Allo stesso risultato si può arrivare in modo alternativo senza mai fare uso del CM. Impongo che $P'_1 = (E', p', 0, 0)$ *e* $P'_2 = (E_{\rm in} - E', p_{\rm in} - p', 0, 0)$ *siano sul mass-shell. Ottengo* $P'^2_2 = (E'^2 - p'^2) + (E^2_{\rm in} - p^2_{\rm in}) - 2E_{\rm in}E' + 2p_{\rm in}p' = m'^2$. *Cioè* $2p_{\rm in}p' = 2p_{\rm in} + (E^2_{\rm in} - p^2_{\rm in}) = 2E_{\rm in}E' = \sqrt{p'^2 + m'^2}$ *da cui, con il segno opportuno, ottengo*

$$p' = \frac{1}{2}\left\{p_{\rm in} + E_{\rm in}\sqrt{1 + \frac{4m_2^2/m_1^2}{p^2_{\rm in} - E^2_{\rm in}}}\right\}$$

che è la stessa soluzione.

È comunque ovvio che il massimo p' *è circa* p_1*: quindi A è l'unica risposta possibile.*

Esercizio 2 Si considerino 1.80 moli di gas perfetto monoatomico, contenuto in un recipiente chiuso da un pistone scorrevole senza attrito. Il pistone è bloccato in modo da mantenere il gas al volume costante 2.90 m^3. Il gas è inizialmente alla temperatura $T_2 = 300$ K dell'ambiente, da considerare una sorgente termica. Una macchina frigorifera preleva calore dal gas e cede calore alla sorgente a spese di lavoro esterno, finché il gas raggiunge la temperatura finale $T_1 = 160$ K. Si determini:

1. Il lavoro minimo necessario per realizzare la trasformazione

   $\mathcal{L}_{\rm min}$ [J] = $\boxed{\text{B}}$ A $\boxed{2050}$ B $\boxed{1090}$ C $\boxed{3220}$ D $\boxed{2410}$ E $\boxed{1750}$

Si supponga che il lavoro necessario sia stato invece 5000 J. Al termine del raffreddamento il gas è lasciato in contatto termico con l'ambiente, alla cui temperatura si riporta. Si determini, per il complesso delle trasformazioni indicate:

2. La variazione di entropia della sorgente

   ΔS [J/K] = $\boxed{\text{B}}$ A $\boxed{10.5}$ B $\boxed{16.7}$ C $\boxed{30.7}$ D $\boxed{21.7}$ E $\boxed{18.8}$

Si sblocca ora il pistone sul quale agisce, dall'esterno, la pressione atmosferica (pari a 10^5 Pa). Si lascia che il gas, sempre in contatto termico con l'ambiente, raggiunga nuovamente l'equilibrio. Per questa trasformazione finale si determinino:

3. la variazione di entropia del gas

   ΔS[J/K] = $\boxed{\text{B}}$ A $\boxed{-107}$ B $\boxed{-62.4}$ C $\boxed{-14.1}$ D $\boxed{-156}$ E $\boxed{-93.6}$

4. La variazione di entropia dell'ambiente

   $\Delta S[\mathrm{J/K}] =$ $\boxed{\text{A}}$ A $\boxed{952}$ B $\boxed{869}$ C $\boxed{1750}$ D $\boxed{2650}$ E $\boxed{594}$

1. *Chiamiamo $Q_2 < 0$ il calore ceduto dalla macchina alla sorgente calda. Il calore assorbito dalla macchina alla 'sorgente fredda' (cioè al gas) vale $Q_1 = nC_V(T_2 - T_1) > 0$. Quindi il lavoro fatto dalla macchina vale $\mathcal{L} = Q_1 + Q_2 < 0$. Il lavoro minimo si ha quando*

$$\Delta S = \Delta S_{\text{macchina}} + \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{sorg}} = 0 + nC_V \ln\frac{T_1}{T_2} - \frac{\mathcal{L} - Q_1}{T_2} \geq 0$$

   vale zero. Quindi $|\mathcal{L}| \geq nC_V|(T_2 - T_1) + T_2\ln(T_1/T_2)|$.

