

Elettro-Magnetismo

Alessandro Strumia

Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Indice

Semina

| | |
|------------------------------------|-----|
| Forza di Coulomb | 10 |
| Dipolo elettrico | 52 |
| Multipolo | 58 |
| Conduttori | 67 |
| Dielettrici | 76 |
| Correnti e conduzione | 86 |
| Magnetostatica | 102 |
| Induzione magnetica | 116 |
| Generazione di campi magnetici ... | 126 |
| Dipolo magnetico | 134 |
| Induttori ed energia magnetica ... | 142 |
| Magnetismo nella materia | 149 |

Vendemmia

| | |
|---------------------------------------|-----|
| Corrente di spostamento | 164 |
| Onde elettromagnetiche | 171 |
| Onde nella materia | 187 |
| Ottica geometrica | 195 |
| Ottica ondulatoria | 204 |
| Invarianza di gauge e relativistica . | 223 |
| Dubbi fondamentali | 218 |
| Irraggiamento | 252 |
| Difficoltà finali | 267 |

Introduzione

Programma del corso

Elettrostatica

Forza di Coulomb. Campo elettrico, potenziale elettrostatico, teorema di Gauss e Stokes, 1a e 2a equazione di Maxwell statiche. Equazioni di Poisson e Laplace. Campo elettrico di varie distribuzioni di carica. Dipoli, sviluppo in multipoli. Energia del campo elettrico e di una distribuzione di carica. Conduttori. Metodi di soluzione dei problemi di elettrostatica dei conduttori. Capacità, condensatori. Campo elettrico nella materia, dielettrici, polarizzazione (accenno). Correnti stazionarie, conservazione della carica, legge di Ohm, effetto Joule, resistenze.

Magnetismo

Forza di Lorentz. Campo magnetico generato da correnti: legge di Biot-Savart, legge di Ampere. Dipolo magnetico. Energia del campo magnetico e di un sistema di circuiti, induttanza e mutua induttanza. Magnetismo nella materia (accenno). Circuiti RL , RC , RLC . Legge di Faraday. Forza elettromotrice indotta, generatori di corrente. Corrente di spostamento. 3a e 4a equazione di Maxwell.

Elettro-magnetismo

Onde elettromagnetiche nel vuoto, polarizzazione, ricezione. Onde nella materia, riflessione e rifrazione, interferenza, diffrazione. Potenziale scalare e vettore, simmetria relativistica e di gauge. Soluzioni con tempo ritardato, irraggiamento.

Info

Corso 242BB, 9 crediti, 81 ore tenuto da Alessandro.Strumia@unipi.it

| | Orario | Aula |
|-----|-------------|----------|
| Ma | 11:00-13:00 | DM Magna |
| Me | 16:00-18:00 | Fib G |
| Gio | 11:00-13:00 | DM Magna |
| Ve | 11:00-13:00 | Fib P1 |

Previsto streaming e registrazioni (studenti che risolvono esercizi su schermo analogico possono evitarla). Se dimentico il connettore per favore recuperatelo.

Siti web: [Esami](#). [Registro lezioni](#). elearning.dm.unipi.it/enrol/index.php?id=325. Registrarsi per avvisi. Contiene queste slides ed una raccolta di esercizi/compiti.

Sito non web: ufficio 177 edificio C. Ricevimento on-line dopo lezioni, etc.

Valutazione

Se le norme covid lo consentono: 2 compitini (ovvero esercizi: il 1o su E , il 2o su B e onde) e quiz moodle (prevalentemente nozionistico sul sito e-learning del corso; avete strumenti internet?). Poi, dopo il corso: 5 compiti con quiz moodle. Altrimenti solo orale, con un pre-test moodle.

Risorse & testi consigliati

Risorse:

- Queste slides. Slides con titolo in **rosso chiaro** sono avanzate ed accennate.
- La raccolta di esercizi e compiti.

Le slides sono sintetiche (provo ad espandere in dispense). Solitamente serve anche un testo. Va bene uno qualunque fra quelli avanzati (useremo unità di misura MKS):

- Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* [MKS]
- Mencuccini, Silvestrini, *Fisica II (Elettromagnetismo-Ottica)* [MKS]
- Lovitch, Rosati, *Fisica Generale 2* [MKS]
- Halliday, Resnick, Krane, *Fisica 2* [MKS]
- Mazzoldi, Nigro, Voci, *Elettromagnetismo e onde* [MKS]
- **Fitzpatrick**, gratis online [MKS]
- **Tong**, gratis online [MKS]
- La fisica di Berkeley, *Elettricità e magnetismo* [cgs]
- Picasso, ETS [cgs]
- ...

Testi ultra-avanzati:

- Jackson, *Elettrodinamica classica* [cgs, ora MKS]
- *The Feynman Lectures on Physics, volume 2*, gratis online [MKS]

A che serve?

- “There is every probability that you will soon be able to tax it” (Faraday). Non aveva previsto tre telefonate al giorno per ‘sconti sull’elettricità’.
- EM + quanti = Atomi. Materia. Chimica. Elettronica...
- Inizio: esperimenti nella materia, $E, B, D, P, H, M...$
- Fine: teoria fondamentale di campi elettrici E e magnetici B .
- Più teoria approssimata della materia e degli atomi.
- Più teoria della luce.
- Più nuovi concetti teorico/matematici:
 - Teoria di campo: da $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$.
 - Relatività: da rotazioni spaziali SO(3) a rotazioni SO(3,1) di \mathbf{x}, t .
 - Invarianza di gauge U(1)_{em}.
- Invertendo la storia, si può derivare la teoria da principi primi scelti bene:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + J_\mu A_\mu \right]$$

Equazione classica minimizzando l’azione, $dS/dA = 0$. Quantistica:
 $\int dA e^{iS/\hbar}$.

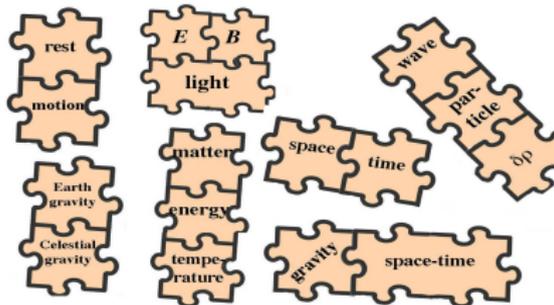
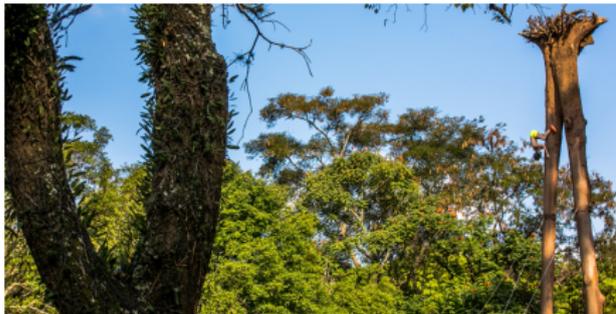
- Le interazioni deboli e forti sono simili, gauge U(1)_Y \otimes SU(2) \otimes SU(3).

Fisica \neq Matematica

Ci focalizziamo più su aspetti teorico/matematici.

Anche così il corso ha meno rigore di un corso di matematica. Volutamente.

La fisica progredisce su due gambe: esperimento e consistenza matematica. Quando serve anche su di una sola. Esempi: **corrente di spostamento**, **inconsistenza finale**.



La matematica tende a ramificarsi (?), la fisica ad unificarsi. Si procede a tentoni a comporre un puzzle che mano a mano sembra chiarirsi.

Prime evidenze sperimentali



Pettinando gatti con ambra ($\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\omicron\nu$ i.e. electron in greco) si osservano piccole forze. Pettinandosi con plastica, le punte del pettine attirano piccoli pezzi di carta. Si osservano forze repulsive fra uguali materiali strofinati, e a volte repulsiva tra materiali diversi. Suggerisce $F \sim q_1 q_2$ e due tipi di materiali: tipo plastica accumulano carica $q < 0$ (elettroni), tipo vetro accumulano $q > 0$ (perdono e).

Isolante: impedisce alle cariche di muoversi (ambra, vetro, plastica...).

Conduttore: materiale che permette alle cariche di muoversi (metalli...). Dimostrabile con **elettroscopio a foglie**. Sono effetti complicati ed indiretti. Meglio studiare casi semplici.

Legge di Coulomb

De Coulomb era un aristocratico francese esperto in bilance di torsione, che usava per studiare l'attrito. Nel 1789 tirava brutta aria e De Coulomb si ritirò a studiare le forze elettriche ri-osservando la legge non pubblicata da Henry Cavendish:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$1/r^2$ come Newton, ma repulsiva per cariche dello stesso segno. Esistono cariche + e -. La costante numerica

$$k = 8.9875 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}.$$

è solo la definizione del Coulomb, unità arbitraria di carica elettrica.

Useremo unità di misura metri-kilo-secondo-Coulomb (MKSC o 'internazionale') invece del cm-grammo-secondo (cgs o 'razionale') dove $k = 1$ o $k = 1/4\pi$.

(Lo ϵ_0 indica che vale nel vuoto. Nella materia $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, con $\epsilon_r = 1.0005$ nell'aria e $\epsilon_r \approx 80$ nell'acqua; $\epsilon_r = 3.5$ nella carta, $\epsilon_r = 4.7$ nel vetro).



Considerazioni filosofiche

È una legge a potenza $1/r^p$: non appare nessuna lunghezza speciale r_0 .

Sembra azione a distanza ($F \neq 0$ per $r \neq 0$), come la forza di Newton che scriveva:

*“It is **inconceivable** that inanimate Matter should, without the Mediation of something else, which is not material, operate upon, and affect other matter without mutual Contact...*

*...that one body may act upon another at a distance thro' a Vacuum, without the Mediation of any thing else, by and through which their Action and Force may be conveyed from one to another, is to me so great an **Absurdity** that I believe no Man who has in philosophical Matters a competent Faculty of thinking can ever fall into it”.*



A fisica 1 si promuove $x = \frac{1}{2}at^2$ in $F = ma$, imparando che la fisica è locale nel tempo: $v(t + dt) = v(t) + dt F(t)/m$, invece di

$$v_{\text{oggi}} = v_{\text{ieri}} + \Delta t \frac{F_{\text{ieri}}}{m} \quad \text{o} \quad v(t) = \int^t dt' \frac{F(t')}{m}$$

Similmente, nelle prossime lezioni di fisica 2 riformuleremo Coulomb in maniera più locale, capendo cosa si nasconde dietro la potenza speciale $1/r^2$. Per intanto...

Lavoro ed energia potenziale

La forza elettrica è radiale, quindi conservativa.

Il lavoro per muovere q_2 nel campo di q_1 è

$$\mathcal{L}(A \rightarrow B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = U(r_A) - U(r_B)$$

dove

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

è l'energia potenziale

con dimensione $[U] = \text{Joule}$, e $\mathbf{F} = -\nabla U$.

Principio di sovrapposizione

Si **misura** che la forza è la somma delle forze prodotte dalle singole cariche.

Quindi è naturale introdurre il **campo elettrico \mathbf{E}** con dimensione $[E] = \text{N/C}$:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i qq_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \equiv q\mathbf{E}(x, y, z, t), \quad \mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

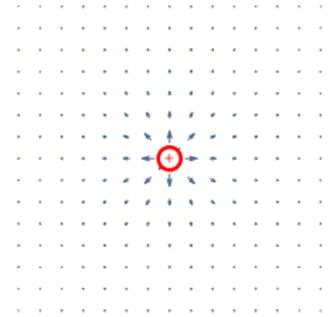
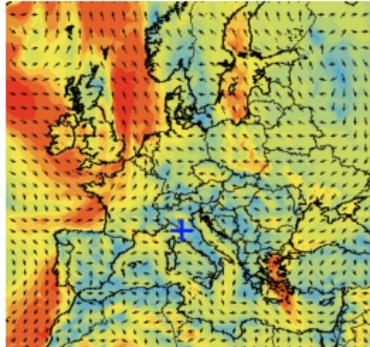
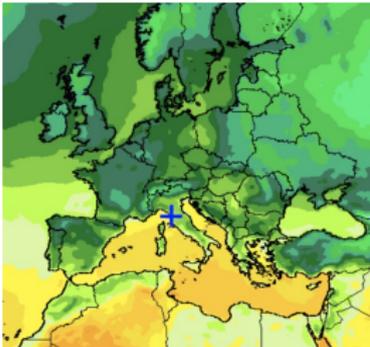
(Dettaglio spiacevole: bisogna escludere la carica q da \sum_i per evitare $0/0$).

È un **campo vettore** in (3+1)d: una freccia in ogni punto dello spazio-tempo.

Campo scalare in 2d: T

Campo vettore in 2d: \mathbf{v}

\mathbf{E} esce da carica +

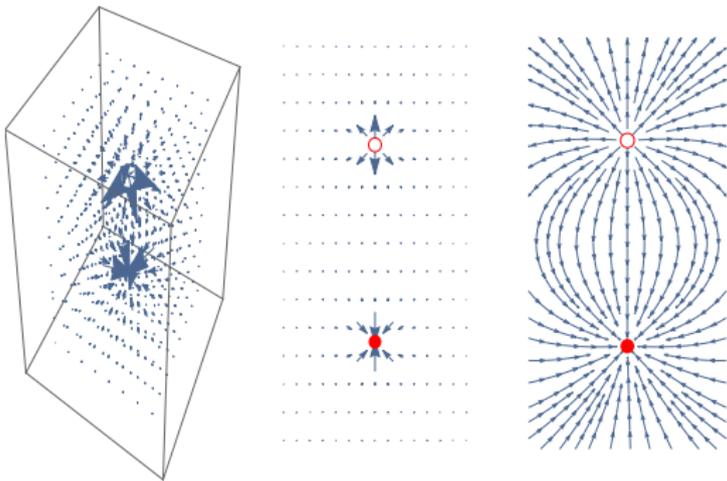


Linee di campo

Per visualizzare di solito conviene disegnare le linee di campo: traiettorie ottenute muovendosi seguendo \mathbf{E} , ovvero congiungendo le frecce. Quindi non si incrociano. Si addensano dove E è grosso: modulo visualizzato indirettamente.

(Matematicamente equivale a risolvere $d\mathbf{x}/d\lambda = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ dove λ è un parametro).

Esempio: le linee di campo fra due cariche di segno opposto vanno da + a -



Potenziale elettrico

Combinando $\mathbf{F} = -\nabla U$ con $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ si definisce

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = U/q$$

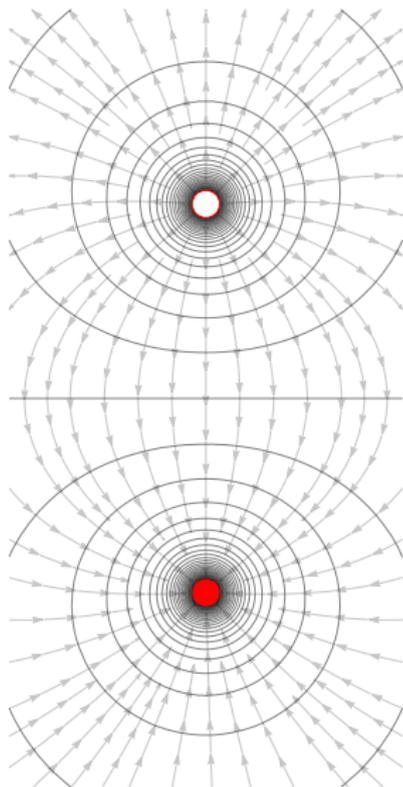
dove il campo scalare $\varphi(x, y, z, t)$ è chiamato **potenziale elettrico**. A volte denotato con V .

La sua unità di misura è famosa:

$$[\varphi] = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} \equiv \text{Volt} = \text{V}$$

φ è definito a meno di una costante. Per sorgenti di cariche finite è usualmente fissata imponendo $\varphi = 0$ all'infinito.

Superfici equipotenziali \equiv superfici con $\varphi = \text{cte}$. Sono ortogonali a \mathbf{E} ed alle sue linee di campo.



Quantizzazione della carica dell'elettrone

Interi in reazioni chimiche indicano che la natura è particellare, non continua.

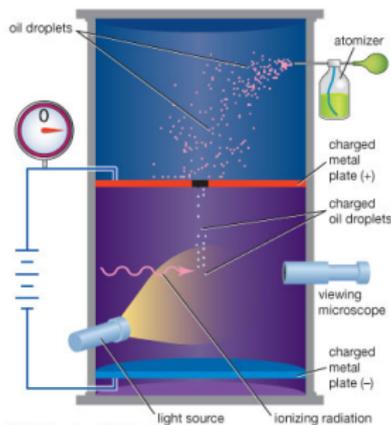
Le cariche sono multiple di $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Come misurarla? La forza fra due elettroni

$$F = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 = 2 \cdot 10^{-22} \text{ N (mm/r)}^2$$

è troppo piccola perché $\propto e^2$.

Meglio un e in un E esterno, dove $F = eE$. Millikan nel 1910 mise piccole gocce di olio con carica random $q \sim 10e$, $r \sim 10^{-6} \text{ m}$, $m \sim 10^{-14} \text{ kg}$, visibili come puntini grazie ad una luce intensa, in un mezzo viscoso con $E \sim 1000 \text{ V/m}$:



© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

$$m\dot{v} + \eta v = F = qE + mg \quad \Rightarrow \quad v_{\text{lim}} = \frac{F}{\eta}$$

con $mg \sim 10^{-15} \text{ N} \sim qE$. Misurando v_{lim} con e senza E si ricava

$$q = \frac{mg}{E} \left[\frac{v_{\text{lim}}(E)}{v_{\text{lim}}(0)} - 1 \right].$$



Quantizzazione della carica del protone

Si osserva che:

- Tutti gli elettroni hanno uguale carica $q_e = -e$ e massa m_e (vedremo come).
- L'idrogeno $H_2 \sim (ep)(ep)$ non è deflesso in \mathbf{E} costante: questo significa che ha carica piccola o nulla $|q_p + q_e| < 10^{-20} e$.
- Oggi è noto che $p \sim uud$ dove $q_u = 2e/3$ e $q_d = -e/3$.
E il neutrone è $n \sim udd$.

Si definisce eV \equiv energia che un elettrone acquista attraversando 1 Volt

$$eV \equiv e \times V = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \times \text{Volt} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$$

Newton vs Coulomb

$\mathbf{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$ è analoga a $\mathbf{F}_N = -\frac{G_N m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ dove $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm/kg}^2$.

Differenze: segno; la massa è solo positiva; la gravità è 'debole':

- Nell'idrogeno $F_N/F_C = 4\pi\epsilon_0 G_N m_e m_p / e^2 = 4.4 \cdot 10^{-40}$, non dipende da r .
- Facile sollevare pesi nonostante l'attrazione gravitazionale della Terra.
- Nella materia grossa F_C fra 10^{30} cariche di entrambi i segni.

Una mole di idrogeno contiene $2N_A e = 192000C$. A distanza di un metro, $F_C \sim 3 \cdot 10^{20} \text{N}$! Abbastanza da sollevare un pianeta ($M_\oplus = 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$).

| | Elettricità | Gravità |
|------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Campo | $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ | $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ |
| Forza | $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ | $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ |
| Potenziale | $U = q\varphi$ | $U = m\phi$ |
| Sorgente | $q_e = -q_p$ | $m_e = m_p/1876$ |
| Fondamenta | $\varphi \rightarrow A_\mu$ | $\phi \rightarrow g_{\mu\nu}$ |

Coulomb (fisica 2) è un fenomeno nuovo, non spiegabile in termini di forze fra materia (fisica 1). Le teorie nuove devono spiegare le vecchie. Non il contrario.
Attenzione che lo stesso varrà per fisica 3 (quantistica) vs fisica 1,2 (classica).

Coulomb tiene assieme atomi e materia

Vogliamo mostrare che la forza di Coulomb può spiegare atomi e materia.

Questa fisica può essere **calcolata** in termini di poche costanti fondamentali:

$$(G_N), \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad m_{e,p}, \quad \hbar.$$

Evitiamo \hbar : facendo **stime** può essere sostituito dalla dimensione degli atomi. Ricaviamo dai dati le dimensioni degli atomi: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ significa

$$r \sim \frac{\text{cm}}{\sqrt[3]{N_A}} \sim 10^{-8} \text{ cm} \equiv \text{\AA}, \quad m_p \approx \frac{\text{gram}}{2N_A} \sim 10^{-26} \text{ kg}.$$

Nel seguito useremo, a livello di stima, un fatto “noto” di termodinamica

$$(\text{temperatura } T) \sim (\text{energia media}).$$

Teorema di equipartizione: ogni grado di libertà ha energia media $k_B T/2$.

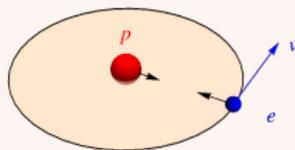
La costante di Boltzmann k_B è solo una costante di conversione. T ambiente:

$$T = 20 \text{ Celsius} = 293.15 \text{ Kelvin} \quad \Rightarrow \quad E = k_B T = \frac{\text{eV}}{39.6}.$$

Atomo

La **forza elettrica** ha un valore quasi macroscopico

$$F_C \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \text{\AA}^2} \approx 10^{-8} \text{N}.$$



Per cancellarla si formano atomi neutri. Il nucleo con Z protoni ha $q = Ze$ che determina la tavola periodica.

Il **potenziale elettrico** di un atomo di idrogeno ep è

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27 \text{ Volt} \quad \text{per } r = 0.53 \text{\AA} \text{ (idrogeno, } Z = 1\text{)}.$$

Velocità: $m_e v_e^2 / r = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$ i.e. $v_e = e \sqrt{1 / 4\pi\epsilon_0 m_e r} \approx c / 137 \ll c$.

Velocità angolare $\omega = v_e / r = e / \sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3} \approx 4.1 \cdot 10^{16} \text{ Hz} \sim$ righe spettrali.

L'**energia di legame**, per orbita classica circolare, è

$$E = \frac{m_e}{2} v_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV} \equiv 1 \text{ Rydberg}$$

è antropicamente simile all'energia termica a temperatura ambiente, $E \sim \text{eV}/40$.

Materia

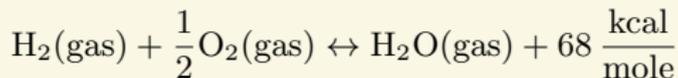
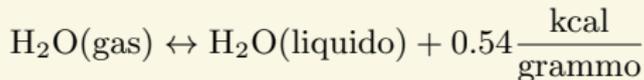
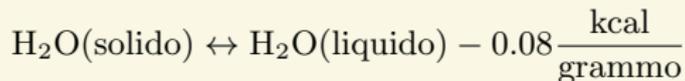
La forza fra due atomi è $F_C \approx e^2/4\pi\epsilon_0\text{\AA}^2 \approx 10^{-8}\text{N}$.

Una bacchetta di sezione 1 cm^2 ha $n = (\text{cm}/\text{\AA})^2 = 10^{16}$ legami fra atomi: per spezzarla serve $nF_C \sim 10^8\text{N}$. Non male in approssimazione gesso \approx acciaio. Solo gli elettroni esterni vengono ritoccati in reazioni: otteniamo sovra-stime.

Ricombinare una mole di materia fornisce o richiede energia

$$U \sim N_A \cdot \text{eV} \sim 10^5 \text{ Joule} \sim 100 \text{ kcal} \quad \text{cal} = 4.2 \text{ J}$$

È simile all'energia di tipiche reazioni chimiche e fisiche, ad esempio



$$1\text{ cm}^3 \text{ di cioccolato} \sim 1 \text{ gianduiotto} \sim 0.1 \text{ kcal}$$

Solidi a $k_B T \ll E$. Liquidi/molli a $k_B T \sim E$. Gas a $k_B T \gg E$.

Oggetti

Massima altezza h di animale in g con spessore $S \equiv \epsilon h^2$, massa $M \sim m_p N_V$, $N_V \sim Sh/\text{\AA}^3$, $N_S \sim S/\text{\AA}^2$. Se troppo alto si rompe cadendo:

$$Mgh \sim \boxed{U_{\text{grav}} \gtrsim U_{\text{el}}} \sim N_S \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \text{\AA}}$$

Quindi $h \lesssim e/\sqrt{gm_p\epsilon_0} \sim \text{m}$ non dipende da \AA o dalla forma $\epsilon = S/h^2$.

Massima altezza h di montagna: il terreno cede se la forza gravitazionale F_N degli $N = h/\text{\AA}$ atomi sopra due atomi nella base è \gtrsim della forza di Coulomb

$$Mg \sim Nm_p g \sim \boxed{F_N \lesssim F_C} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \text{\AA}^2}$$

dove $g \approx G_N M_{\text{pianeta}}/R_{\text{pianeta}}^2 \approx G_N \rho_{\text{pianeta}} R_{\text{pianeta}} \approx G_N m_p R_{\text{pianeta}}/\text{\AA}^3$:

$$hR_{\text{pianeta}} \lesssim \frac{e^2}{G_N m_p^2 \epsilon_0} \text{\AA}^2 \approx 10^{36} \text{\AA}^2 \approx (10^5 \text{ km})^2 \rightarrow (300 \text{ km})^2.$$

Per $R \sim 6000 \text{ km}$ si ha $h \sim 15 \text{ km}$. Pianeti pi\u00f9 grandi di 300 km sono \sim sferici.

Un pianeta a temperatura antropica trattiene l'atmosfera se

$$G_N \frac{M_{\text{pianeta}} m_p}{R_{\text{pianeta}}} \sim \boxed{U_{\text{grav}} \gtrsim k_B T} \sim \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \text{\AA}}$$

Però

Classicamente non esistono configurazioni elettrostatiche stabili:

Il campo di una q nell'origine espanso attorno a $\mathbf{X} = (r, 0, 0) + (x, y, z)$ è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^p} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^{p-1}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} (1-p)x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2) \right]$$

Per il valore fisico $p = 3$ i coefficienti si sommano a zero. Il teorema di Gauss mostrerà che l'impossibilità va oltre il 1o ordine. Sistemi dinamici stabili avranno problemi di irraggiamento e (oltre 2 corpi) di meta-stabilità.

Gli atomi sono tenuti da forze elettriche, ma la loro dimensione (tutti uguali!) è spiegata solo in Meccanica Quantistica dove le cariche sono onde e non punti

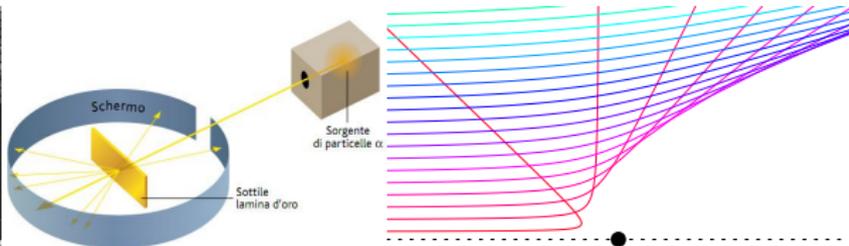
$$\text{Raggio di Bohr} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{m_e c \alpha} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

e $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137.03599915$ è una costante fisica **adimensionale**.

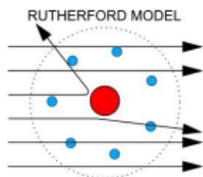
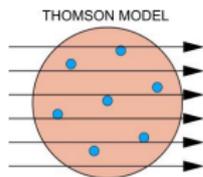
La MQ evita anche di dover escludere q stessa a mano nel calcolare $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$.
Il corso contiene questo passaggio extra-logico, matematicamente sporco.

Nuclei

Sostanze radioattive emettono particelle α (nuclei di elio, $ppnn$) di grande energia. Rutherford scoprì nel 1913 che, urtando su atomi, a volte le α rimbalzano indietro



Capì che questo implica che tutta la massa è concentrata in un nucleo:



$$\tan \frac{\theta_d}{2} = \frac{q_\alpha Q}{8\pi\epsilon_0 b K_\alpha}$$

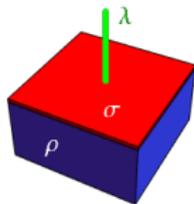
θ_d = angolo di deflessione
 b = parametro di impatto
 K_α = energia cinetica

Il calcolo è analogo alle traiettorie dei pianeti e noioso, Gauss aiuterà a $\theta_d \ll 1$...
Nominato Lord, Rutherford morì di ernia non potendo curarsi da medici plebei.

Limite continuo: campo elettrico

Densità di carica volumetrica ρ , di superficie σ , lineare λ :

$$dq = \rho dV + \sigma dS + \lambda ds.$$



Carica totale (giusto per vedere il limite continuo in un caso semplice):

$$Q = \sum_i q_i \simeq \int dq' = \int dV' \frac{dq'}{dV'} = \int dV' \rho(\mathbf{r}')$$

Campo elettrico di una distribuzione generica di cariche:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Limite continuo: potenziale ed energia

Potenziale elettrico:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}.$$

Energia elettrostatica:

$$U = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \simeq \frac{1}{2} \iint \frac{dq' dq''}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} = \frac{1}{2} \iint \frac{dV' dV'' \rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}.$$

Il caso $i = j$, escluso artificialmente dalla somma discreta, diventa irrilevante per una distribuzione volumetrica ρ : “ $d^3r/r \rightarrow 0$ ”. Integrale orribile.

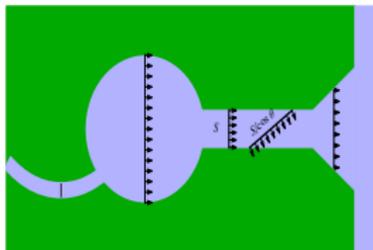
Usando il potenziale, l'energia è scritta in forma più utile

$$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi(r_j)_{\text{altre}} = \boxed{\frac{1}{2} \int dq \varphi} = \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi.$$

In generale $U \propto N^2$ ma $U \propto N$ nella materia neutra (e.g. sale).

Flusso

L'Arno ha un flusso di $110 \text{ m}^3/\text{s}$, il Po di 1500, il Rio delle Amazzoni di 200000. Dice quanta acqua passa. La si calcola in termini del campo vettore velocità del fluido $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Il flusso vale $\Phi_v = Sv$ se S è ortogonale ad una \mathbf{v} costante.



In generale

$$\Phi_v = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{dove } \mathbf{n} \text{ è il versore normale alla superficie } dS.$$

In un fiume stazionario Φ_v non dipende dalla superficie scelta: $dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = dS_{\perp} v$.

Si definisce il flusso di un campo vettoriale $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ attraverso una superficie S

$$\text{Flusso di } \mathbf{E} = \Phi_E \equiv \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$$

Teorema di Gauss

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

Mettiamo una carica Q nell'origine e calcoliamo il flusso di \mathbf{E} attraverso una sfera di raggio r : si ha $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = E_r = |\mathbf{E}|$ e

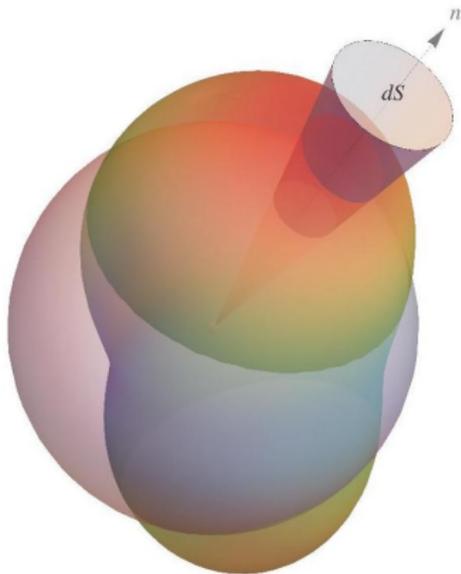
$$\Phi_E = Q \frac{4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

La dipendenza da r si cancella: superficie vs $1/r^2$ nella forza di Coulomb.

Il flusso attraverso una superficie storta vale lo stesso. Se la carica è esterna, il flusso è zero.

Per tante cariche, o per una distribuzione continua, contribuiscono solo quelle interne.

Conseguenza: **nessuna carica è in equilibrio stabile**, non può essere circondata da \mathbf{E} entrante o uscente in quanto $\Phi_{E_{\text{ext}}} = 0$.



Elettrostatica in d dimensioni

| Dimensioni | Analogo a | $E_r(r)$ | $\varphi(r)$ | r^2 |
|------------|--------------|-----------------------------------|---------------------------------|----------------------|
| 1 | Piano in 3d | $\sigma/2\epsilon_0$ | $-\sigma r /2\epsilon_0$ | x^2 |
| 2 | Filo in 3d | $\lambda/2\pi r\epsilon_0$ | $\lambda \ln(r)/2\pi\epsilon_0$ | $x^2 + y^2$ |
| 3 | Carica in 3d | $Q/4\pi r^2\epsilon_0$ | $Q/4\pi\epsilon_0 r$ | $x^2 + y^2 + z^2$ |
| d | | $\propto 1/S_d \propto 1/r^{d-1}$ | $\propto 1/r^{d-2}$ | $\sum_{i=1}^d x_i^2$ |

$d \leq 2$: no cariche libere.

$d \geq 4$: no orbite stabili ($V_{\text{kin}} = L^2/2\mu r^2$).

Raggio classico dell'elettrone

Il limite di carica puntiforme ha energia divergente

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 1/2 & \text{densità } \sigma \text{ costante su superficie sferica} \\ 3/5 & \text{densità } \rho \text{ costante in sfera} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{per convenzione} \end{cases}$$

U contribuisce alla massa dell'elettrone come U/c^2 . Ragionevolmente $m_e c^2 \lesssim U$.
Si definisce 'raggio classico' tale che $m_e c^2 = U$:

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e c^2} = 2.82 \cdot 10^{-15} \text{m.}$$

Ma in natura $U \sim m_e c^2/137$. r_e per caso è circa la dimensione del protone.

Energia di legame nucleare

Un nucleo (notazione: ${}^A_Z\text{nome}$) è circa una sfera carica di raggio $R \sim A^{1/3} 1.3 \cdot 10^{-15}$ m che contiene

- Z protoni p di massa $m_p \approx 0.9382 \text{ GeV}/c^2$,
- $A - Z$ neutroni n di massa $m_n \approx 0.9395 \text{ GeV}/c^2$.

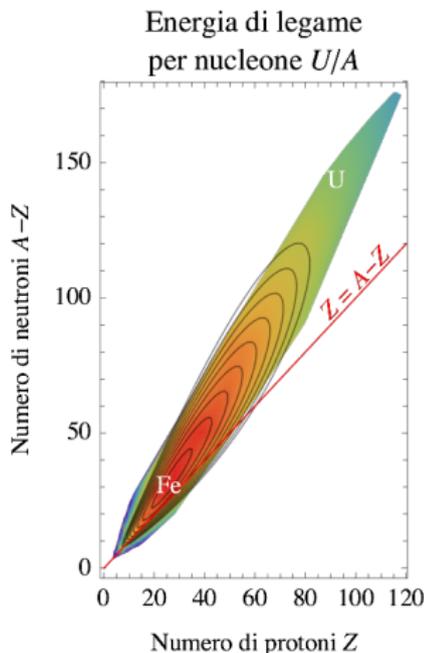
$$U = U_{\text{em}} + U_{\text{strong}},$$

$$U_{\text{em}} \approx + \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 0.0006 \text{ GeV} \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

legame forte a corto raggio corr. di superficie, conta poco

$$U_{\text{strong}} \approx \underbrace{-0.01 \text{ GeV} A}_{\text{legame forte a corto raggio}} + \underbrace{0.01 \text{ GeV} A^{2/3}}_{\text{corr. di superficie, conta poco}} + \underbrace{+0.1 \text{ GeV} \frac{(Z - A/2)^2}{A}}_{\text{accoppiamento } p, n}$$

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{U}{c^2}$$



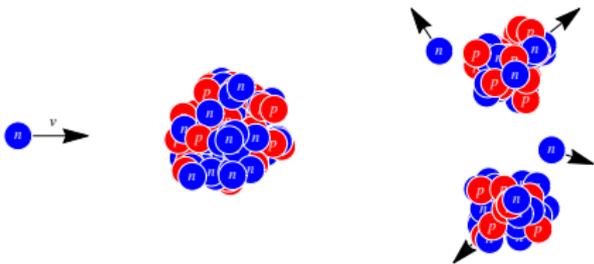
Fissione e fusione nucleare

Lungo la “valle di stabilità” $A \approx 2Z$ si ha $U \approx (-0.02 Z + 0.0005 Z^{5/3}) \text{ GeV}$.

- E_{legame} per nucleone U/A minima a $Z \sim 26$: il ferro ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ è il più stabile.
- Nuclei piccoli producono energia unendosi: ‘fusione’.
- Un nucleo troppo grosso decade: U è minima a $Z \sim 120$.
- Dividendosi a metà libera energia elettromagnetica

$$\Delta U = \Delta U_{\text{em}} \approx \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} (1 - 2^{-2/3}) \sim \frac{Mc^2}{1000}.$$

- Un n lento urtando su ${}^{235}_{92}\text{U}$ stimola la ‘fissione’ che libera ΔU e $\sim 2n$:

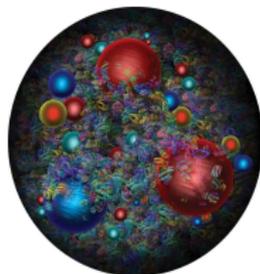


Se $M \gtrsim \text{kg}$ una reazione a catena libera $g c^2 \sim 20 \text{ kton}$, $\text{kton} \equiv 4.2 \cdot 10^{12} \text{ J}$.

Masse di protone e neutrone

Protoni e neutroni sono stati di 3 quark qqq legati da interazioni forti. Esistono $q = u$ (carica $q_u = 2e/3$, massa $m_u \gtrsim m_d$) e $q = d$ ($q_d = -e/3$). Alla massa contribuisce l'energia elettrica

$$m_{p,n} \approx \frac{U_{\text{strong}} + U_{\text{em}}^{p,n}}{c^2} + \sum_q m_q$$



stimata approssimando qqq su triangolo equilatero di lato r :

| particella | quarks | Energia elettrica | $\sum m_q$ |
|---------------|--------|---|--------------|
| p | uud | $\frac{q_u^2 + 2q_u q_d}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$ | $2m_u + m_d$ |
| n | udd | $\frac{q_d^2 + 2q_u q_d}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ | $m_u + 2m_d$ |
| Δ^{++} | uuu | $\frac{3q_u^2}{4\pi\epsilon_0 r} = +\frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ | $3m_u$ |
| Δ^- | ddd | $\frac{3q_d^2}{4\pi\epsilon_0 r} = +\frac{1}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ | $3m_d$ |

dove Δ^{++} e Δ^- sono altre particelle. La particella stabile più leggera è il protone:

$$\underbrace{m_n - m_p}_{1.3 \text{ MeV}/c^2} = \underbrace{m_d - m_u}_{3 \text{ MeV}/c^2} + \underbrace{\mathcal{O}(e^2/4\pi\epsilon_0 r)}_{-1.7 \text{ MeV}/c^2}.$$

Vince 'per caso' e produce la chimica. n diventa stabile dentro i nuclei.

Il gradiente

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

soddisfa alle leggi di 2 mondi: è un **vettore** e un **operatore differenziale**. La fisica è invariante sotto rotazioni $SO(3)$. Simmetria esplicita scrivendo in termini di vettori, rappresentazioni di $SO(3)$. Sotto rotazioni $x_{i'} = \sum_i R_{i'i} x_i$ le componenti di un vettore $\mathbf{V} = \sum_i V_i \hat{x}_i = \sum_{i'} V_{i'} \hat{x}_{i'}$ ruotano come $V_{i'} = \sum_i R_{i'i} V_i$.

Il gradiente è un vettore: dimostrazione algebrica usando $R^{-1} = R^T$

$$\nabla_{i'} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{i'}} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i R_{i'i} \nabla_i \quad x_i = \sum_{i'} (R^{-1})_{ii'} x_{i'} = \sum_{i'} x_{i'} R_{i'i}$$

Dimostrazione geometrica: definendo il vettore spostamento $d\mathbf{x} = \sum_i dx_i \hat{x}_i$, il differenziale di una funzione arbitraria f è uno scalare, dato da

$$df = f(x_i + dx_i) - f(x_i) = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv d\mathbf{x} \cdot \nabla f$$

Quindi ∇f è un vettore: quello che punta nella direzione di massima pendenza.

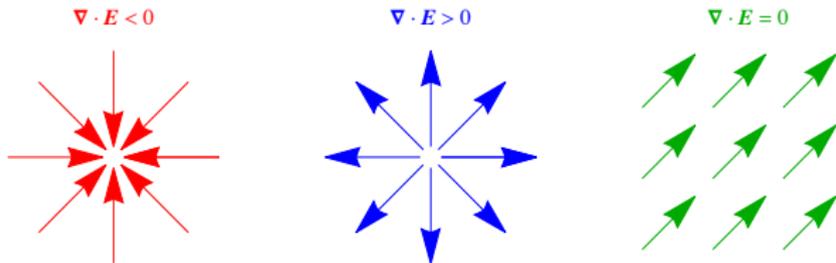
La divergenza

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

è uno scalare. Cioè ruotando $x \rightarrow x'$, $E_x \rightarrow E_{x'}$, etc si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'}$$

Significato geometrico: per un flusso d'acqua (per semplicità 2-dimensionale) dice se ci sono sorgenti: un tubo che preleva acqua è come una carica puntiforme; la pioggia p è come una distribuzione di carica uniforme: $v_x = cte + px$.



Teorema della divergenza

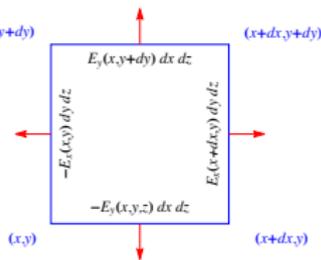
$$\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \int dV \nabla \cdot \mathbf{E}$$

Lo si dimostra decomponendo un volume generico in cubettini infinitesimi e verificando che il teorema si applica separatamente a ciascun cubettino.