   Allo stesso risultato si può arrivare in modo più complicato svolgendo un grande numero di cicli di Carnot reversibili con isoterma infinitesima. In ciascun ciclo la variazione di temperatura del gas che funge da sorgente fredda è trascurabile, quindi la formula standard per una macchina frigorifera dice che $\delta L = \delta Q_f(1 - T_2/T_f)$ dove $\delta Q_f = nC_V\, dT_f$ e T_f è la temperatura della sorgente fredda, che si vuole raffreddare da T_2 a T_1. Il lavoro totale si ottiene nuovamente integrando $L = \int_{T_2}^{T_1} \delta L$.

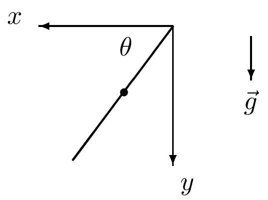
   Nel limite $T_2 \approx T_1$ l'efficienza è infinita.

2. $\Delta S_{\text{sorg}} = Q_2/T_2 - nC_V(T_2 - T_1)/T_2 = \mathcal{L}/T_2 = 16.7\,\mathrm{J/K}$

3. *Il gas rimane a temperatura ambiente, quindi $\Delta S_{\text{gas}} = nR\ln(V_f/V_i) = -62.38\,\mathrm{J/K}$ dove $V_f = nRT/p_{\text{atm}} = 0.045\,\mathrm{m}^3$.*

4. *Siccome è isoterma $Q = \mathcal{L}$, quindi $\Delta S_{\text{ambiente}} = -p_{\text{atm}}(V_f - V_i)/T_2 = 951.7\,\mathrm{J/K}$.*

Compitino di Fisica 1 del 26/03/1999



Esercizio 1: Una sbarra rettilinea sottile è costituita da due pezzi omogenei della stessa massa $m = 0.670$ kg e lunghezza $\ell = 1.20$ m incollati insieme per gli estremi. Il punto di incollaggio è rappresentato dal puntino posto a metà sbarra in figura. La sbarra può ruotare attorno ad un perno fisso posto ad uno degli estremi. La sbarra è inizialmente tenuta ferma orizzontalmente e poi lasciata libera. Non ci sono attriti. Si consideri la posizione raggiunta dalla sbarra dopo avere ruotato di un angolo pari a $\theta = \pi/3$ radianti. Determinare, in questa posizione:

1. La velocità angolare della sbarra. (4,-1)

   ω [rad/s] $=$ $\boxed{\text{B}}$ A $\boxed{9.54}$ B $\boxed{3.29}$ C $\boxed{8.17}$ D $\boxed{2.24}$ E $\boxed{7.03}$

   Quando passa per θ la sua energia cinetica $\frac{1}{2}I_{12}\dot\theta^2$ deve valere $\Delta V = 2mg\ell\sin\theta$. Siccome il momento d'inerzia è $I_{12} = 2m[\frac{1}{12}(2\ell)^2 + \ell^2] = \frac{8}{3}m\ell^2$ si ha $\dot\theta^2 = 2\Delta V/I_{12} = 3g\sin\theta/2\ell$.