Per un cubetto infinitesimo di lati dx dy dz

$$\begin{aligned} \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} &= + \int dy dz [E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)] \\ &+ \int dx dz [E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)] \\ &+ \int dx dy [E_z(x, y, z+dz) - E_z(x, y, z)] \\ &= \int dx dy dz \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \end{aligned}$$



Prima equazione di Maxwell

Combinando il teorema di Gauss con quello della divergenza

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int dV \rho = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \Phi_E = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \stackrel{\text{divg}}{=} \int dV \nabla \cdot \mathbf{E}$$

si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 .$$

Coulomb $F_C \propto 1/r^p$ poteva avere $p \neq 2$. Riscrivendo in termini di campi \mathbf{E} si capisce che per $p = 2$ quella che appare come una qualunque forza non-locale è descritta dalla più semplice equazione **locale**, con 1 derivata.

La divergenza è uno scalare: non poteva che venire $\nabla \cdot \mathbf{E} \propto$ la sua sorgente ρ .

Dice (parzialmente) come una densità di carica ρ genera un campo elettrico \mathbf{E} .

Verifica: Coulomb $\mathbf{E} \propto \mathbf{r}/r^3$ ha divergenza zero per $r \neq 0$ in $d = 3$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r}}{r^4} \cdot \nabla r = \frac{d}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r}}{r^4} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 0.$$

Densità di energia del campo elettrico

$$U = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2 \quad \text{cioè} \quad u = \frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

‘Dimostrazione’: vale per due piastre parallele di superficie S a distanza d con densità superficiale $\pm\sigma$. Dentro $E_{\text{in}} = \sigma/\epsilon_0$ costante, quindi

$$U = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta\varphi = \frac{S\sigma \cdot E_{\text{in}}d}{2} \stackrel{<}{=} \frac{\epsilon_0}{2} V E_{\text{in}}^2$$

Dimostrazione: si integra per parti in 3d, usando

$$U = \frac{1}{2} \int dV \varphi \rho = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \varphi \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV [\nabla \cdot (\varphi \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla \varphi] = \frac{\epsilon_0}{2} \Phi_{\varphi \mathbf{E}} + \int dV u$$

‘Teorema’ se il termine di bordo $\Phi_{\varphi \mathbf{E}}$ vale zero:

- Per distribuzioni di cariche finite, vale zero all’infinito

$$\int dS \varphi \mathbf{E} \sim \int \frac{r^2 d\Omega}{r \times r^2} \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} 0.$$

- Se ci sono cariche puntiformi c’è una divergenza ad $r \rightarrow 0$. È l’energia di una carica su stessa. La matematica suggerisce che averla omessa a mano in $\sum_{i \neq j} q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 r_{ij}$ era brutto. La formula bella $\int dV u$ la include, e diverge. Questa è la fisica giusta, non il limite ideale di cariche puntiformi.

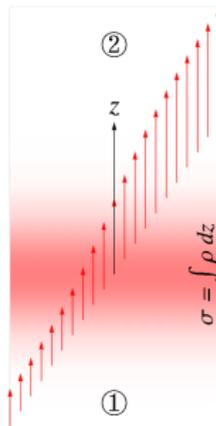
Pressione su cariche superficiali

$$\mathbf{F} \stackrel{?}{=} \sigma S \mathbf{E}. \quad E_{\parallel} \text{ è continuo ma } E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = \sigma/\epsilon_0. \quad \boxed{\mathbf{F} = \sigma S(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)/2}.$$

Motivo intuitivo: per il principio di azione e reazione la forza **deve** essere generata solo dal campo elettrico ‘esterno’

$$(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)/2.$$

Dimostrazione: bisogna abbandonare l’idealizzazione di superficie di spessore zero, e studiare cosa accade dentro un piccolo spessore finito. Chiamando z l’asse \perp alla superficie si ha $\sigma = \int \rho dz$ e la 1a equazione di Maxwell $dE_z/dz = \rho/\epsilon_0$. Integrando in dz si riottiene $E_{z2} - E_{z1} = \sigma/\epsilon_0$ (Gauss su cilindretto ortogonale). La pressione vale:



$$p = \frac{dF_z}{dS} = \int E_z \rho dz = \epsilon_0 \int E_z \frac{dE_z}{dz} dz = \epsilon_0 \frac{E_{z2}^2 - E_{z1}^2}{2} = u_2 - u_1$$

formula vera in contesti più generali e.g. in gas. Concludendo:

$$p = \epsilon_0(E_{\perp 2} - E_{\perp 1}) \frac{E_{\perp 2} + E_{\perp 1}}{2} = \sigma \frac{E_{\perp 2} + E_{\perp 1}}{2}.$$

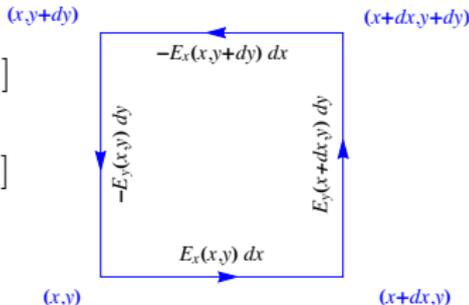
Teorema del rotore

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

dove \oint è fatto in verso antiorario. Dimostrazione: decomponendo una superficie generica in rettangolini e verificando che vale su ognuno.

Per un rettangolo infinitesimo di lati dx dy

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= + \int dx [+E_x(x, y) - E_x(x, y + dy)] \\ &+ \int dy [-E_y(x, y) + E_y(x + dx, y)] \\ &= \int dx dy \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \end{aligned}$$



che coincide con

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = (\nabla \times \mathbf{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x$$

ricordando il prodotto vettore $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$.

3 teoremi al prezzo di 1

1) Teorema della divergenza (volume \rightarrow suo bordo = superficie)

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \oint_{\partial V=S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

2) Teorema del rotore (superficie \rightarrow suo bordo = curva)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S=L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$$

3) Teorema banale (curva \rightarrow suo bordo = punti)

$$\int_L \nabla f \cdot d\mathbf{x} = \Delta f = \oint_{\partial L=P} f$$

Sono casi particolari di un teorema valido per una n -superficie in d dimensioni:

$$\int_X \partial \wedge A^{(n)} \wedge dx^{(n+1)} = \oint_{\partial X} A^{(n)} \wedge dx^{(n)}$$

dove $A^{(n)}$ è una n -forma (tensore anti-simmetrico nei suoi n indici), e \wedge indica anti-simmetrizzazione. In 3d una 2-forma è un vettore $\epsilon_{ijk} dx_j dx_k = dS n_i$.

2a equazione di Maxwell (elettrostatica)

\mathbf{E} ha 3 componenti, la divergenza da sola non dice tutto.

Campi 'rotatori' come $\mathbf{E} = (y, -x, 0)$ hanno divergenza zero. Non sono generati in quanto la forza di Coulomb $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ è radiale, quindi conservativa

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \varphi_A - \varphi_B = 0 \quad \text{se } A = B.$$

Per il teorema del rotore $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$, quindi

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Automaticamente soddisfatta se $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$: $(\nabla \times \nabla\varphi)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = 0$.

Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica

| | bambini | adulti |
|----------|------------------------------------|---------------------------------------|
| Fisica 1 | $x = at^2/2$ | $\ddot{x} = a$ |
| Fisica 2 | $F = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$ | $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ |

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \varphi \end{array} \right.$$

dove $\nabla^2 \varphi \equiv \nabla \cdot \nabla \varphi = \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2$ è il Laplaciano.

Per linearità si ha la soluzione integrale (equivalente a $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Leftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Se fossero dinamiche $\rho(\mathbf{r}, t)$ uno potrebbe trasmettere segnali a velocità infinita.

Verifica, potenziale in d dimensioni: $\nabla^2 \varphi = 0$ per $r \neq 0$ è risolto da $\varphi \propto r^{2-d}$

$$\partial_x r^p = p x r^{p-2}, \quad \partial_x^2 r^p = p r^{p-2} + p(p-2)x^2 r^{p-4}, \quad \nabla^2 r^p = p[d+p-2]r^{p-2}$$

Sistemi di coordinate ortogonali

Raccolta di formule in wikipedia. Per capirle è utile essere più generali. Uno spazio piatto in coordinate curve (o uno spazio curvo) è in generale descritto dalla metrica $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)dx_i dx_j$. Per semplicità coordinate ortogonali

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{dove} \quad d\mathbf{x} = \sum_i g_i dx_i \hat{\mathbf{x}}_i$$

è il vettore spostamento infinitesimo, $\hat{\mathbf{x}}_i$ è il versore lungo la coordinata i e $g_i \equiv \sqrt{g_{ii}}$ (notazione inusuale). In 2d $d\mathbf{x} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$:



| Coordinate 3d | coefficienti metrici | | | $d\mathbf{x}$ |
|----------------------------|----------------------|----------------|--------------------------|---|
| Cartesiane x, y, z | $g_x = 1$ | $g_y = 1$ | $g_z = 1$ | $dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$ |
| Cilindriche r, θ, z | $g_r = 1$ | $g_\theta = r$ | $g_z = 1$ | $dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + dz \hat{\mathbf{z}}$ |
| Sferiche r, θ, ϕ | $g_r = 1$ | $g_\theta = r$ | $g_\phi = r \sin \theta$ | $dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ |

Superficie nel piano 12: $dS_{12} = g_1 g_2 dx_1 dx_2$. Volume: $dV = g_1 g_2 g_3 dx_1 dx_2 dx_3$.

Gradiente in coordinate ortogonali

In un generico sistema di coordinate ortogonali x_i si definisce il gradiente come:

$$df = f(x_i + dx_i) - f(x_i) = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv d\mathbf{x} \cdot \nabla f.$$

Inserendo $d\mathbf{x} = \sum_i g_i dx_i \hat{\mathbf{x}}_i$ si ottiene

$$\nabla = \sum_i \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{g_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_1}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_2}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_3}{g_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Ad esempio, in coordinate cartesiane, sferiche e cilindriche si ha

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

In particolare $E_r = -(\nabla\varphi)_r = -\partial\varphi/\partial r$.

Divergenza in coordinate ortogonali

Calcolando $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$ in coordinate in cui i versori $\hat{\mathbf{x}}_i$ non sono costanti (in coordinate cilindriche e sferiche la loro orientazione varia) occorre tenere conto che ∇ applicata a $\mathbf{E} = \sum_i E_i \hat{\mathbf{x}}_i$ deriva sia le componenti E_i che i versori $\hat{\mathbf{x}}_i$.



Ad esempio, applicando ∇ ad un campo vettoriale radiale $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}} E_r(r)$ in coordinate sferiche (utili appunto quando si ha simmetria sferica) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + E_r \left(\frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1 + 1}{r} E_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r.$$

Questo metodo è sistematico ma porta a passaggi pesanti.

Divergenza in coordinate ortogonali'

Si arriva al risultato finale più rapidamente calcolando in un sistema di coordinate ortogonali $\nabla \cdot \mathbf{E}$ usando la sua espressione nel teorema della divergenza

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Applicato ad un volumetto di lati $d\mathbf{x}_{1,2,3}$, i flussi sui lati lungo x_1 valgono

$$\begin{aligned} (E_1 dS_{23})_+ - (E_1 dS_{23})_- &= (E_1 g_2 g_3)_+ dx_2 dx_3 - (E_1 g_2 g_3)_- dx_2 dx_3 = \\ &= dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1 g_2 g_3) = \frac{dV}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1 g_2 g_3). \end{aligned}$$

Quindi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (E_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (E_2 g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (E_3 g_1 g_2) \right]$$

Verifica: riotteniamo la divergenza di un vettore radiale in coordinate polari:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} E_r r^2 \sin \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r.$$

Rotore

In modo analogo, il teorema di Stokes

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

fornisce un'espressione per il rotore:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \det \begin{pmatrix} g_1 \hat{\mathbf{x}}_1 & g_2 \hat{\mathbf{x}}_2 & g_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ g_1 E_1 & g_2 E_2 & g_3 E_3 \end{pmatrix}$$

Laplaciano

Combinando le formule per la divergenza e per il gradiente si ottiene:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{g_1 g_3}{g_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right]$$

In coordinate cilindriche:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

In coordinate polari:

$$\nabla^2 \varphi = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}_{(r\varphi)''/r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

In d dimensioni $r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$ ed il laplaciano di $\varphi(r)$ vale 0 se $\varphi \propto r^{2-d}$:

$$\nabla^2 \varphi(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Esempi matematici

Potenziale di Yukawa. Per particelle massive l'equazione di Poisson diventa

$$\nabla^2 \varphi - \lambda^2 \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}.$$

Le forze nucleari forti hanno una soppressione esponenziale.

Atomo di idrogeno quantistico. La funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ risolve

$$H\psi = E\psi \quad \text{dove} \quad H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = -i\hbar\nabla.$$

La soluzione ha livelli discreti. Intuitivamente: un elettrone libero ha $\psi \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, ovvero lunghezza d'onda 'di de-Broglie' $\lambda = 2\pi/k = 2\pi\hbar/p$. Onde stazionarie negli atomi sono ottenute per valori speciali dell'energia E tali che le orbite sono multipli interi di λ . La soluzione per lo stato di minima energia è

$$\psi(r) \propto e^{-r/a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e q_e^2}, \quad E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}.$$

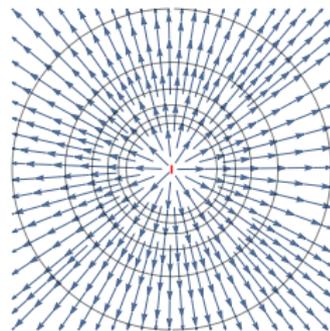
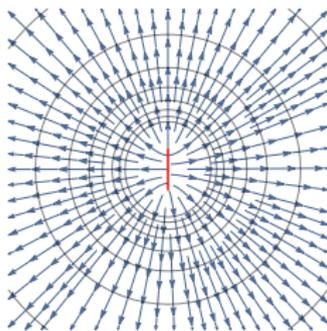
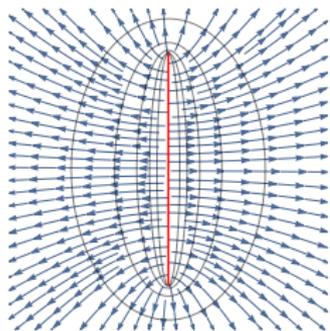


Dipolo

Il dipolo elettrico

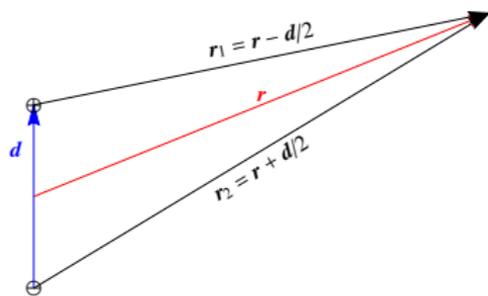
Un sistema di cariche di dimensione spaziale d e carica totale $Q \neq 0$ sembra una carica Q puntiforme quando visto da grande distanza:

$$\mathbf{E} \underset{r \gg d}{\simeq} \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots$$



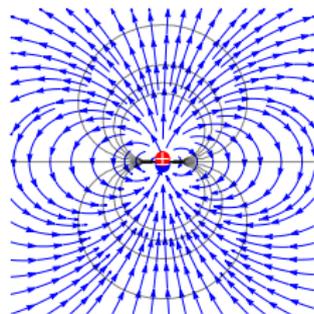
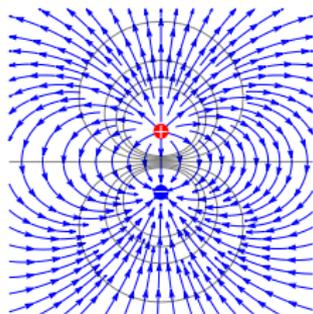
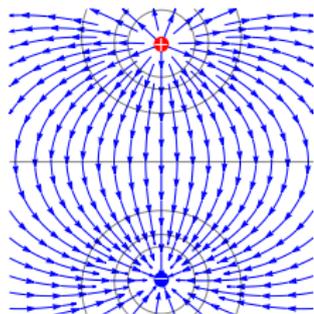
È possibile espandere in serie in potenze di d/r . Il campo della carica totale è detto **monopolo**, il termine successivo **dipolo**. Il dipolo domina quando $Q = 0$. Esempi: una molecola di acqua, una antenna... due cariche $\pm q$ a distanza d .

Potenziale di dipolo



$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \\
 &\stackrel{r \gg d}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

Dipende solo dal **momento di dipolo** $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$.



Campo di dipolo

Usando $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$ e $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ si ottiene

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}}_{E_r} + \underbrace{\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{r^5}}_{E_\theta} \right]$$

avendo usato $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Usando $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos \theta$ il modulo è

$$E = \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \propto \frac{1}{r^3}.$$

In coordinate polari $\varphi = p \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$ e quindi

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = 0.$$

Momento di dipolo

Il momento di monopolo di una generica distribuzione di cariche è la Q totale

$$Q = \sum_i q_i = \int dq = \int dV \rho$$

Il momento di dipolo è

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \int dq \mathbf{r} = \int dV \rho \mathbf{r}$$

Unità di misura: Coulomb · metro.

\mathbf{p} dipende dall'origine se $Q \neq 0$, essendo il 2o termine di una serie di Taylor

$$\varphi(\mathbf{r}) \stackrel{r \gg d}{\simeq} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right]$$

Se $Q = 0$ è dato da una carica totale positiva q con baricentro \mathbf{r}_+ ed una $-q$ con baricentro \mathbf{r}_- , allora $\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$.

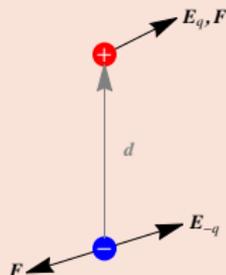
Forza e momento su dipolo in \mathbf{E} esterno

Prendendo un \mathbf{p} come due cariche $\pm q$, al 1o ordine in d si ha

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_{-q}] \simeq q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \equiv -\nabla U$$

dove

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta$$



L'ultimo passaggio vale solo per dipolo \mathbf{p} costante e per \mathbf{E} irrotazionale:

$$0 = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} - \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}).$$

Stesso conto in componenti: prendiamo un dipolo lungo y e calcoliamo la componente x della forza: $F_x = p_y \partial_y E_x = p_y \partial_x E_y$. La formula con U fallisce

- a) in presenza di campi magnetici variabili, perché $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$;
- b) se il dipolo \mathbf{p} dipende da \mathbf{E} , perché ci sono altre energie in gioco.

Il dipolo è una particella vettoriale: può ruotare. Serve il momento delle forze

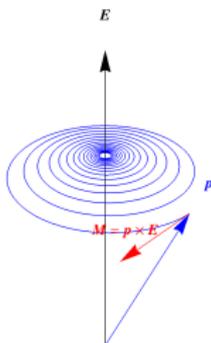
$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_q \times q\mathbf{E} + \mathbf{r}_{-q} \times (-q\mathbf{E}) = q(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{-q}) \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

U fornisce informazioni sul moto traslatorio e rotatorio: $M = pE \sin \theta \stackrel{\simeq}{=} -\frac{\partial U}{\partial \theta}$.

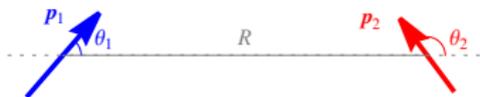
Dipoli: esempi

L'energia U di un dipolo \mathbf{p} è minima quando \mathbf{M} lo allinea ad \mathbf{E} . Urti con l'ambiente forniscono attrito e caos.

Forno a micro-onde: le molecole di H_2O hanno 'grosso' dipolo $p = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m} = 0.39 e \text{ \AA}$. Tendono ad allinearsi ad un \mathbf{E} esterno, ma di poco $pE \ll k_B T \sim eV/40$ per $E \ll 6 \cdot 10^8 \text{ V/m}$ realistici. Fanno moti complicati: rotazioni ($d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$, risolta da \mathbf{L} che gira attorno a $\boldsymbol{\omega}$ con pulsazione ω) smorzate dagli urti. Invertendo \mathbf{E} il processo si ripete, riscaldando l'acqua ma non il ghiaccio.



Mettendo dipoloni in \mathbf{E} si **visualizzano le linee di campo**, come notò Faraday.



Due dipoli liberi di ruotare a distanza fissa R tendono ad allinearsi $\rightarrow\rightarrow$ o $\leftarrow\leftarrow$:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right]$$

$3 \gg 1$. N dipoli hanno $NU \gg k_B T$ e fanno memorie scrivibili (von Neumann).