2. Il valore assoluto della componente perpendicolare alla sbarra della forza che tiene incollate le due metà della sbarra. (4,-1)

   $|F|$ [N] $=$ $\boxed{\text{E}}$ A $\boxed{0.629}$ B $\boxed{0.828}$ C $\boxed{1.02}$ D $\boxed{0.494}$ E $\boxed{0.419}$

   L'equazione di moto che determina la rotazione del sistema è $I_{12}\ddot\theta = 2mg\ell\cos\theta$. L'equazione di moto che determina la rotazione della sbarra inferiore attorno al suo CM è $I_1\ddot\theta_1 = F_\theta\ell/2$ con $I_1 = m\ell^2/12$. Imponendo $\ddot\theta_1 = \ddot\theta$ si ottiene

$$F_\theta = 4mg(I_1/I_{12})\cos\theta = \frac{1}{8}gm\cos\theta$$

   Alternativamente l'equazione di moto del CM della sbarra inferiore $m\ddot{\boldsymbol{x}}_{\text{CM1}} = mg\binom{0}{1} + \boldsymbol{F}$ permette di ricavare la reazione vincolare. Proiettando lungo θ si ha $F_\theta = m\frac{3}{2}\ell\ddot\theta - mg\cos\theta$.

Raggiunta la posizione indicata, il pezzo inferiore si stacca.

3. A che tempo, dopo il distacco, la parte libera della sbarra si trova per la prima volta in posizione verticale? (4,-1)

   t [s] $=$ $\boxed{\text{C}}$ A $\boxed{0.267}$ B $\boxed{0.0980}$ C $\boxed{0.159}$ D $\boxed{0.431}$ E $\boxed{0.0415}$

   Per raggiungere la verticale deve ruotare di $\Delta\theta = \pi/6$. Siccome ruota con velocità angolare $\dot\theta$ costante (calcolata alla domanda 1), ci mette $\Delta t = \Delta\theta/\dot\theta$.

4. Determinare, con riferimento agli assi di figura, dove si trova il centro di massa della parte libera all'istante calcolato precedentemente. (2,-1)(2,-1)

x [m] = A   A 0.0838 B 0.108 C 0.0948 D 0.124 E 0.172

y [m] = C   A 0.681 B 1.24 C 2.16 D 1.03 E 2.48

Il centro di massa della sbarretta staccatasi si sposta secondo la legge oraria

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{CM}}(t) = \frac{3\ell}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}}t + \begin{pmatrix}0\\ gt^2/2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{3\ell}{2}\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ +\cos\theta\end{pmatrix}$$

Esercizio 2: Due corpi puntiformi, uno di massa doppia dell'altro, sono collegati da una molla di costante elastica $k = 3.00$ N/m, lunghezza a riposo nulla e massa trascurabile. Il corpo di massa minore ha una massa pari a $m_1 = 0.740$ kg. Si osserva che i due corpi descrivono due orbite circolari attorno ad un centro fisso, e la distanza tra di essi è $r_{12} = 1.20$ m.

1. Calcolare il modulo della velocità del corpo di massa minore. (3,-1)

v [m/s] = D   A 4.51 B 0.743 C 3.91 D 1.97 E 2.63

Imponendo $\mu v_{12}^2/r_{12} = F = kr_{12}$ si ottiene la velcoità relativa $v_{12} = r_{12}\sqrt{k/\mu}$. La massa ridotta vale $\mu = 2m/3$. Quindi $v_1 = \frac{2}{3}v_{12} = r_{12}\sqrt{2k/3m}$ e $v_2 = -\frac{1}{3}v_{12}$.

Ad un certo istante il corpo di massa minore urta un terzo corpo, inizialmente a riposo, di pari massa. L'urto è tale per cui i due corpi rimangono attaccati. Calcolare, immediatamente dopo l'urto:

2. La velocità delle masse rimaste attaccate. (3,-1)

v [m/s] = B   A 1.18 B 0.986 C 2.04 D 2.70 E 2.39

Per la conservazione dell'impulso, dopo l'urto $v_1' = v_1/2$ e $m_1' = 2m$.

3. L'energia meccanica di tutto il sistema. (4,-1)

E [J] = D   A 1.16 B 0.534 C 9.62 D 3.60 E 5.31

$E = \frac{1}{2}(m_1' v_1'^2 + m_2 v_2^2 + kr_{12}^2) = \frac{5}{6}kr_{12}^2$. Si noti che il centro di massa rimane fermo anche dopo l'urto e che dopo l'urto la massa ridotta vale $\mu' = m$.