Espansione in multipoli

Espansione in multipoli rozza

Espandendo

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_q \frac{q_q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}$$

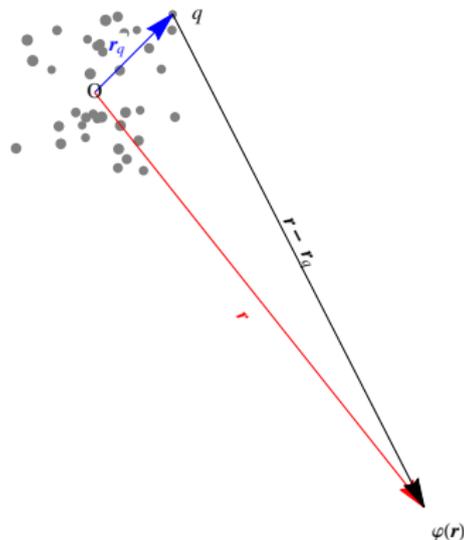
in serie di Taylor per $r_q \ll r$ si ottiene

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{p_i \hat{r}_i}{r^2} + \sum_{i,j} \frac{Q_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j}{2r^3} + \dots \right]$$

dove

- $Q = \sum_q q_q$ è il **monopolo** (mucca sferica).
- $p_i = \sum_q q_q r_{qi}$ con $i = \{x, y, z\}$ è **dipolo**.
- $Q_{ij} = \sum_q q_q (3r_{qi} r_{qj} - r_q^2 \delta_{ij})$ è **quadrupolo** (analogo del tensore di inerzia):
tensore simmetrico a **traccia nulla** (la traccia è monopolo), quindi matrice 2×2 con 5 elementi.

Quanto segue è un formalismo che automaticamente **ripulisce Taylor** anche a ordini più alti. Non lo useremo, è utile vederlo prima della Meccanica Quantistica.



Espansione in multipoli

Espansione generale in coordinate sferiche:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q_{\ell m}}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}}$$

dove

- $q_{\ell m} = \int dV r^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \rho(r, \theta, \phi)$ sono i “momenti di multipolo”.

- $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ sono funzioni speciali dette ‘armoniche sferiche’:

- $\ell = 0$ è il **monopolo**: $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, scalare sotto rotazioni SO(3).

- $\ell = 1$ ($m = \{-1, 0, 1\}$) è il **dipolo**: vettore di SO(3), simmetria SO(2),

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \propto \frac{z}{r}, \quad Y_{11} = -Y_{-10}^* = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \propto \frac{x + iy}{r}.$$

- $\ell = 2$ ($m = \{0, \pm 1, \pm 2\}$) è il **quadrupolo**, tensore di SO(3).

- eccetera: tutte le altre rappresentazioni di SO(3).

(Qui non li useremo. Fatti perché serviranno in Meccanica Quantistica.

Tavola periodica = Coulomb + Meccanica Quantistica + soluzioni con $Y_{\ell m}$).

Espansione in multipoli: derivazione

L'equazione $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ ha la soluzione regolare all'infinito:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

La serie di Taylor di $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ a grandi distanze $r \gg r'$ è

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \gamma)$$

dove P_{ℓ} sono polinomi di Legendre [QED] che dipendono dall'angolo fra \mathbf{r} e \mathbf{r}'

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

e possono essere scritti in termini di armoniche sferiche orto-normali [QED]

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

dando l'espressione esplicita per i coefficienti di multipolo $q_{\ell m}$.

Espansione in multipoli: derivazione

Conviene ripartire dall'equazione $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ per sorgente $\rho \neq 0$ solo localmente. Si risolve $\nabla^2\varphi = 0$ in coordinate polari nella zona dove $\rho = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0.$$

Cerchiamo una soluzione separabile:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi).$$

Sostituendo e moltiplicando per $r^2 \sin^2 \theta / UPQ$ si ottiene:

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0.$$

L'ultimo termine deve essere costante perché è l'unico a dipendere da ϕ

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2 \quad \Rightarrow \quad Q = e^{\pm im\phi}$$

Q deve avere periodicità 2π , quindi m deve essere intero.

Equazione in r

Il resto dell'equazione

$$\sin^2 \theta \left[\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] = m^2$$

si separa introducendo una costante

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = \ell(\ell + 1)$$

scritta $\ell(\ell + 1)$ in maniera da ottenere potenze semplici di r nella soluzione

$$U = Ar^{\ell+1} + Br^{-\ell}.$$

Equazione in θ

L'equazione per $P(\theta)$ è lineare

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0.$$

Riscritta in termini di $c = \cos \theta$, è l'“equazione di Legendre generalizzata”:

$$\frac{d}{dc} \left[(1 - c^2) \frac{dP}{dc} \right] + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - c^2} \right] P = 0.$$

Per $m = 0$ ha soluzioni P_ℓ periodiche in θ solo per ℓ intero positivo :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = c, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3c^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5c^3 - 3c),$$

$$P_\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dc^\ell} (c^2 - 1)^\ell$$

che soddisfano alla condizione di orto-normalità

$$\int_{-1}^1 dc P_{\ell'}(c) P_\ell(c) = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell + 1}$$

Per $m \neq 0$ si dimostra che esistono soluzioni con $-\ell \leq m \leq \ell$ e $\ell > 0$:

$$P_{\ell m} = (-1)^m (1 - c^2)^{m/2} \frac{d^m}{dc^m} P_\ell(c)$$

Armoniche sferiche

Combinando le soluzioni precedenti si definiscono le armoniche sferiche

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell m}(\cos \theta) e^{im\phi} =$$

Y_{00} Y_{11} Y_{22}



Quindi $\ell = 0$ è lo scalare (monopolo), $\ell = 1$ è il vettore a 3 componenti (dipolo), e gli altri sono altre rappresentazioni di SO(3). Soddisfano alla condizione di orto-normalità integrate sulla superficie di una sfera:

$$\int d\Omega Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta.$$

Quindi la più generale soluzione di $\nabla^2 \varphi = 0$ ha la forma

$$\varphi(r, \theta, \phi) \propto \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell + 1} \left(A_{\ell m} r^{\ell} + \frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi).$$

dove $A_{\ell m}$ e $q_{\ell m}$ sono costanti arbitrarie. Ci interessano soluzioni che non esplodono ad $r = \infty$ e quindi $A_{\ell m} = 0$.

Conduttori

Conduttori

Sono materiali che contengono tanti elettroni (circa 1/molecola) ‘quasi’ liberi di muoversi al loro interno, dentro una buca di potenziale $\sim eV$.

Applicando un campo elettrico esterno o caricandoli nasce un \mathbf{E} interno: quindi gli elettroni si muovono, grazie al ‘quasi’ dissipano energia, fino a raggiungere l’unico stato stabile possibile:

$$\mathbf{E} = 0 \text{ nel conduttore e } \mathbf{E}_{\parallel} = 0 \text{ sulla superficie}$$

(il campo elettrico può avere una componente perpendicolare alla superficie).

Gauss o la I eq. di Maxwell implicano che la densità di carica interna vale

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Consente di fare misure precise dell’esponente $1/r^2$ nella forza di Coulomb.

La densità superficiale σ è legata ad $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$. La pressione sulla superficie vale

$$p = \sigma E_{\text{medio}} = \sigma E_{\perp}/2.$$

“Conduttore a terra” \equiv a potenziale $\varphi = 0$.

Regioni di spazio separate da conduttori sono schermate.

Unicità della soluzione

Problema: risolvere l'eq. di Poisson/Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ con condizioni al bordo

- su φ (Dirichlet, ad esempio conduttori a potenziali dati), o
- su $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ (Neumann, ad esempio conduttori isolati a carica data), o
- miste. Ma non entrambe sulla stessa superficie (Cauchy, no soluzione).

Date due soluzioni φ_1 e φ_2 , $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ risolve con condizioni al bordo zero e

$$0 = \varphi\nabla^2\varphi = \varphi\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi) - (\nabla\varphi)^2.$$

Integrando su tutto il volume ed applicando il teorema della divergenza:

$$\int dS \mathbf{n}\cdot(\varphi\nabla\varphi) = \int dV (\nabla\varphi)^2$$

Il lato sinistro è zero, e quello destro ≥ 0 . Quindi $\varphi = 0$ i.e. $\varphi_1 = \varphi_2$.

(Altre equazioni in fisica hanno soluzioni multiple, anche in numero enorme: sistemi di dipoli fissati. Piegatura proteine? Universo?)

Effetto delle punte

Le cariche in un conduttore cercando di allontanarsi il più possibile, generando una forte concentrazione di cariche sulle punte. La sfera piccola schematizza una punta e consente di fare un calcolo esplicito.



Le cariche q e Q sulle due sfere si determinano imponendo che i potenziali sulle superfici delle due sfere siano uguali:

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r}.$$

Quindi il campo elettrico è grosso attorno alla sfera piccola

$$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{q/r^2}{Q/R^2} = \frac{R}{r}.$$

Scariche nei gas

Effetto delle punte: acino d'uva in micro-onde. Sfera al plasma. Che succede?

Nei gas poco densi come l'aria la distanza fra le molecole è $d \sim n^{-1/3} \gg \text{Å}$.
Un elettrone ionizzato ed accelerato da E_{ext} per un tratto d urta un altro atomo e lo ionizza se $E_{\text{ext}}d$ è maggiore del potenziale degli atomi $\varphi_{\text{atomo}} \sim V$:

$$E_{\text{ext}} \gtrsim \frac{\varphi_{\text{atomo}}}{d} \sim E_{\text{atomo}} \times \frac{\text{Å}}{d} \sim 10^8 \frac{\text{V}}{\text{m}} \times 10^{-2} \sim \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

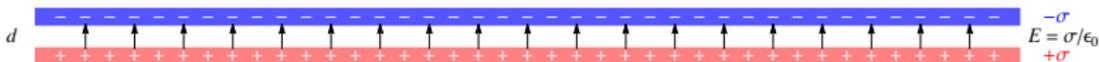
per aria asciutta. Reazione a catena rende l'aria conduttrice: parte scarica.

Mettendo punte su di parafulmini si facilita ad una nuvola carica elettricamente di scaricarsi sul parafulmine. Una volta si aggiungeva radioattività. Similmente campanili in posti elevati sono più esposti (la Terra ha $E \sim 100 \text{ V/m}$):



Capacità

Capacità o condensatore = due conduttori vicini con cariche $+Q$ e $-Q$ a differenza di potenziale V , per immagazzinarle senza disturbare con campi elettrici.



L'archetipo sono due piatti paralleli di superficie S a distanza d (con $S \gg d^2$ per trascurare effetti ai bordi). Quindi $\sigma = Q/S$ e $E = \sigma/\epsilon_0$, $V = d \cdot E = Q \cdot d/S\epsilon_0$.

Quindi $Q = CV$ definisce la **capacità** C , misurata in Coulomb/Volt = Farad.

Per il condensatore piano $C = \epsilon_0 S/d$. Per $S/d \approx \text{m}$ si ha $C \approx 0.8 \cdot 10^{-11}$ F: μF , nF o pF sono unità più pratiche. Altre geometrie:

- $C = \epsilon_0 S/d$ per due piatti piani.
- $C = 2\pi\epsilon_0 h / \ln(r_2/r_1)$ per un condensatore cilindrico.
- $C = 4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$ per un condensatore sferico.
- Nel limite $r_2 \rightarrow \infty$ si ottiene una sfera isolata: $C = 4\pi\epsilon_0 r$.

In tutti i casi $C \sim \epsilon_0 \times$ (dimensione dell'oggetto).

Energia

Energia immagazzinata in una capacità: siccome $U = \frac{1}{2} \int dq \varphi$ e $V \equiv \varphi_+ - \varphi_-$

$$U = \frac{1}{2} QV \stackrel{\text{memo}}{=} \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$

Il fattore $1/2$ può essere ri-derivato in maniera intuitiva: aggiungere dQ costa lavoro $d\mathcal{L} = V dQ = Q dQ/C$. Quindi per accumulare carica da 0 a Q serve $\mathcal{L} = \int_0^Q d\mathcal{L} = Q^2/2C$.

Esempio: un flash usa $U \sim 1 - 1000$ Joule. Quindi serve $C \sim 100 \mu\text{F}$ caricata a $V \sim 250$ V: $U = CV^2/2 \approx 3$ J.

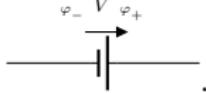
Per più conduttori con cariche Q_i a potenziali V_i la linearità delle eq. di Maxwell implica $V_i = \sum_j P_{ij} Q_j$ quindi $Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$ con $P = C^{-1}$. L'energia vale

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} V_i V_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} P_{ij} Q_i Q_j.$$

$C_{ij} = C_{ji}$: si dimostra calcolando U mettendo prima V_1 ($U_1 = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2$) e poi V_2 (extra $\Delta U = \frac{1}{2} C_{22} V_2^2 + \Delta Q_1 V_1$ con $\Delta Q_1 = C_{12} V_2$), e il viceversa.

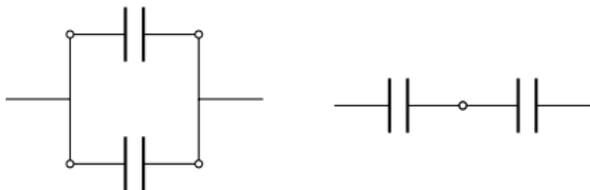
Circuiti

Sono sistemi semplici calcolabili approssimando le eq. di Maxwell con $+ - \times \div$.

Batteria: differenza di potenziale $V = \varphi_+ - \varphi_-$ disegnata come .
La **capacità** è disegnata come $-||-$. Due capacità si combinano come:

- Capacità in parallelo: $C = \sum C_i$ in quanto $Q_i = C_i V$ e $Q = \sum Q_i$.

Infatti per piatti piani $C_{1+2} = \epsilon_0(S_1 + S_2)/d$.



- Capacità in serie: $1/C = \sum 1/C_i$ in quanto $V_i = Q/C_i$ e $V = \sum V_i$.

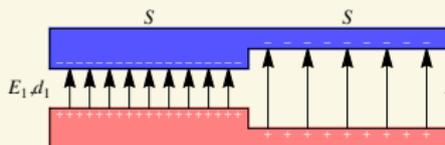
Infatti per piatti piani $C = \epsilon_0 S / (d_1 + d_2)$.

Esempio:

$$E_1 d_1 = E_2 d_2 = V,$$

$$C = Q/V = S(\sigma_1 + \sigma_2)/V$$

$$= \epsilon_0 S(E_1 + E_2)/V$$



Oppure:

$$C = C_1 + C_2 =$$

$$= \epsilon_0 S(1/d_1 + 1/d_2)$$

Forze su condensatori

Esempio: i piatti di un condensatore piano a distanza s risentono di una forza che tende a ridurre s in quanto cariche opposte si attirano:

$$F = -pS = -\frac{E\sigma}{2}S = -\frac{\epsilon_0}{2}E^2S = -\frac{\epsilon_0}{2}\frac{V^2}{s^2}S.$$

Formula generica per la forza F (Q costante o V costante con batteria):

$$F = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{ds}$$

Segno: F cerca di diminuire U , cioè aumentare C . Verifica su condensatore piano: $C = \epsilon_0 S/s$, quindi $F = -SV^2\epsilon_0/2s^2$, attrattiva. Altri casi non ovvi.

Si dimostra usando la conservazione dell'energia meccanica più elettrostatica variando la geometria (ad es. la distanza s fra i piatti). Visto che F è la stessa, consideriamo un condensatore su cui non agisce alcuna batteria: la carica Q è costante e la differenza di potenziale $V(s)$ dipende dalla geometria. Quindi

$$F = -\frac{dU}{ds} = -\frac{d}{ds} \frac{Q^2}{2C(s)} = -\frac{Q^2}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{C} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{ds} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{ds}$$

Dielettrici

Alcuni = sono + = di altri =

Finora equazioni esatte. Ora trattazione approssimata di effetti di materia. Si misura che F_C nella materia è come nel vuoto ma con $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon \equiv \epsilon_r \epsilon_0$. E.g. $\epsilon_r \sim 80$ per l'acqua: la capacità di un condensatore riempito di acqua aumenta. Questo fenomeno è dovuto al modo in cui la materia, neutra ma composta di elettroni e protoni carichi, reagisce ad un campo elettrico esterno \mathbf{E}_{ext} : ogni molecola diventa un dipolo elettrico \mathbf{p} , le molecole polarizzate generano un \mathbf{E}_{pol} che si oppone a \mathbf{E}_{ext} dando $\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{pol}} < \mathbf{E}_{\text{ext}}$ i.e. come se $\epsilon > \epsilon_0$.

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} \Rightarrow \mathbf{p} \Rightarrow \delta \mathbf{E} \Rightarrow \delta \mathbf{p} \Rightarrow \delta \delta \mathbf{E} \Rightarrow \delta \delta \mathbf{p} \Rightarrow \delta \delta \delta \mathbf{E} \dots$$

Il dipolo elettrico di una molecola è approssimabile come proporzionale a \mathbf{E}_{tot}

$$\mathbf{p} \approx \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{tot}}$$

α è detta **costante di polarizzabilità**. Se n è la densità dei dipoli, troveremo

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + n\alpha)$$

Dielettrico con geometria semplice

Piatti piani con densità n di dipoli. Dividiamo le cariche in $\text{tot} = \text{free} + \text{pol}$.



File di dipoli producono una densità superficiale di carica ‘di polarizzazione’

$$\sigma_{\text{pol}} = \mp np \quad \text{opposta a } \sigma_{\text{free}}. \quad \text{Dimostrazioni:}$$

- 1) $\pm\sigma_{\text{pol}}$ produce dipolo totale $P_{\text{tot}} = S\sigma_{\text{pol}}D$, uguale a $P_{\text{tot}} = Np = Vnp$.
- 2) Separando + da -: volumi con $\rho = \pm en$ a distanza d danno $\sigma_{\text{pol}} = \rho d$.

$$E_{\text{tot}} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{free}} + \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} \equiv \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon}$$

da cui

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 \frac{\sigma_{\text{free}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \epsilon_0 \frac{\sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{pol}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\sigma_{\text{tot}}} \right) = \epsilon_0(1 + n\alpha)$$

avendo usato $\sigma_{\text{tot}} = \epsilon_0 E_{\text{tot}}$ e $\sigma_{\text{pol}} = -np = -n\alpha\epsilon_0 E_{\text{tot}}$.

Materiali non polari

Nei materiali non polari (costituiti di molecole prive di dipolo proprio, come l'idrogeno), p nasce perché ciascuna molecola viene stiracchiata da \mathbf{E} .

Stima della polarizzabilità: $\alpha \approx a^3$ dove a è la dimensione della molecola.
Segue per motivi dimensionali $p \sim \epsilon_0 a^3 E_{\text{ext}}$, ma vediamo in dettaglio:

- Atomo di Thomson. $\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + e\mathbf{r}/4\pi\epsilon_0 a_0^3 \Rightarrow \mathbf{p} = e\mathbf{r} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}_{\text{ext}}$.
- Atomo di Rutherford: per orbite circolari nel piano xy con E_{ext} lungo z

$$F_z = -e \left(E_{\text{ext}} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{a^3} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -ez = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{\text{ext}}.$$

Quindi la correzione ad ϵ_0 è di ordine uno nei liquidi e nei solidi dove $n \sim 1/a^3$.
Un gas a temperatura/pressione ambiente ha $n \sim 10^{-(2-3)}/a^3$: $\epsilon_{\text{gas}} \sim 1.003\epsilon_0$.

Materiali polari

Alcune molecole come l'acqua hanno un dipolo proprio $p_0 \sim ea$ permanente.

- L'energia $U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$ cerca di allineare \mathbf{p} ad \mathbf{E}_{ext} .

- L'agitazione termica ha energia $k_B T$ per dof e orienta i dipoli a caso.

La cte di Boltzmann $k_B = 1.4 \cdot 10^{-23}$ J/K converte [energia] \leftrightarrow [temperatura].

Meccanica statistica: la frazione di dipoli allineati è $\sim U/k_B T$. Quindi

$$p \sim p_0 \frac{p_0 E_{\text{ext}}}{k_B T} \quad \text{cioè} \quad \alpha \sim \frac{e^2 a^2}{k_B T \epsilon_0}.$$

A temperatura ambiente 'antropica' $k_B T \sim E_B \sim e^2 / \epsilon_0 a$ si ha nuovamente

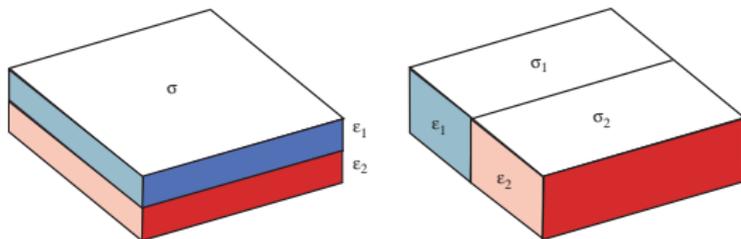
$$\alpha \sim a^3.$$

Capacità in un dielettrico

Ha interesse definire $C \equiv Q/V$ con $Q = Q_{\text{free}}$. Per una capacità piana $C = \epsilon S/d$.
 C aumenta in un dielettrico perché E diminuisce. $U = CV^2/2 = \int dV \epsilon E^2/2$.

Nel limite $\epsilon \rightarrow \infty$ un dielettrico ha $E \rightarrow 0$: si comporta come un conduttore.

Avendo due dielettrici, a volte si può ragionare come capacità in serie e parallelo



In generale occorre il trattamento generale...

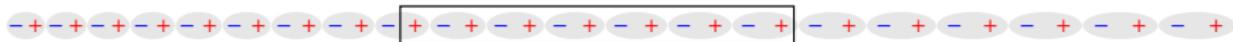
Dielettrici: trattamento generale

Consideriamo un dielettrico contenente dipoli $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ con densità in numero $n(\mathbf{x})$. Definiamo il campo vettoriale **densità di polarizzazione** $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \equiv n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x})$.

- Sulla superficie di un dielettrico c'è $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$.
- Nel volume c'è una carica di polarizzazione $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$.

Considerando un volume immaginario, la carica dentro è opposta a quella che ha attraversato la superficie, essendo solo cariche $-+$ che si spostano:

$$\int dV \rho_{\text{pol}} = - \int dS \sigma_{\text{pol}} = - \int dS \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = - \int dV \nabla \cdot \mathbf{P}.$$



Ad esempio per cubetto $dV = dx dy dz$, considerando solo facce $dS = dy dz$:

$$\rho_{\text{pol}} = \frac{dq_{\text{pol}}}{dV} = - \frac{(\sigma_{\text{destra}} + \sigma_{\text{sinistra}})dS}{dV} = - \frac{P_x(x+dx) - P_x(x)}{dx} = - \frac{\partial P_x}{\partial x}$$

In seguito si avrà la corrente $\mathbf{J}_{\text{pol}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ se \mathbf{P} dipende dal tempo.

Dielettrici: equazioni generali

Inserendo $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ nella 1a equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{free}})/\epsilon_0$

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right] = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}$$

Usando l'approssimazione $\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}$ si ha $\mathbf{P} \equiv n\mathbf{p} = \chi\epsilon_0\mathbf{E}$ dove $\chi = n\alpha$ è la 'suscettività elettrica', adimensionale e di ordine uno per solidi e liquidi. Quindi

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}(1 + \chi)] = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}.$$

Usualmente viene scritta come

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}} \quad \text{definendo} \quad \mathbf{D} \equiv \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \equiv \epsilon\mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$$

Per un unico dielettrico uniforme ϵ non dipende da \mathbf{x} , e si riduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{free}}/\epsilon \quad \text{se } \epsilon \text{ è costante.}$$

Cioè: un solo dielettrico è come se $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$. Per $\epsilon \rightarrow \infty$ è come un conduttore.

Dielettrici uniformi

In molti casi pratici ϵ è costante entro ciascun materiale: si risolve in ciascun materiale imponendo condizioni di raccordo sui bordi fra diversi dielettrici

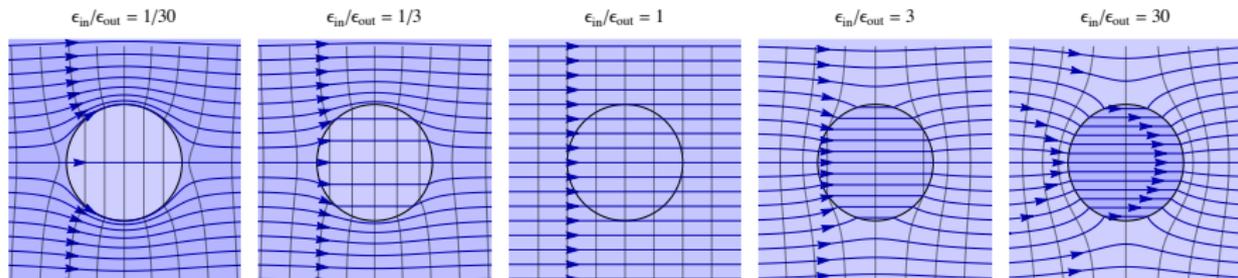
$$\Delta E_{\parallel} = 0, \quad \Delta D_{\perp} = \sigma_{\text{free}}$$

La prima condizione segue da $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, la seconda da $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$.

Dielettrico lungo e sottile: domina $\Delta E_{\parallel} = 0$, quindi $E_{\text{in}} = E_{\text{ext}}$.

Dielettrico corto e largo: domina, $\Delta D_{\perp} = 0$, quindi $\epsilon_{\text{in}} E_{\text{in}} = \epsilon_{\text{out}} E_{\text{out}}$.

Dielettrico sferico: risolto da $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{ext}} / (1 + \chi/3)$ cioè $\sigma_{\text{pol}} = P \cos \theta$



Carica davanti a piano dielettrico: risolvibile con 2 cariche immaginarie.

Energia di un dielettrico

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

Le cariche sono divise in $\rho = \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{pol}}$. Rimane vero che $u_{\text{free}} + u_{\text{pol}} = \epsilon_0 E^2 / 2$.
Ma ora $u = u_{\text{free}} + u_{\text{pol}} + u_{\text{spring}}$ dove $u_{\text{spring}} = -u_{\text{pol}}$ è l'energia necessaria per polarizzare i dipoli (che a sua volta è microscopicamente di tipo elettrico).
Quindi, l'energia di un dielettrico lineare finito vale

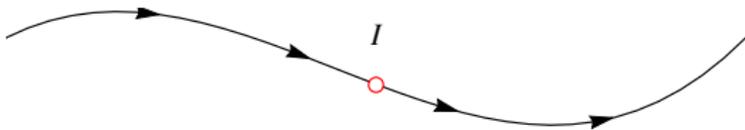
$$U = U_{\text{free}} = \frac{1}{2} \int \rho_{\text{free}} \varphi dV = \frac{1}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) \varphi dV \rightarrow \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot (-\nabla \varphi) dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV.$$

Correnti e conduzione

Corrente

Passiamo dall'elettrostatica a studiare cariche in moto. $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ implica **trasmissione istantanea di segnali**: spostato q e \mathbf{E} varia istantaneamente ovunque. Iniziamo a capire il moto 'lento', questioni concettuali si chiariranno dopo.

La **corrente elettrica** è $I \equiv dQ/dt$ dove dQ è la carica che passa (direzione non specificata) per un dato punto. Come contare il passaggio di frontalieri. Per ora I potrebbe dipendere dal punto. Si misura in Coulomb/sec \equiv Ampere.



La **densità di corrente** $\mathbf{J}(x)$ è definita analogamente alla corrente di un fiume

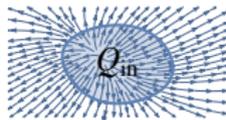
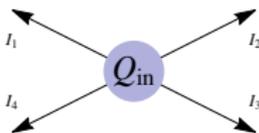
$$I = \Phi_J = \int dS \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$$

Per ora segno arbitrario. Per convenzione la direzione di I, \mathbf{J} è la direzione del moto di cariche positive, quindi opposta alla direzione del moto degli elettroni.

Conservazione della carica

Osservata in fisica della materia a basse energie dove ogni particella ha la sua carica ed il numero di particelle si conserva. Osservata anche ad alte energie in cui le particelle cambiano, ma conservando la carica (ad esempio $n \rightarrow p e \bar{\nu}$, $e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$). L'elettrone è stabile perché è la particella carica più leggera.

In un circuito 'conservazione della carica' significa $\dot{Q}_{\text{in}} = -\sum I_i$, con $Q \neq 0$ solo in un condensatore, oggetto su cui si accumulano le cariche.



In un volume generico significa $\dot{Q}_{\text{in}} = -\Phi_J$ (superficie chiusa ha segno standard: normale uscente, $\Phi_J > 0$ se la carica esce). Il teorema della divergenza implica la conservazione della carica in forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

(Equazione relativistica). Si possono avere correnti anche se $\dot{\rho} = 0$: ad esempio una J costante, tipo fiume. Anche se $\rho = 0$: e.g. circuito senza capacità.

Legge di Ohm e resistenza

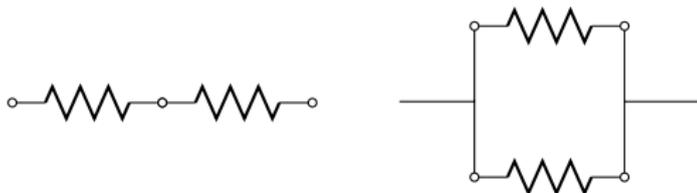
Ohm nel 1826 osservò la seguente legge approssimata di fisica dei materiali:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{R}, \quad R = \rho \frac{L}{S}$$

ρ (**resistività**) e $\sigma = 1/\rho$ (**conducibilità**) dipendono dal materiale e da T .
La **resistenza** ha dimensioni $[R] = V/A \equiv \Omega = \text{Ohm}$, quindi $[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$.

Si combinano analogamente a tubi e perdite di calore:

- Resistenze in serie: $V_1 = R_1 I$ e $V_2 = R_2 I$. Quindi $V_1 + V_2 = (R_1 + R_2) I$.



- Resistenze in parallelo: $V = R_1 I_1 = R_2 I_2 \equiv R(I_1 + I_2) = R(1/R_1 + 1/R_2)V$
da cui $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

Correnti nei materiali

A differenza della polarizzabilità α , ρ varia moltissimo in diversi materiali:

$$\rho = \begin{cases} 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} & \text{per il rame (un tipico conduttore)} \\ 10^{10-14} \Omega \cdot \text{m} & \text{per il vetro (un tipico isolante)} \\ 10^3 \Omega \cdot \text{m} & \text{per il silicio (un tipico semi-conduttore)} \\ 10^2 \Omega \cdot \text{m} & \text{per il 'terreno'}. \end{cases}$$

Come mai? Da dove viene la legge di Ohm? Esprimiamo in termini di particelle. In molti materiali la conduzione è dominata da elettroni di carica q_e , densità n_e , numero N_e , velocità v_e . In un filo passa $\Delta Q = N_e q_e$ in $\Delta t = L/v_e$, quindi

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N_e q_e v_e}{L} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{I}{S} = n_e q_e v_e$$

In gas e liquidi conducono anche ioni: sommando su tutti i tipi di particelle

$$I = \sum_i \frac{N_i q_i v_i}{L}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_i n_i(\mathbf{x}) q_i \mathbf{v}_i(\mathbf{x})$$

Velocità caotica vs velocità di deriva

Esempio: $N \sim 6 \cdot 10^{23}$ elettroni in un filo di lunghezza $L \sim 10$ m a velocità $v_e \sim 10^{-4}$ m/s producono una grossa corrente $I = -Nev/L \sim$ Ampere.

Lento! Perché una lampadina si accende istantaneamente?

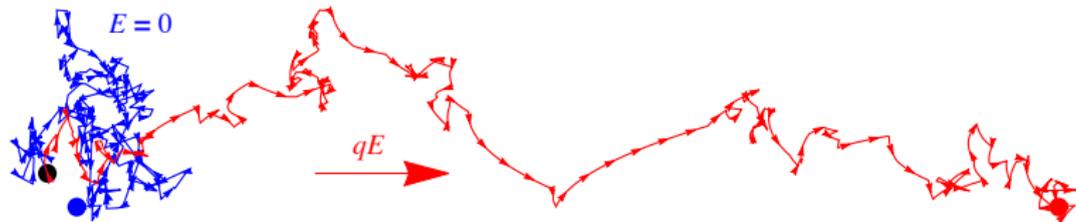
Come aprire un rubinetto: anche qui le particelle si muovono lentamente, ma un'onda di pressione che si propaga alla velocità del suono le fa partire in blocco.

In entrambi i casi la velocità delle particelle è data $k_B T \sim m_e v^2/2$. Inserendo $T \approx 300$ K = eV/40 si trova $v_e \approx 10^5$ m/s ($k_B = 1.4 \cdot 10^{-23}$ J/K, $m_e \sim 10^{-30}$ kg) i.e. $v_e/c \sim 10^{-3 \div 4}$. A temperatura ambiente $k_B T \sim E_B$ è la stessa v_e degli elettroni negli atomi.

Quindi le particelle vanno veloci, ma in media non vanno da nessuna parte: $J_{\text{elettrica}} = J_{\text{acqua}} = 0$. La corrente nasce quando gli elettroni hanno una piccola velocità media, chiamata **velocità di deriva**.

Derivazione della legge di Ohm

Un E esterno accelera le cariche $a = qE/m$. In che modo $F = ma$ diventa $v \propto F$?
Assumendo che urtino in media ogni τ , e che dopo ogni urto ripartano con velocità termica random a media zero, la velocità di deriva vale $v_{\text{deriva}} = qE\tau/m$.



Per elettroni liberi con densità n_e , usando $J = n_e e v_e \equiv E/\rho$ la resistività vale:

$$\rho = m_e / e^2 n_e \tau$$

Assumendo distanza fra gli atomi $d \sim \text{\AA}$ si ha $\tau \sim d/v_{\text{termica}} \sim 10^{-14 \div 15} \text{ sec} \propto 1/\sqrt{T}$ che non dipende da E in quanto $v_{\text{deriva}} \ll v_{\text{termica}}$.

Conferme sperimentali: (Se $eEd > eV$, cioè $E \gtrsim 10^{10} \text{ V/m}$ gli e acquistano così tanta energia da ionizzare gli atomi. Nelle sostanze rarefatte come i gas dove $d \sim 100 \text{\AA}$ basta un E minore, e.g. $E < 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ nell'aria). (Moto Browniano).

Quindi, come mai ρ varia tanto?

Il colpevole è la densità di elettroni liberi $n \propto e^{-E_B/k_B T}$, che dipende dal rapporto tra l'energia termica $k_B T$ e l'energia di ionizzazione $E_B \sim eQ/4\pi\epsilon_0 a$.

- **Conduttori.** Se $E_B \ll k_B T$ c'è circa un elettrone libero per atomo: $n \sim 1/(10^{-10} \text{ m})^3$. Quindi $\rho \sim 10^{-8} \text{ Ohm} \cdot \text{m}$: il valore tipico di un metallo.
- **Isolanti.** Se $E_B \gg k_B T$ quasi tutti gli elettroni sono legati: n è soppresso da $e^{-E_B/k_B T} \sim 10^{-20}$.
- **Semiconduttori.** Caso intermedio. Alcuni e più debolmente legati possono avere $E_B \sim \text{few} \times k_B T$.
- **(Superconduttori.** A basso T effetti quantistici danno un modo collettivo degli elettroni, tale che la resistenza è zero. Al momento non sono noti superconduttori a temperatura ambiente).

Effetto Joule

In un elemento generico di un circuito a differenza di potenziale V :

$$dU = dQ V \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = \boxed{W = IV}$$

Su di una resistenza $V = IR$:

$$W = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

L'energia si conserva, e quella elettrica diventa calore (il moto collettivo di cariche che urtano diventa moto caotico): stufe, ferri da stiro, forni, etc. funzionano in base all'effetto Joule, che dà il nome all'unità di energia.

Incontrando resistenze $R_{1,2}$ in parallelo, una I si ripartisce in $I_1 + I_2$ minimizzando la potenza dissipata totale $W = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$:

$$\frac{dW}{dI_1} = 2R_1 I_1 + 2R_2 (I_1 - I) = 0 \quad \text{risolta da} \quad R_1 I_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_{\parallel} I.$$

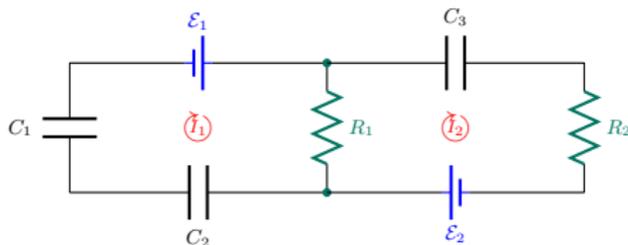
Microscopicamente, il riscaldamento è prodotto da urti fra particelle, che degradano energia in calore. Applicando $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ a particelle con densità n

$$W = \int dV n \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \int dV n q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad \boxed{\frac{dW}{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}}$$

vera anche se $\mathbf{J} \neq \sigma \mathbf{E}$, più generale dei conduttori.

Circuiti: leggi di Kirchhoff

Alcuni circuiti risolvibili come serie e paralleli. Altrimenti equazioni generali.



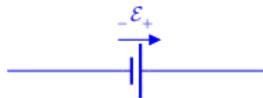
Nodi •: $\sum_A I_{A \rightarrow B} = 0$. Soluzione geometrica: una I_i per ogni 'maglia'.

Fili: conduttori a $\varphi = \text{cte}$. Su ogni maglia $0 = \sum V_{AB}$ dove $V_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$.

Resistenza: $V_{AB} = RI_{A \rightarrow B}$ dove la corrente fluisce da A a B .

Capacità: accumuli di carica. $V_{AB} = Q/C$ con $\dot{Q} = I_{A \rightarrow B}$.

Batteria: $\mathcal{E} = \varphi_+ - \varphi_-$, una linea corta indica il polo a potenziale minore:

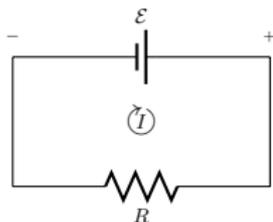


Come funziona una batteria:

- Meccanica: forza sposta cariche su isolante. E.g. cinghia Van de Graaf.
- Chimica: ioni migrano dove la concentrazione è minore per dare reazione.
- Fotoelettrica: luce fornisce energia ionizzando e .
- Magnetica: $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$.

Circuiti: esempi

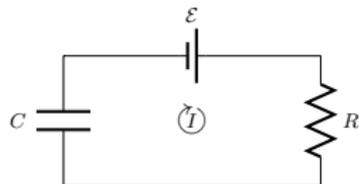
Circuito R : gli elettroni, di carica negativa, vanno al polo positivo ($\mathbf{F} = e\mathbf{E} = |e|\nabla\varphi$) e quindi la corrente va verso il polo negativo, girando nel circuito.



$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E} = RI.$$

Una batteria ha sempre una R interna.

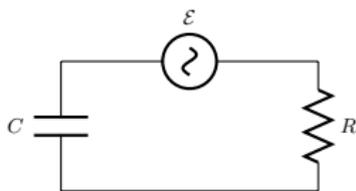
Circuito RC : $\mathcal{E} = RI + Q/C$. Definendo $\tau = RC$ le soluzioni rilevanti sono



$$Q(t) = \begin{cases} C\mathcal{E}[1 - e^{-t/\tau}] & \text{carica da } Q(0) = 0 \\ C\mathcal{E}e^{-t/\tau} & \text{scarica con } \mathcal{E} = 0 \end{cases}.$$

Correnti alternate: potenza dissipata

Esempio: circuito RC .



La differenza di potenziale ai capi di C (R) taglia frequenze alte (basse):

$$\frac{V_C}{\mathcal{E}} = \left| \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \right| = \left| \frac{1}{1 + i\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

$$\frac{V_R}{\mathcal{E}} = \left| \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} \right| = \left| \frac{1}{1 + 1/i\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega RC)^2}}.$$

Vale $\hat{V} = Z\hat{I}$ ai capi di una impedenza Z a regime. Potenza dissipata $W = VI$.

Il prodotto non è una operazione lineare: $W = \text{Re}(\hat{V})\text{Re}(\hat{I}) \neq \text{Re}(\hat{V}\hat{I})$.

Bisogna tornare ai numeri reali: scrivendo $Z = R + iY$ e $\hat{I} = I_0 e^{i\omega t}$

$$W = \underbrace{(I_0 R \cos \omega t - I_0 Y \sin \omega t)}_{\text{Re}\hat{V} = \text{Re}Z\hat{I}} \cdot \underbrace{(I_0 \cos \omega t)}_{\text{Re}\hat{I}}.$$

Facendone la (media temporale) **solo la parte resistiva dissipa energia:**

$$\langle W \rangle = I_0^2 \langle R \cos^2 \omega t - Y \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \frac{R}{2} I_0^2.$$

Costante dielettrica complessa: esempi

Piatto piano sottile con costante dielettrica ϵ in campo esterno E_{ext} :



$$\Delta D_{\perp} = \epsilon_0 E_{\text{ext}} - \epsilon E_{\text{in}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{in}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_{\text{ext}}.$$

Piatto piano sottile con ϵ e resistività ρ in campo esterno $E_{\text{ext}}(t)$:

$$\begin{cases} \epsilon_0 E_{\text{ext}} - \epsilon E_{\text{in}} = \sigma \\ \dot{\sigma} = J = E_{\text{in}}/\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma + \tau \dot{\sigma} = \epsilon_0 E_{\text{ext}}, \\ E_{\text{in}} + \tau \dot{E}_{\text{in}} = \epsilon_0 \rho \dot{E}_{\text{ext}} \end{cases} \quad \tau = \epsilon \rho.$$

Come RC. Se $E_{\text{ext}} = \Re \hat{E}_{\text{ext}} e^{i\omega t}$ a regime $\sigma = \Re \hat{\sigma} e^{i\omega t}$, $E_{\text{in}} = \Re \hat{E}_{\text{in}} e^{i\omega t}$

$$E_{\text{in}} = \Re \frac{\epsilon_0}{\hat{\epsilon}} E_{\text{ext}} = \frac{\epsilon_0 \hat{E}_{\text{ext}}}{\epsilon \sqrt{1 + 1/(\tau\omega)^2}} \cos(\omega t + \delta) \quad \delta = \text{arccot } \omega\tau$$

il conduttore diventa come se la costante dielettrica fosse complessa:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon + 1/i\omega\rho$$

(Similmente calcolabile campo ruotante, descritto da $\hat{\mathbf{E}}_{\text{ext}} = \hat{E}_{\text{ext}}(1, i, 0)/\sqrt{2}$)

Costante dielettrica complessa

In un dielettrico con cariche fisse e di conduzione $\rho_{\text{free}} = \rho_{\text{fix}} + \rho_{\text{cond}}$:

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_{\text{fix}} + \rho_{\text{cond}}.$$

Conservazione della carica: $\dot{\rho}_{\text{cond}} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$. A regime $\dot{\rho}_{\text{cond}} = i\omega\rho_{\text{cond}}$. Quindi

$$\nabla \cdot \left(\epsilon \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{i\omega} \right) = \rho_{\text{fix}}.$$

In un conduttore $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$, quindi

$$\nabla \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = \rho_{\text{fix}}, \quad \hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{i\omega\rho} = \epsilon \left(1 + \frac{1}{i\omega\tau} \right) \quad \tau = \epsilon\rho.$$

Conduttore dielettrico a regime: come se fosse costante dielettrica complessa.