Calcolare inoltre

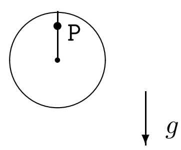
4. La lunghezza minima della molla successivamente all'urto. (4,-1)

l_{min} [m] = D   A 2.09 B 2.36 C 0.115 D 0.980 E 1.36

Imponendo $V_{\mathrm{eff}}(r_{\min}) = E$, con $V_{\mathrm{eff}}(r) \equiv L^2/(2\mu' r^2) + kr^2/2$ si ottiene $r_{\min}^2 = E/k(1 - \sqrt{1 - kL^2/\mu' E^2})$. Abbiamo già calcolato E; L vale $\mu' r_{12} v_{12}' = m r_{12}^2\sqrt{2k/3m}$. Inserendo i valori si ottiene $r_{\min} = r_{12}\sqrt{2/3}$. La soluzione è semplice in quanto il punto di partenza del moto è da $r_{\max}$, e non da un r qualunque.

Compitino di Fisica 1 del 11/01/1999

Esercizio 1: Un disco ruota in un piano verticale con velocità angolare che segue la legge oraria $\omega(t) = (1.80 + 1.50\ t/\mathrm{s})\mathrm{rad/s} = \omega_0 + \alpha_0 t$ attorno a un asse orizzontale passante per il centro. Un corpo di massa 1.70 kg, da considerare puntiforme, si muove rispetto al disco lungo uno dei raggi, con velocità costante pari a 2.40 m/s, diretta dal centro verso l'esterno. All'istante $t = 0$ il corpo si trova sulla verticale passante per il centro del disco, nella posizione P indicata in figura, ad una distanza di 2.00 m dal centro stesso. Il corpo è soggetto, oltre alla forza di contatto esercitata dal disco, alla forza dovuta a un campo gravitazionale di intensità g diretto come in figura.



Al medesimo istante $t = 0$ determinare, nel sistema di riferimento inerziale in cui il centro del disco è fermo:

1 Il modulo della velocità del corpo (3,-1)

v [m/s] = C   A 0.632 B 1.37 C 4.33 D 2.08 E 2.40

Il corpo si muove secondo la seguente legge oraria: in coordinate polari $\rho(t) = \rho_0 + v_0 t$ e $\theta(t) = \pi/2 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_0 t^2$, quindi $v_\rho = \dot\rho \rightarrow v_0 = 2.4\,\mathrm{m/s}$ e $v_\theta = \rho\dot\theta \rightarrow \rho_0\omega_0 = 3.6\,\mathrm{m/s}$ a $t = 0$. Il modulo di $v = (v_\rho^2 + v_\theta^2)^{1/2} = 4.33$.

2 Il modulo della risultante delle forze applicate al corpo (5,-2)

F [N] = D A 51.8 B 8.53 C 17.0 D 22.6 E 11.0

La forza totale $\boldsymbol{F}$ è data da $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. In coordinate polari $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \to -\rho_0\omega_0^2 = 6.48\,\mathrm{m/s^2}$ e $a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \to \rho_0\alpha_0 + 2v_0\omega_0 = 11.64\,\mathrm{m/s^2}$. Quindi $F = 22.6\,\mathrm{N}$.

3 Il modulo della forza di contatto tra il disco e il corpo (3,-1)

F [N] = B A 24.8 B 20.7 C 42.7 D 56.5 E 50.1

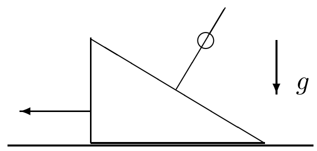
Sul corpo agiscono due forze: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{cont}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{grav}}$. Per cui $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cont}} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{grav}} = \{F_\rho + mg, F_\theta\}$.