Riassunto finora

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \varphi \end{array} \right.$$

Implica $dU/dV = \frac{1}{2}\rho\varphi = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, $dW/dV = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$. Approssimazione: multipoli.

La carica si conserva $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ed è quantizzata $\pm e$. Spiega la materia.

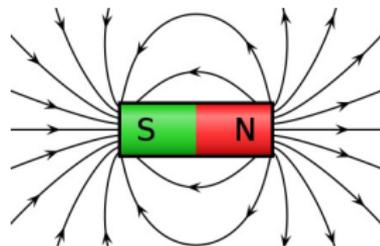
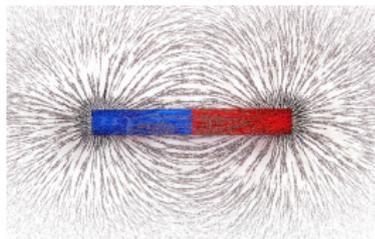
Nella materia. Dielettrici: $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) \approx \rho_{\text{free}}$, $\epsilon \approx \epsilon_0(1 + n\alpha)$. Conduttori: $\mathbf{J} \approx \sigma \mathbf{E}$.

Etc etc. Raffinamenti eleganti capitano quando la fisica diventa noiosa...

Magnetostatica

Il campo magnetico

‘Magnetismo’ deriva da un minerale estratto nella regione ex-greca di Magnesia.



Poli opposti si attraggono; non è possibile separare ‘cariche’; limatura visualizza linee di campo; girano; si sommano $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$; se liberi di ruotare si allineano lungo nord/sud (polo nord del magnete verso nord, esiste \mathbf{B} terrestre).

I ferromagneti (per via di effetti quantistici) generano grossi ‘campi magnetici’.

Forza di Lorentz

Si scoprì (1895) che \mathbf{B} esercita la 'forza di Lorentz' su cariche elettriche:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad W_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Regola della mano destra: l'indice indica \mathbf{v} ; il medio indica \mathbf{B} , il pollice $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.



Simmetrie della forza di Lorentz

L'aver misurato $F_{\perp} = qvB \sin \theta$ significa che la fisica è invariante per rotazioni:

$$\text{vettore} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \text{vettore}.$$

Sotto una trasformazione galileiana $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ quindi $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

La forza di Lorentz è invariante se i campi elettromagnetici trasformano come

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}$$

Quindi $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$ rimane invariante. Relatività rilevante a $u \lesssim c$.

Lorentz è quello delle trasformazioni: alla fine B risulterà essere un effetto relativistico soppresso da $(v/c)^2 \sim 10^{-30}$ visibile perchè i campi elettrici di $N \sim 10^{30}$ e e p si cancellano, ma e fanno moti collettivi dando correnti.

Campi magnetici

La formula di Lorentz definisce le dimensioni

$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \equiv \text{Tesla}$$

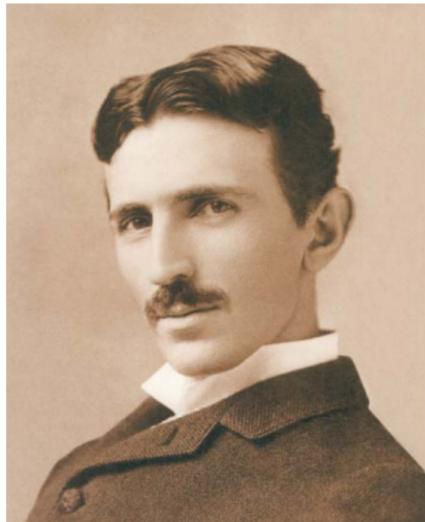
Gauss = 10^{-4} Tesla è usato ma non MKS.

- Una calamita produce $B \sim 10^{-2}$ T.
(Si definisce 'polo nord' quello da cui escono le linee del campo).
- La terra genera $B \sim 10^{-4}$ T.
(Polo nord è il polo nord, ogni tanto cambia).
- Con la tecnologia attuale al massimo si ottiene

$$B_{\text{max}} \sim 20 \text{ T.}$$

- Una stella di neutroni ruotante genera 10^8 T.
- La nostra galassia contiene $B \sim 10^{-10}$ T.

Tante sono le applicazioni pratiche dei campi magnetici...



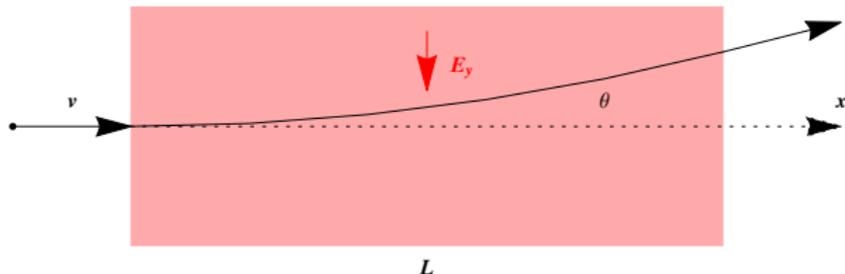
Moto in E : non-misura di m_e

I) Nel 1897 Thomson scoprì l'elettrone: ionizzando atomi e facendo attraversare $V \sim \text{kV}$ gli e acquistano energia $K = m_e v^2/2 = \text{keV}$. Picchiando su di uno schermo (poi usato per costruire televisori) gli e fanno un punto luminoso. Ma questo non consente di misurare v e ricostruire m_e : l'intensità del lampo è data da K , ed il tempo di volo è troppo breve da non essere misurabile.

II) Facendo passare e in E_y si produce una deflessione. Come già visto,

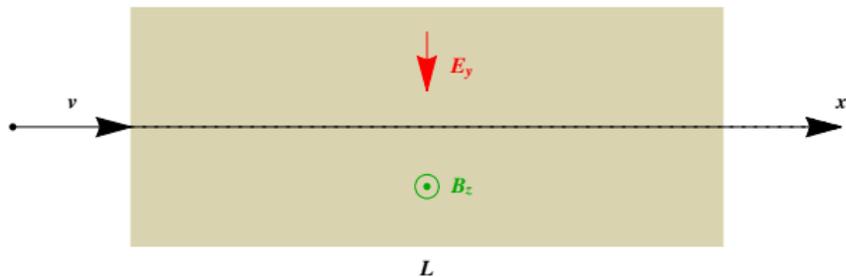
$$\theta = \frac{p_y}{p_x} \simeq \frac{Ft}{m_e v} = \frac{eE_y \cdot L/v}{m_e v} = \frac{eE_y L}{m_e v^2} = 2 \frac{\Delta U}{K}$$

dipende solo da K . Non consente di misurare m_e : serve una misura di v .



Moto in B : misura di m_e

III) Si misura v aggiungendo anche un campo $B_z = E_y/v_x$, scelto in modo tale che (ad esempio) si abbia $F = 0$ e quindi nessuna deflessione:



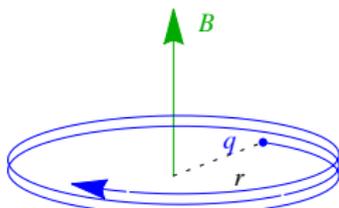
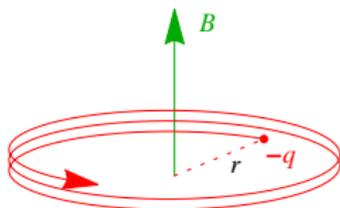
B è misurabile utilizzando un corpo macroscopico, di massa M e carica Q nota. Sorprendentemente si trovò che l'elettrone pesa 1836 volte meno dell'idrogeno. L'apparato produce fasci di particelle con energia data, usati in spettrometri...

Moto in B

Una q in un B costante fa un moto elicoidale con $mv_{\perp}^2/r = qv_{\perp}B$ cioè

$$p_{\perp} = r q B = \frac{\text{J}}{\text{m/s}} \frac{\text{r}}{\text{m}} \frac{q}{\text{C}} \frac{B}{\text{Tesla}} = \frac{c}{\text{m/s}} \frac{\text{eV}}{c} \frac{r}{\text{m}} \frac{q}{\text{e}} \frac{B}{\text{Tesla}} = 300 \frac{\text{MeV}}{c} \frac{r}{\text{m}} \frac{q}{\text{e}} \frac{B}{\text{Tesla}}$$

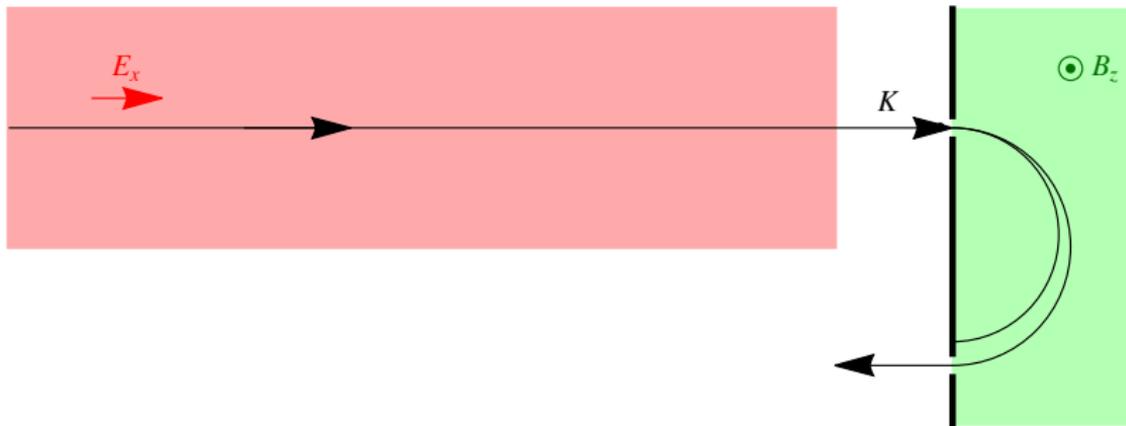
ricordando Joule = Volt Coulomb = eV Coulomb/e.



Periodo $T = 2\pi r/v_{\perp} = 2\pi m/qB$. Pulsazione $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T = qB/m$.

Due campi magnetici consentono di dirigere e verso un punto desiderato dello schermo. Per $K = \text{keV}$ si ha $p = \sqrt{2m_e K} = 0.03 \text{ MeV}/c$. Serve $B \sim 10^{-3} \text{ T}$, abbastanza maggiore del B terrestre da costruire televisori usabili sulla terra. Misurando r si può nuovamente ricostruire la massa dell'elettrone.

Spettrometro



Ioni di carica e e massa M_i accelerati in $V \sim \text{kV}$ acquistano energia $K = eV$, quindi velocità $v_i = \sqrt{2K/M_i}$. Mandandoli in un B , si osserva che dopo mezzo giro escono a valori discreti di $2r_i$. Motivo: hanno valori discreti delle masse:

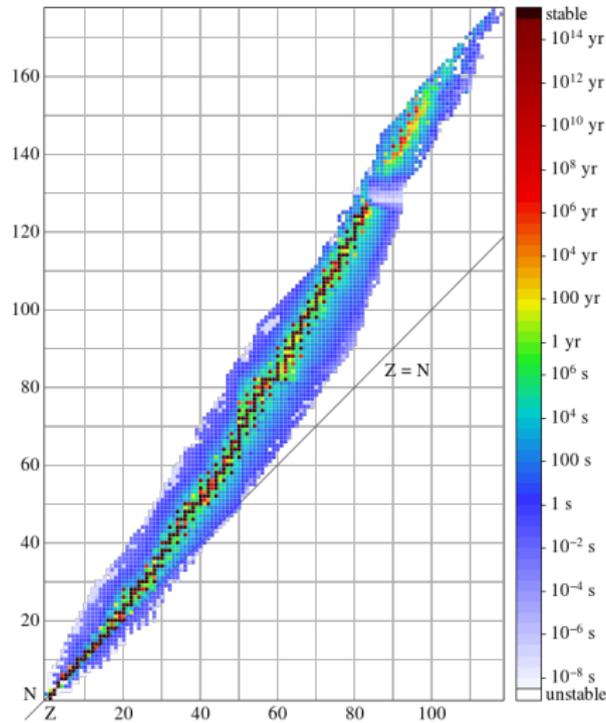
$$r_i = \frac{M_i v_i}{eB} = \frac{\sqrt{2KM_i}}{eB} = \text{m} \frac{0.1 \text{ T}}{B} \sqrt{\frac{K}{5 \text{ keV}}} \frac{M_i}{100 \text{ GeV}}$$

Isotopi

Thomson nel 1913 rivelò l'esistenza degli **isotopi**, separando Neon₁₀²⁰ (90%) e Ne₁₀²² (9%). Aston nel 1919 risolse un mistero della chimica: come mai i pesi molari degli elementi presenti in natura sono quasi multipli interi di m_H ? Le masse degli atomi sono multipli interi

$$M_{Z,N} \approx Z(m_p + m_e) + (N - Z)m_n$$

a meno dell'energia di legame. Ma in natura si trovano miscugli di isotopi con diverso numero di neutroni: ad es. il carbonio ha $Z = 6$ e $N = \{12, 13, 14\}$.
Es.: separare ²³⁵U da ²³⁸U.



Effetto Hall: gli e conducono

Che segno ha la carica q_e dei portatori di carica? Si muovono nella stessa direzione della corrente o in direzione opposta? La forza magnetica dipende da v e quindi consente di rispondere a questa domanda (Hall, 1879).

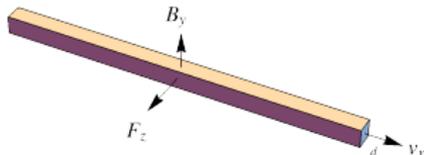
Chiamiamo n la densità numerica dei portatori, e v_x la loro velocità.

Si mette B_y ortogonale ad un filo conduttore in cui scorre $I_x = nq_e S v_x$. I portatori sentono una forza $F_z = q_e v_x B_y \propto I_x$ e vanno storti verso un lato del filo, di spessore d . Si accumulano fino a creare un campo elettrico E_z tale che

$$F_z = q_e(E_z + v_x B_y) = 0$$

e riprendono ad andare dritti. Misurando la differenza di potenziale $V = E_z d$ e quindi E_z si ricava v_x , scoprendo che ha segno opposto a I , cioè che $q_e < 0$.

Si misura inoltre che v_x è piccolo, come atteso. Verifica: l'effetto Hall svanisce muovendo meccanicamente la lamina con velocità opposta a v_x .



Effetto Zeeman

Gli atomi emettono luce su righe spettrali $\sim \Delta\omega$. Accendendo un B le righe spettrali si **spostano** e **separano**.

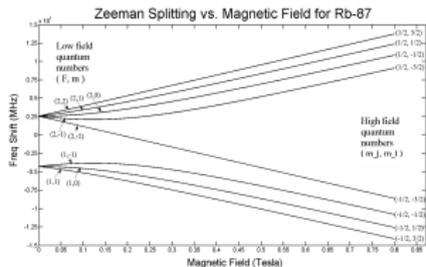
Continuous Spectrum



Emission Lines



Absorption Lines



Lo spostamento è dovuto alla forza magnetica sugli elettroni, ma sono effetti quantistici. Classicamente, per elettroni su orbite circolari con $v = \omega r$

$$m r \omega^2 = F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + e B v \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega \omega_B} \simeq \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}, \quad \omega_B = \frac{eB}{m}$$

La separazione è dovuta allo spin degli elettroni, che girano su loro stessi... Zeeman e Lorentz ricevettero il Nobel 1902, ma dal valore di e/m non capirono di aver scoperto una particella molto più leggera dell'atomo: l'elettrone.

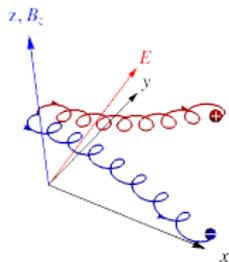
Moto in campi costanti

Risolviamo $m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Invarianza per rotazioni consente di assumere

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} m\dot{v}_x = qv_y B_z \\ m\dot{v}_y = q(E_y - v_x B_z) \\ m\dot{v}_z = qE_z \end{cases}$$

Risolvendo v_z , poi v_y , poi v_x in termini di $\omega_B = qB_z/m$ e 3 velocità iniziali $v_z^0, v_{\text{rot}}, \varphi$:

$$\begin{cases} v_x = +v_{\text{rot}} \cos(\omega_B t + \varphi) + \frac{E_y}{B_z} \\ v_y = -v_{\text{rot}} \sin(\omega_B t + \varphi) \\ v_z = v_z^0 + \frac{qE_z t}{m} \end{cases} =$$



Drift a velocità costante $\mathbf{u} = (E_y/B_z, 0, 0) = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ che non dipende da q, m : è universale? L'invarianza galileiana consente di mettere a zero la componente di $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ortogonale a \mathbf{B} (mentre $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ è invariante).

(Esercizi: fotomoltiplicatore in B , ciclotrone, ...).

Forza magnetica su di un filo

Un filo dritto di lunghezza L e spessore S contiene $N = nLS$ elettroni in moto a velocità v . La forza magnetica totale vale

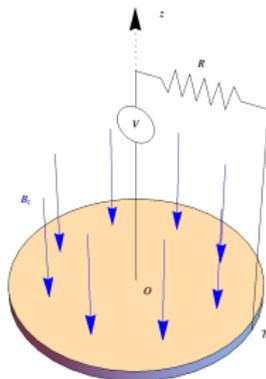
$$F = NevB = LIB, \quad I = SJ = S \cdot nev$$

Per un filo non dritto, dando per convenzione a $d\mathbf{L}$ il verso della corrente:

$$\mathbf{F} = \int I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Applicazioni:

- Amperometro. Si mette il filo in B e si ricava I dal punto di equilibrio fra la forza magnetica e quella di una molla.
- Motori elettrici. E.g. circuito chiuso da contatto strisciante su conduttore libero di ruotare. (Corrente trifase consente di scegliere il senso).
- Generatori di correnti alternate. Facendo girare una spira si crea una fem.



Induzione magnetica

Spira in campo magnetico

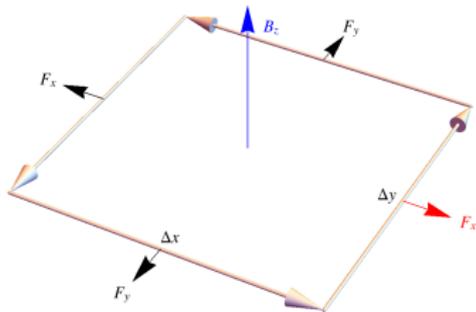
Iniziamo con geometria semplice: spira rettangolare di lati Δx e Δy ferma nel piano xy in presenza di un B_z . Su ogni lato di lunghezza L agisce una forza $|\mathbf{F}| = |ILB|$ diretta verso l'esterno se I gira in senso antiorario e $B_z > 0$. La forza totale vale zero se B è uniforme:

$$\mathbf{F} = I(\oint d\mathbf{s}) \times \mathbf{B} = 0$$

ed è diversa da zero se B non è costante, ad esempio sul bordo di una calamita. Per semplicità assumiamo

$$B_z = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ B_z & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

La forza totale vale $F_x = IB_z \Delta y$. Ad esempio $F = 1$ N se $I = 1$ A e $\Delta y = 1$ m e $B = 1$ T. Il campo magnetico terrestre vale $B \sim 10^{-4}$ T ed è circa uniforme.



Spira in moto in campo magnetico

Assumiamo ora che la spira sia in moto con velocità v_x : quindi

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \neq 0.$$

Dubbio: la forza magnetica non compie lavoro su singole cariche

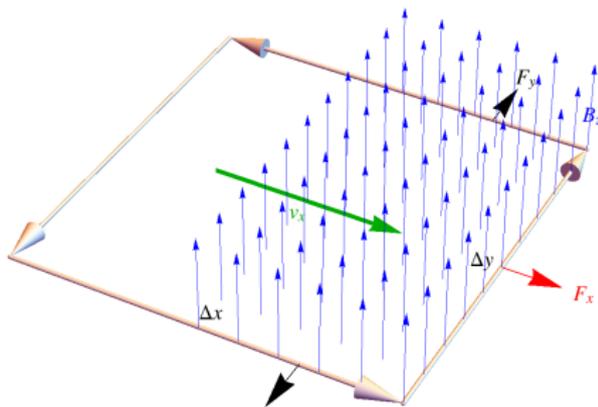
$$W = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Come può compiere lavoro su di un circuito percorso da corrente I , cioè su tante cariche che girano?

L'energia si conserva?

Le formule sono giuste.

Magari altro contribuisce al totale...



Legge di Lenz

Ogni q è soggetta alla forza di Lorentz $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Nei lati Δx F_L è trasversa al filo: è l'effetto Hall. Nei lati Δy , F_L è parallela al filo: **la forza magnetica è una delle forze che possono generare una fem: come $q\mathbf{E}_{\text{eff}}$ con $\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$** . Nell'esempio la fem vale

$$\mathcal{E} = -v_x \Delta y B_z.$$

Per un campo magnetico più generale conta la differenza fra i due lati:

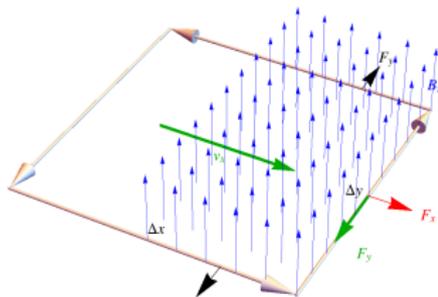
$$\mathcal{E} = -v_x \Delta y [B_z(x + \Delta x) - B_z(x)].$$

Notare che $\mathcal{E} \neq 0$ se B non è uniforme, come \mathbf{F}_{mecc} . La formula generale è:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Legge di Lenz})$$

dove Φ_B è il flusso di B attraverso la spira (misurato in Wb, Weber). Valida per una spira di forma qualunque, come si dimostra scomponendola in rettangolini. O anche usando che il flusso sulla superficie chiusa $\Phi_B(t+dt) - \Phi_B(t) + d\Phi_B^{\text{cut}} = 0$

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{eff}} \cdot d\mathbf{s} = \oint \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \oint \underbrace{(d\mathbf{s} \times d\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}}_{dS_{B_\perp}} = \frac{d}{dt} \int d\Phi_B^{\text{cut}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$



Legge di Lenz: conservazione dell'energia

Il segno è importante, significa la conservazione dell'energia.

- La forza meccanica discussa in precedenza produce una potenza meccanica

$$W_{\text{mecc}} = Fv = vILB.$$

- La fem genera una corrente I : la potenza elettrica in generale vale

$$W_{\text{el}} = \mathcal{E}I = -vILB.$$

Ad esempio, se c'è una resistenza, $I = \mathcal{E}/R$ e $W_{\text{el}} = -W_R = -I^2R$ viene dissipata, quindi F deve opporsi a v .

Le due potenze sono uguali: con il segno giusto l'energia si trasforma

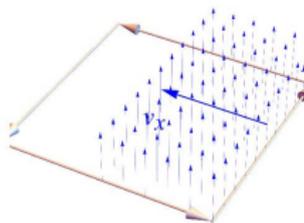
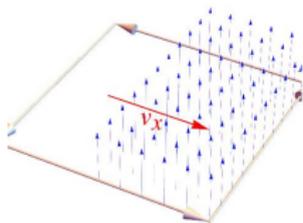
| | | |
|-------------------|---|-------------------|
| energia meccanica | ↔ | energia elettrica |
|-------------------|---|-------------------|

L'energia spesa per spingere una spira in un campo magnetico diventa energia elettrica del circuito (centrale elettrica). Oppure l'energia elettrica può venire usata per far muovere un circuito (motore elettrico).

Spira e campo magnetico in moto

Dubbio fondamentale: supponiamo di muovere il magnete e tenere ferma la spira senza corrente. Siccome $\mathbf{v} = 0$, secondo le equazioni attuali, non dovrebbe venire generata nessuna forza $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ e quindi nessuna fem.

Strano: eppure è lo stesso esperimento visto da due osservatori in moto relativo



L'osservatore solidale al campo magnetico vede $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$.

L'osservatore solidale alla spira vedrebbe $\mathcal{E} = 0$ secondo le equazioni attuali.

Se così fosse, sarebbe violato il **principio di relatività**: le leggi della fisica sono le stesse in sistemi di riferimento in moto relativo uniforme.

Spira e campo magnetico in moto

L'esperimento dice: in tutti i casi si ha

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Legge di Lenz})$$

Per spira in moto la legge di Lenz segue dalla forza di Lorentz, $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Ma la legge di Lenz ha validità più generale: si applica anche quando il circuito è fermo e \mathbf{B} dipende dal tempo (ad esempio per correnti alternate).

Occorre modificare le equazioni fondamentali.

Circuito in moto in $B(\mathbf{x})$: forza magnetica genera fem \mathcal{E} **come se** ci fosse \mathbf{E} .

Circuito fermo in $B(t)$: interpretazione (giusta): **c'è un \mathbf{E} mai visto prima.**

Seconda equazione di Maxwell

Otteniamo la forma definitiva della II equazioni di Maxwell, combinando

- esperimento: la legge di Lenz, $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -\int \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} dS$,
- interpretazione: un vero \mathbf{E} produce $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$,
- matematica: il teorema del rotore $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS$.

Si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Il campo elettrico \mathbf{E} è irrotazionale solo quando \mathbf{B} non dipende da t . Quindi, in generale non è più possibile scrivere $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Niente panico: alla fine il potenziale scalare φ risorgerà in una generalizzazione con potenziale vettore \mathbf{A} .

La legge di Lenz segue a volte dalla forza di Lorentz, a volte dalla II equazione di Maxwell. Strano? Perché le equazioni nascondono più simmetria: la relatività.

Quando discuteremo la generazione di campi magnetici vedremo che il segno – nella legge di Lenz è tale che la fem indotta genera una I che genera un B che si oppone alla variazione $\dot{\Phi}$; e.g. per una spira in moto tende a frenare.

Spira ruotante

Dinamo in biciclette e corrente elettrica nelle prese: fem generata in maniera analoga all'esercizio precedente, con una geometria più complicata ma più conveniente: una spira che gira (invece di traslare) in un campo magnetico.

Facciamo ruotare la spira di lati Δx e Δy in un \mathbf{B}_z uniforme. Il lato esterno Δx ruota attorno all'asse x : i suoi punti hanno

$$y(t) = \frac{\Delta y}{2} \cos \theta(t).$$

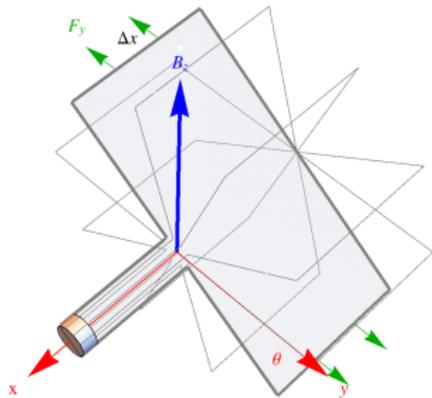
La rotazione della spira produce

$$\mathbf{E}^{\text{eff}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad E_x^{\text{eff}} = v_y B_z$$

lungo i lati esterni Δx , e quindi una fem

$$\mathcal{E} = -2\Delta x v_y B_z = B\Delta x \Delta y \dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\Phi}_B$$

dove $\Phi_B = BS \cos \theta$ e $S = \Delta x \Delta y$ è l'area della spira e θ è anche l'angolo fra la normale \mathbf{n} alla spira e \mathbf{B} .



Spira ruotante: energia

La potenza elettrica vale

$$W_{el} = \mathcal{E}I = BIS\dot{\theta} \sin \theta.$$

Per \mathbf{B} uniforme la forza totale vale zero: sui due lati Δx agisce $F_y = \Delta x IB_z$, e la somma fa zero. Non vale zero il momento delle forze

$$M_x = F_y \Delta y \sin \theta = IBS \sin \theta.$$

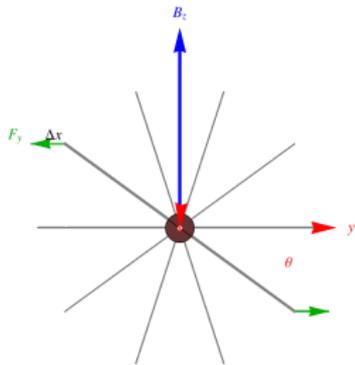
La potenza meccanica vale

$$W_{mecc} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = M_x \dot{\theta} = BIS \dot{\theta} \sin \theta.$$

Potenza elettrica = potenza meccanica.

$W_{mecc} = 2F_y v_y$ è anche calcolabile come moto non-rotatorio dei due lati Δx .

Se uno vuole corrente più continua: diodo può trasformare $\sin \omega t$ in $\max(0, \sin \omega t)$.
Diodi o marchingegni con contatti striscianti possono 'rettificare' $\sin \omega t$ in $|\sin \omega t|$.



Generazione di campi magnetici

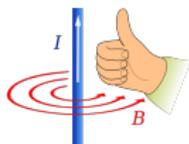
B è generato da J

Nel 1820 Hans-Christian Orsted insegnava elettrostatica all'università di Copenaghen. Durante una dimostrazione dell'effetto Joule, in cui una corrente elettrica riscaldava un filo, per caso una bussola magnetica era vicino al filo. Orsted notò che la bussola si muoveva quando veniva accesa la corrente. Ne fu magnetizzato. Facendo esperimenti si misura che:

- Un filo rettilineo infinito percorso da una corrente I genera

$$B_{\theta} = \mu_0 I / 2\pi r$$

Il verso è dato dalla 'regola della mano destra'.



- Una spira circolare genera nel suo centro $B_{\perp} = \mu_0 I / 2a$.

La costante μ_0 vale

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

avendo usato Tesla = N/A · m

μ_0 ha un valore arbitrario (e neanche tanto furbo) perchè questa è la definizione dell'Ampere (1948): 'due fili infiniti paralleli a distanza di 1 m sono percorsi da 1 A se la forza fra di loro vale $2 \cdot 10^{-7}$ Newton/metro'. In generale, la forza fra due fili paralleli vale $F = \mu_0 L I_1 I_2 / 2\pi d$ (attrattiva se le correnti sono concordi).

Formula integrale per B

Assumendo che la fisica è invariante per rotazioni, questi pochi casi bastano per dedurre la formula generale di Biot-Savart. Una densità di corrente \mathbf{J} genera

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

i.e. un filo $I = JS$ o una carica in \mathbf{r}' generano

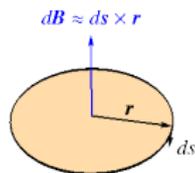
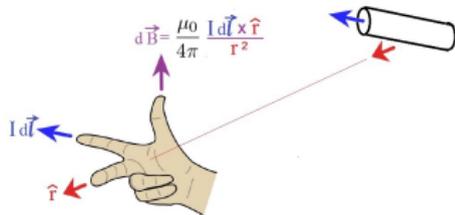
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Verifica 1: filo infinito rettilineo

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin \theta}{d^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \stackrel{\sphericalangle}{=} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Verifica 2: nel centro di una spira circolare di raggio a

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi a}{a^2} \stackrel{\sphericalangle}{=} \frac{\mu_0 I}{2a}$$



Circuitazione del campo magnetico

Definiamo la circuitazione $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ e proviamo a calcolarla.

Caso 1: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$ lungo un cerchio e ogni altro percorso che racchiude I .

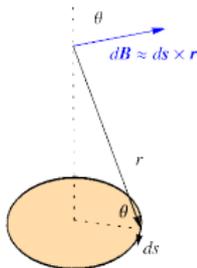
Caso 2. Calcoliamo $B_z(z)$ lungo l'asse di una spira circolare di raggio a nel piano xy :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi a}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I a}{2 r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{2} \frac{I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

dove $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$ forma angolo θ con l'asse z .

La circuitazione su di un cerchio di raggio infinito vale

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz B_z = \mu_0 I$$



Disco di Rowland

Anche il moto meccanico di cariche genera B ?

Stimiamo: una carica $Q \sim C$ su un condensatore che gira 1 volta al secondo genera $I = 1$ A, che genera $B \sim \mu_0 I / r \sim 10^{-7}$ T a $r \sim$ m. Ma genera anche

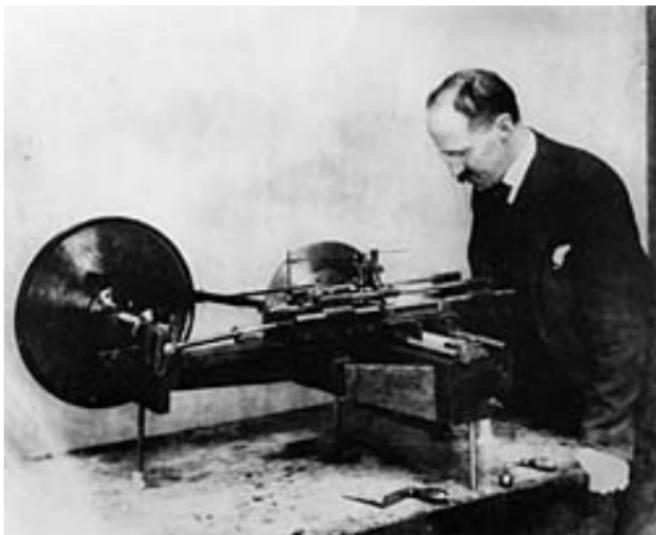
$$E \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$F \sim QE \sim 10^{11}$$

distruggendo disco e aria. Rowland nel 1878 usò $Q \sim 10^{-6}$ C e $\nu \sim 100$ Hz, che produce a $d \sim 0.1$ m

$$B \sim 10^{-10} \text{ T} \quad E \sim 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Schermando E tramite un conduttore, Rowland riuscì a rivelare $B(t)$ nonostante il B terrestre 10^5 volte maggiore.



Elettricità vs magnetismo

Due fili rettilinei a distanza r hanno densità di carica uniforme λ e sono in moto con velocità v lungo i propri assi. Il moto di ogni filo equivale ad una corrente $I = \lambda v$ per cui ogni filo dà

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$$

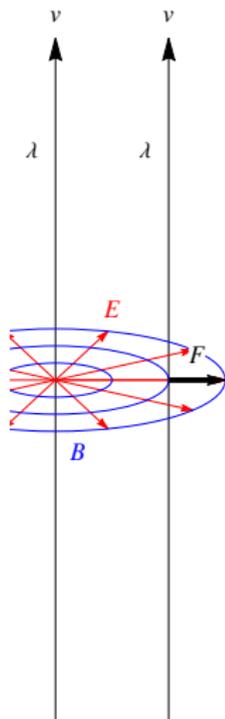
Nasce una forza elettrica (repulsiva) e magnetica (attrattiva). Chi vince? La forza per unità di lunghezza è finita:

$$\frac{dF_v}{dr} = \lambda(E_r - vB_\theta) = \frac{\lambda^2}{2\pi r} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 v^2 \right).$$

Incompatibile con la relatività Galileiana, secondo cui $F_v = F_0$.

$$\frac{dF_v}{dr} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad \boxed{c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.997924 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}}.$$

Lorentz darà $F_v = F_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ e contrazioni dell'unità di lunghezza, di $\lambda \dots$ F_v giusta a meno di altri effetti relativistici di ordine v^2/c^2 . **La forza magnetica è correzione relativistica alla forza elettrica.** Poi troveremo lo stesso risultato calcolando la forza fra due cariche con velocità v .



III e IV equazione di Maxwell (per ora)

La sorgente di \mathbf{B} è $\propto \mathbf{J}$, le uniche equazioni invarianti per rotazioni sono

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} \propto \mathbf{J}.$$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ in quanto nessuno ha mai visto cariche magnetiche q_m da cui esce \mathbf{B} , le linee del campo magnetico ‘girano’ senza uscire da sorgenti.

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ implica la **legge di Ampere**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{concatenata}} \quad \text{dove} \quad I_{\text{concatenata}} = \Phi_J = \sum I_i$$

che riproduce gli esempi. Applicazione: solenoide rettilineo, circolare...

Verifica: applichiamo il rotore a Biot-Savart $\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi) \int dV \mathbf{J} \times \mathbf{r}/r^3$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \left[\mathbf{J}(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) - \frac{\mathbf{r}}{r^3}(\nabla \cdot \mathbf{J}) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV [\mathbf{J}4\pi\delta(\mathbf{r}) - \dots \nabla \cdot \mathbf{J}] = \mu_0 \mathbf{J} + \dots \nabla \cdot \mathbf{J} \stackrel{?}{=} \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

usando $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = -\nabla^2(1/r) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$. Il termine $\nabla \cdot \mathbf{J}$ vale zero nel limite statico. Boh, siamo nel bacino di attrazione della teoria giusta, andiamo avanti.

Riassunto (finora)

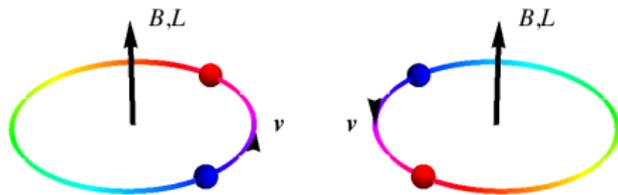
$$\left\{ \begin{array}{lll}
 1) & \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \Rightarrow \Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0 \\
 2) & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B \\
 3) & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \Rightarrow \Phi_B = 0 \\
 4) & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} & \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{conc}} \\
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 & \Rightarrow \dot{Q}_{\text{in}} + \Phi_J = 0 \\
 & q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F} &
 \end{array} \right.$$

Invarianti per **rotazioni** e **parità**

$$\mathbf{x} \xrightarrow{P} -\mathbf{x} \quad \nabla \xrightarrow{P} -\nabla$$

se $\mathbf{E} \xrightarrow{P} -\mathbf{E}$ è un vettore come \mathbf{v} , \mathbf{J} ;
 $\mathbf{B} \xrightarrow{P} \mathbf{B}$ è un pseudovettore come
 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ e $\mathbf{V} \times \mathbf{V}'$; ρ è uno scalare;
 ρ_m sarebbe pseudo-scalare.

Invarianti per **inversione temporale** $t \rightarrow -t$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ quindi $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ e
 $\mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{J}$.

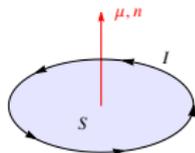


Dipolo magnetico

Dipolo magnetico

Una piccola spira di superficie S percorsa da corrente I è approssimabile come **dipolo magnetico** di momento

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = I \int dS \mathbf{n} \simeq IS\mathbf{n}$$



con unità di misura $\text{A} \cdot \text{m}^2 = \text{J}/\text{T}$. Esiste una piena analogia fra dipolo elettrico e dipolo magnetico, sia per le forze sentite in campi esterni

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

che per i campi generati

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right]$$

Il motivo generale della similitudine è che nel vuoto \mathbf{E} e \mathbf{B} soddisfano alla stessa equazione: zero divergenza e zero rotore. Quindi hanno la stessa espansione in potenze di d/R : monopolo, dipolo, quadrupolo...

Non esistono cariche magnetiche, quindi il dipolo magnetico domina.

Se esistessero cariche magnetiche si potrebbe ottenere un dipolo magnetico da due cariche magnetiche $+$ e $-$. Non esistono, il conto è più complicato.

Momento su dipolo magnetico — esempio

Nel caso della spira ruotante avevamo trovato un momento delle forze

$$M_x = F_y \Delta y \sin \theta = B_z IS \sin \theta$$

dove θ è anche l'angolo fra la normale $\mathbf{n} = (0, \sin \theta, \cos \theta)$ alla spira e $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$. Si può riscrivere $M_x = \mu_y B_z$ in forma vettoriale:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Quindi $M = -\partial U / \partial \theta$ dove $U = -\mu B \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ è una energia potenziale.

Applicazioni del dipolo:

- **Bussola.** Grazie all'attrito $\boldsymbol{\mu}$ si allinea a \mathbf{B} .
- **Levitazione magnetica.** Dipolo sospeso sopra spira: $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ è minima se $\boldsymbol{\mu}$ si allinea a \mathbf{B} e scende verso B intensi. Ma un dipolo anti-parallelo a \mathbf{B} mantiene la sua orientazione se ruota, per conservazione di $L \propto \boldsymbol{\mu}$.



Momento su dipolo magnetico

Dimostrazione generale. Si consideri un circuito in campo magnetico esterno costante. La forza totale vale $\mathbf{F} = I(\oint d\mathbf{r}) \times \mathbf{B} = 0$. Il momento delle forze vale

$$\mathbf{M} = \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \oint \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = I \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{r} - 0$$

avendo espanso il doppio prodotto vettore ed usato che l'altro termine è proporzionale a $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0$. Per ciascuna componente di M

$$M_i = I \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dr_i = \frac{IB_j}{2} \oint [(r_j dr_i + r_i dr_j) + (r_j dr_i - r_i dr_j)]$$

Il primo termine si semplifica in $d(r_i r_j)$ il cui integrale **vale zero**. Il secondo vale:

$$\mathbf{M} = I \oint [d\mathbf{r}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r})] = \left(\frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}\right) \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Campo di dipolo magnetico — esempio

Sappiamo la forma generale del campo di dipolo. Dimostriamo che $\boldsymbol{\mu} = IS\mathbf{n}$ è vera per un caso particolare: una spira circolare di raggio a . Lungo il suo asse

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{e, a grande distanza } z \gg a \quad B_z \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}.$$

Il campo di dipolo magnetico, vero per sistema generico piccolo

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right] \quad \text{e, sull'asse } \boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{r} \parallel \hat{\mathbf{z}} \quad B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\pi I a^2}{z^3}$$

avendo inserito $\mu = \pi I a^2$, il valore per una spira di raggio a .