4 Il valore assoluto della componente dell'accelerazione perpendicolare alla velocità istantanea (4,-1)

a_n [m/s^2] = D A 3.83 B 1.76 C 31.7 D 11.8 E 17.5

La componente dell'accelerazione parallella alla velocità vale $a_= = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}/v = 6.09\,\mathrm{m/s^2}$. Quindi $a_\perp = (a^2 - a_=^2)^{1/2}$.

Esercizio 2: Si consideri un cuneo di massa $M = 6.90$ kg, libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Sul cuneo è posta un'asta di massa trascurabile, perpendicolarmente alla superficie superiore del cuneo. Sull'asta è libera di muoversi senza attrito una massa di $m = 3.80$ kg (raffigurata come un piccolo cerchio in figura). È presente un campo gravitazionale di intensità g orientato come in figura. L'angolo tra la superficie superiore del cuneo e l'orizzonte è $\theta = \pi/6$ rad.



Sul cuneo è applicata una forza orizzontale incognita come mostrato in figura, e si osserva che il cuneo compie un moto rettilineo uniforme, mentre il corpo scende lungo l'asta. Si calcolino:

1 Quanto è il modulo della forza di contatto tra asta e massa mobile (4,-1)

F [N] = D A 40.6 B 45.7 C 2.24 D 19.0 E 26.3

Questo problema è equivalente ad avere un piano inclinato con angolo $\pi/2 - \theta$. Per quanto riguarda le forze, muoversi di moto rettilineo uniforme è equivalente a stare fermi. La reazione vincolare è opposta alla componente della gravità lungo l'asta: $R = mg\cos\theta = mg/2$.

2 Quanto è il modulo della forza orizzontale applicata al cuneo (4,-1)

F [N] = D A 0.000 B 23.7 C 9.41 D 16.5 E 36.9

È la componente orizzontale della forza di reazione: $R_x = mg\cos\theta\sin\theta$.

3 Quanto è il modulo della forza verticale che si esercita tra il cuneo e il piano di appoggio (4,-1)

F [N] = A A 78.5 B 133 C 107 D 21.1 E 210

Il peso sentito dal piano di appoggio è $Mg + R_z = (M + m\cos^2\theta)g = (M + m/4)g$. Lo stesso risultato si ottiene come $(M+m)g - ma_z = Mg - mg(1-\cos^2\theta)$. La risposta $C = (M+m)g$, sebbene molto gettonata, è sbagliata.

Si rimuove ora la forza di cui alle domande precedenti e si applica una nuova forza, sempre come mostrato dalla freccia in figura. Si osserva che, con la nuova forza, la massa sull'asta si muove di moto rettilineo uniforme rispetto all'asta. Si calcoli, nella nuova situazione:

4 Quanto è il modulo della forza orizzontale applicata al cuneo (3,-1)

F [N] = A A 185 B 381 C 548 D 500 E 337

Nel sistema non inerziale in cui il cuneo è fermo, la massa non cade se la somma vettoriale $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{g}$ è ortogonale al vincolo, cioè se $A = g/\tan\theta$. Per far accelerare il sistema con questa accelerazione occorre una forza $F = (M+m)A$. Un modo alternativo di risolvere questo problema consiste nel scrivere tutte le equazioni del moto

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= +R\sin\theta - mg \\ M\ddot{Z} &= -R\sin\theta - Mg + P \\ m\ddot{x} &= +R\cos\theta \\ M\ddot{X} &= -R\cos\theta + F_{\mathrm{ext}} \end{aligned}$$

(4 equazioni per 7 incognite) supplementatndole con 3 equazioni di vincolo, che nei due casi particolari di moto discussi nel problema sono:

(1) $\ddot{Z} = 0$, $\ddot{X} = 0$ *e* $\ddot{x} = \ddot{z}\tan\theta$

(2) $\ddot{Z} = 0$, $\ddot{X} = \ddot{x}$ *e* $\ddot{z} = 0$.