Campo di dipolo magnetico

Dimostrazione che una piccola spira di superficie S con normale \mathbf{n} percorsa da corrente I genera in P a grande distanza un \mathbf{B} di dipolo $\boldsymbol{\mu} = IS\mathbf{n}$. Definendo O il centro della spira; $\mathbf{R} = OP$; \mathbf{r} il raggio vettore dal centro della spira si ha:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{R} - \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} \stackrel{R \gg a}{\simeq} \frac{\mu_0}{4\pi R^3} I \oint d\mathbf{s} \times \left(\mathbf{R} \frac{3\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} - \mathbf{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3} \right]$$

1o passaggio: si è espanso al primo ordine in \mathbf{r} : $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^{-3} \simeq R^{-3}(1 + 3\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}/R^2)$.

2a passaggio: il secondo termine dell'integrale è facile, visto che $d\mathbf{s} \times \mathbf{r} = r^2 \mathbf{n} d\theta$ e fornisce il doppio dell'ultimo termine del risultato. Per fare il primo termine dell'integrale conviene osservare che esso è ortogonale ad \mathbf{R} :

$$\oint d\mathbf{s} \times \mathbf{R} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} = c \left[\mathbf{n} - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})}{R^2} \right]$$

Mettendo l'asse z lungo \mathbf{n} e l'asse x ortogonale ad $\mathbf{R} = R_z \mathbf{n} + R_y \hat{\mathbf{y}}$ e moltiplicando entrambi i lati per \mathbf{n} , il secondo termine diventa cR_y^2/R^2 ; nel primo si usa $\mathbf{n} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{R}) = d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{n})$ ottenendo la costante c :

$$c = -\frac{R^2}{R_y^2} \cdot \frac{R_y^2}{R^2} \oint dx y = -S.$$

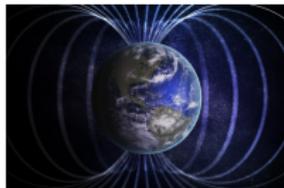
Fattore giro-magnetico

- Campo magnetico della terra: circa dipolo

$$\mu_E = 8.05 \cdot 10^{22} \text{ J/T orientato verso sud.}$$

A Pisa (latitudine 45 gradi) B esce a 45 gradi:

$$B = (\mu_0 \mu / 4\pi) \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 0.5 \text{ Gauss.}$$



- Pulsar hanno $\mu \sim 10^{29} \text{ J/T}$. Sono stelle collassate a $R \sim 10 \text{ km}$ che ruotano con $\omega \sim 1/\text{s}$.
- Una carica q che gira su di un'orbita circolare di raggio a con velocità angolare ω genera $\mu = \pi a^2 I = qa^2 \omega / 2$ in quanto $I = q/T = q\omega / 2\pi$. Il momento angolare vale $L = mav = ma^2 \omega$ quindi

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad \text{con} \quad g = 1.$$

- Oggetto che ruota: $\mathbf{L} = I_{\text{in}} \boldsymbol{\omega}$ con momento di inerzia $I_{\text{in}} = \int r^2 dm$ e

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \int \pi r^2 dI = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi} \int \pi r^2 dq = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \int r^2 dq \quad g = \frac{\int r^2 dq / q}{\int r^2 dm / m} = \frac{\langle r^2 \rangle_q}{\langle r^2 \rangle_m}.$$

$g = 1$ se carica e massa hanno uguale distribuzione; $g > 1$ se la carica gira più esterna della massa. $g = 5/3$ per sfera uniforme con carica superficiale.

Dipolo magnetico di particelle elementari

Una bacchetta magnetica ha $\mu \sim \text{J/T}$. Le particelle elementari hanno un dipolo magnetico circa N_A volte minore:

$$\mu_e = 0.93 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}, \quad \mu_p = 1.4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}.$$

Tutti gli elettroni hanno lo stesso μ , come se fossero palline che girano su se stesse sempre alla stessa velocità! Lo stesso per i protoni.

Classicamente incredibile.

La meccanica quantistica spiega il fenomeno come “quantizzazione del momento angolare” o spin. Assumendo $L = \hbar$ e $g = 1$ si ottiene

$$\text{Magnetone di Bohr} = \mu_B \equiv e\hbar/2m_e = 0.93 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}.$$

L'elettrone è un ‘fermione elementare’: $L = \hbar/2$ e $g_e \approx 2$, o meglio

$$g_e = 2.002319304374 \quad \text{capito teoricamente, } 2 + \alpha/\pi + \dots.$$

Il protone ha $g_p \approx 5.6$: complicato perché composto da quark, che hanno $g_q \approx 2$.

Induttori ed energia magnetica

Induttori

Lenz $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ vale anche per il \mathbf{B} che un circuito induce su se stesso.

Un **induttore** è l'analogo magnetico di un condensatore: un dispositivo che immagazzina un B e la sua energia. Il suo simbolo circuitale è .

L'analogo di $C = Q/V$ è $1/L = I/\Phi_B$ cioè $\Phi_B = LI$.

L'auto-**induttanza** L si misura in Henry = T m²/A.

Ai capi di una L costante: $\mathcal{E}_L = -\dot{\Phi}_B = -L\dot{I}$.

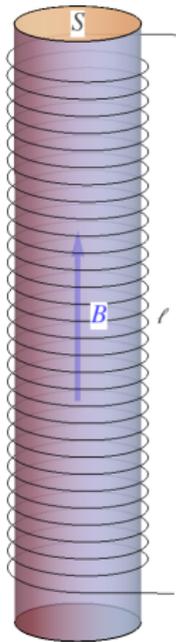
Una spira circolare genera B complicato: L dipende dallo spessore del filo.

Archetipo dell'induttanza è un lungo solenoide di lunghezza ℓ ed area $S \ll \ell^2$ con $N = n\ell$ spire.

Usando Ampere si trova che dentro $B = \mu_0 n I$ costante.

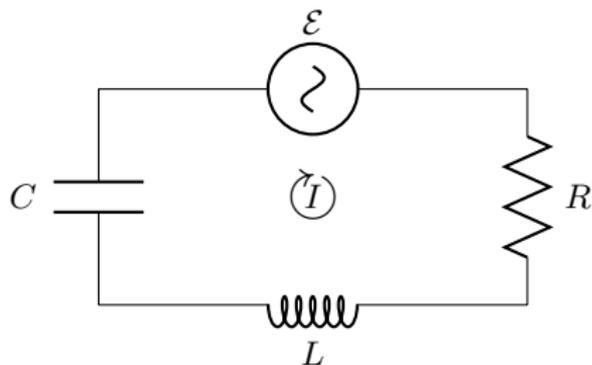
La sua induttanza vale

$$L \equiv \frac{\Phi_B}{I} = \frac{NSB}{I} = \frac{\mu_0 S N^2}{\ell} = \mu_0 S \ell n^2.$$



Circuito RLC

L'equazione di un circuito RLC è $\mathcal{E} + \sum \mathcal{E}_{R,L,C} = 0$ (\mathcal{E}_L viene dal secondo termine di $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$; in seguito riapparirà un potenziale elettrico).



$$\mathcal{E} = RI + Q/C + LI\dot{}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F \quad \text{analogo a} \quad L\ddot{Q} = -Q/C - R\dot{Q} + \mathcal{E}$$

Carica di circuito RC : veniva $Q(t) = (CV)[1 - e^{-t/\tau}]$ con $\tau = RC$ e $U_E = Q^2/2C$.

Carica di circuito RL : viene $I(t) = (V/R)[1 - e^{-t/\tau}]$ con $\tau = L/R$.

Il fatto che ci voglia tempo per carica o scarica indica che l'induttanza contiene **energia magnetica** $U_B \stackrel{?}{=} LI^2/2$ associata alla corrente I . Dimostriamolo.

Energia magnetica

Energia magnetica in una induttanza:

$$\frac{dU_B}{dt} = -W = -\mathcal{E}I = LI\dot{I} = \frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2} \quad U_B = \frac{LI^2}{2}$$

Quindi la densità di energia magnetica in un lungo solenoide vale

$$u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{LI^2/2}{S\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Dimostreremo che questo è un risultato generale: in presenza di E e B

$$\text{densità di energia elettromagnetica} = u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Max B : $u_B \lesssim u_E \sim \frac{F_C}{\text{Å}^2}$ i.e. $B \lesssim \frac{E_{\text{atomo}}}{c} \sim \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c \text{Å}^2} \sim 1000 \text{ T}$. In pratica 40 T.

Una tipica induttanza vale $L \sim \mu_0 \cdot m \sim 10^{-6} \text{ mT/A}$: se e.g. $I = 1 \text{ A}$ si ha $U = 10^{-6} \text{ J}$ che è poca energia. Provoca le scintille negli interruttori. Per immagazzinare energia bisogna far circolare una corrente I , che viene dissipata da resistenze. Un condensatore è un migliore strumento per immagazzinare energia. L'induttanza ha come uso pratico il trasformatore.

Mutua induzione

Consideriamo due circuiti. Anche se sono separati, il magnetismo li accoppia:

$$-\mathcal{E}_1 = \dot{\Phi}_1 = L_{11}\dot{I}_1 + L_{12}\dot{I}_2, \quad -\mathcal{E}_2 = \dot{\Phi}_2 = L_{22}\dot{I}_2 + L_{21}\dot{I}_1.$$

Applicazione: **trasformatore** (sarà discusso con il ferromagnetismo).

Si dimostra che $L_{12} = L_{21}$:

$$\begin{aligned} L_{12} &\equiv \frac{\Phi_{1,B2}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \oint d\mathbf{s}_2 \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \oint d\mathbf{s}_2 \times \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot (\nabla \times \oint \frac{d\mathbf{s}_2}{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} = L_{21}. \end{aligned}$$

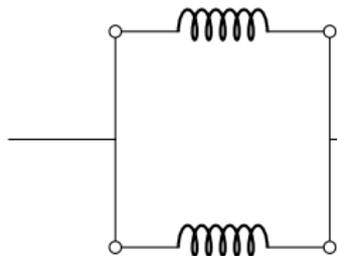
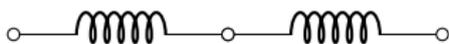
e quindi conviene semplificare la notazione: $\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}$.

L'energia vale $U = \frac{1}{2} \sum L_{ij} I_i I_j$ infatti $\dot{U}_B = -W = -\sum_i \mathcal{E}_i I_i = \sum_{ij} L_{ij} \dot{I}_j I_i$.

Esempio: induzione su spira di raggio a di dipolo μ nel suo centro. $\mu = si$ riceve $M = \Phi_s/I = \mu_0 s \cos \theta / 2a$ e quindi produce $\Phi_S = Mi = \mu_0 \mu \cos \theta / 2a$.

Induttanze in serie e parallelo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -L_1 \dot{I}_1 - M \dot{I}_2 \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1\end{aligned}$$



- Se $M = 0$ le induttanze si combinano come le resistenze: sono impedenze.
- In serie dritti: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = I_2$ implica $L = L_1 + L_2 + 2M$.
- In serie a rovescio: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = -I_2$ implica $L = L_1 + L_2 - 2M$.
Deve essere $M < (L_1 + L_2)/2$ in quanto $L > 0$.
- In parallelo dritti $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ e quindi

$$\dot{I}_1 = -\mathcal{E} \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \dot{I}_2 = -\mathcal{E} \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2}$$

$$-\mathcal{E} \equiv L \dot{I} = L(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

da cui $M < \sqrt{L_1 L_2}$, che è una condizione più stringente.

- In parallelo a rovescio viene $L = (L_1 L_2 - M^2)/(L_1 + L_2 + 2M)$.

Forza magnetica dall'energia

$\mathbf{F} = -\nabla U$ in assenza di oggetti (come generatori) che fanno lavoro. Altrimenti complicano il bilancio energetico e serve più 'lavoro' per calcolare la stessa F .

Nel caso elettrico si aveva

$$Q = CV \quad U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{V^2}{2} \nabla C, \quad \text{e.g.} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Variando la geometria in assenza di generatori, Q rimane costante mentre V con la geometria. Quindi F vuole aumentare C . Vuole ridurre la distanza d fra i piatti di un condensatore piano. Infatti cariche opposte si attraggono.

Nel caso magnetico si hanno formule analoghe:

$$\Phi = LI \quad U = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{I^2}{2} \nabla L \quad \text{e.g.} \quad L = \mu_0 N^2 \frac{S}{d}.$$

Variando la geometria in assenza di generatori e resistenze, I varia in maniera da mantenere Φ costante. Quindi F vuole aumentare L . Vuole ridurre d avvicinando le spire di un solenoide. Infatti correnti concordi si attirano.

Esempio: ferromagnete in solenoide. $L = L_z + L_{d-z} \simeq \mu n^2 S z$, $F = I^2 \mu n^2 S / 2$.

Magnetismo nella materia

Magnetismo nella materia

Si osserva un fenomeno analogo alla dielettricità, descritto da equazioni analoghe: un campo magnetico \mathbf{B} nella materia induce dipoli magnetici $\mu\mu$ con densità \mathbf{M} che correggono il campo:

| | | |
|---|-------------------|---|
| $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ | \leftrightarrow | $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ |
| $\rho = \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{pol}}$ | \leftrightarrow | $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{free}} + \mathbf{J}_{\text{mag}}$ |
| $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ | \leftrightarrow | $\mathbf{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$ |
| $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$ | \leftrightarrow | $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{free}}$ |
| $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$ | \leftrightarrow | $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu$ |
| $\mathbf{P} \approx \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$ | \leftrightarrow | $\mathbf{M} \approx \chi_m \mathbf{H}$ |

Anche i dipoli magnetici possono essere propri o indotti. Si osserva che

- Materia con dipoli magnetici indotti **scherma** \mathbf{B} , diamagnetismo $\mu < \mu_0$.
- Materia con dipoli magnetici propri **aumenta** \mathbf{B} , paramagnetismo $\mu > \mu_0$.
- Si osserva poi il ferromagnetismo $\mu \gg \mu_0$.

Comprensione teorica: meccanica quantistica, o argomenti classici hand-waving.

Diamagnetismo (dipolo indotto)

Effetto Zeeman: un $\mathbf{B}(t)$ varia la velocità angolare degli elettroni negli atomi

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_L, \quad \boldsymbol{\omega}_L = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}.$$

(Assumendo che il raggio rimanga lo stesso, fissato da meccanica quantistica. Lenz: \dot{B}_z induce $E_\theta = -r\dot{B}_z/2$ che classicamente modifica la traiettoria).

Il dipolo magnetico indotto vale:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{ea^2}{2} \boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e^2 a^2}{4m_e} \mathbf{B}.$$

Segno stabilito dalla legge di Lenz: $\boldsymbol{\omega}_L$ genera un \mathbf{B} che si oppone al \mathbf{B} esterno. Quindi, analogamente alla dielettricità, il magnetismo viene schermato: $\mu < \mu_0$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 - n \frac{e^2 a^2}{4m_e} \approx 1 - 10^{-(4 \div 8)} < 1.$$

($\epsilon > \epsilon_0$ ma $1/\epsilon_0$ corrisponde a μ_0).

Paramagnetismo (dipolo proprio)

Alcune sostanze hanno particelle con momento di dipolo magnetico permanente $\bar{\mu}$, ma orientato in modo casuale per via dell'agitazione termica. $U = -\bar{\mu} \cdot \mathbf{B}$ le orienta in parte lungo \mathbf{B} . L'effetto è soppresso da $\bar{\mu}B/kT$ analogamente a come una bussola non indica il nord se agitata. Il dipolo medio

$$\mu \sim \bar{\mu}(\bar{\mu}B/kT)$$

è proporzionale a $\bar{\mu}$ per il grado di allineamento dei dipoli, a sua volta proporzionale a $\bar{\mu}$. L'effetto è analogo a quello elettrico, con una differenza importante: il segno. Si ha $\mu > \mu_0$, anche se nuovamente è un effetto piccolo:

$$\mu_r \sim 1 + 10^{-(3\div 6)}.$$

Un diamagnete è respinto da B forti mentre un paramagnete è attratto.

Un dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$ parallelo a \mathbf{B} è attratto da $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ verso B forti rotazionali (come $B_z \propto z$), che non hanno analogo elettrico. Il segno è legato al fatto che cariche eguali si respingono, mentre correnti parallele si attirano.

Ferromagnetismo

Alcuni materiali come il ferro hanno $\mu_r \sim 10^{3\div 5}$. Dipoli magnetici molecolari vogliono allinearsi collettivamente in una direzione. Un piccolo B esterno indica la direzione, stimolando l'allineamento collettivo che genera un grosso B .

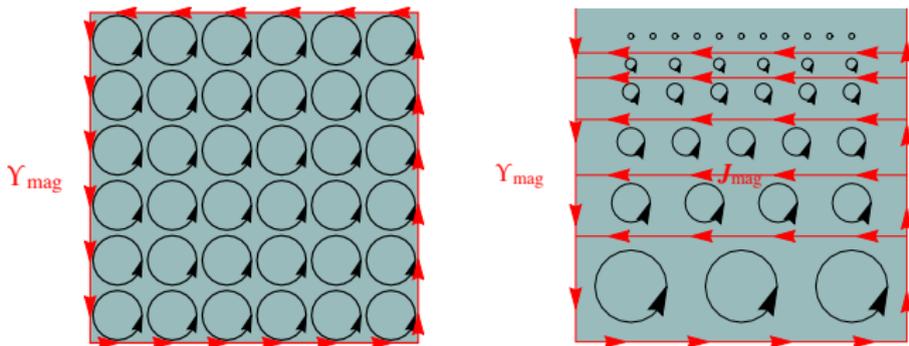
Questi sono hand-waving: maneggiamenti semi-logici che arrivano al risultato.

(Para-, dia-, e ferro-magnetismo non dovrebbero esistere, secondo la fisica statistica classica in cui la probabilità $\varphi \propto e^{-E/k_B T}$ è determinata dall'energia $E = \frac{m}{2}v^2 + q\varphi$ che non dipende da B . Un dipolo magnetico ha energia $E = -\mu \cdot B$ ma un elettrone che gira non è un dipolo: è un elettrone che gira. In meccanica quantistica il principio di Pauli è essenziale nello spiegare il ferromagnetismo).

Inoltre, si osserva l'esistenza di **superconduttori**, materiali con $\sigma = \infty$ che espellono B e quindi descritti da $\mu_r = 0$. Sono uno stato quantistico macroscopico.

Magnetismo nella materia in generale

Tanti dipoli magnetici μ con densità volumetrica n producono la **densità di magnetizzazione** $M \equiv n\mu$. Pensandoli come tante correnti che girano, un M costante genera una densità di corrente “di magnetizzazione” $\mathbf{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$ sulla superficie del materiale magnetizzato:



In generale

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_{\text{free}} + \mathbf{J}_{\text{mag}} \quad \mathbf{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$$

Dimostrazione: sommando le \mathbf{J}_{mag} su facce attigue di piccoli cubetti...

Magnetismo nella materia in generale

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{tot}} = \mu_0 (\mathbf{J}_{\text{free}} + \mathbf{J}_{\text{mag}}) = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{free}} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

diventa $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}) = \mathbf{J}_{\text{free}}$, quindi

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{free}}, \quad \mathbf{B} \equiv \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Descrivendo la materia con l'equazione approssimata $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ si ha

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

con

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r$$

Un materiale: come se $\mu_0 \rightarrow \mu$.

Due materiali con diversi μ : le condizioni di raccordo sulla superficie di separazione sono, in assenza di \mathbf{J}_{free} ,

$$\Delta B_{\perp} = 0, \quad \Delta H_{\parallel} = 0$$

Magnetismo nel ferro

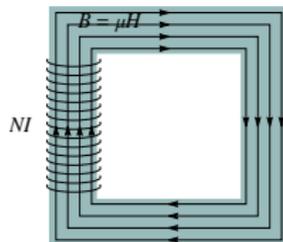
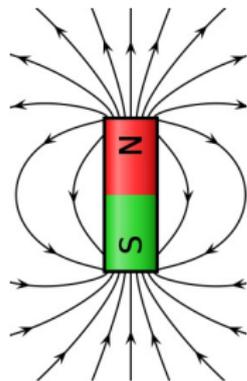
$\mu_r \gg 1$ semplifica. Condizioni di raccordo su \mathbf{B} e $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$

$$\frac{B_{\parallel}^{\text{aria}}}{\mu^{\text{aria}}} = \frac{B_{\parallel}^{\text{ferro}}}{\mu^{\text{ferro}}} \approx 0, \quad B_{\perp}^{\text{aria}} = B_{\perp}^{\text{ferro}}.$$

Come un solenoide: correnti sui lati generano dentro $B_{\parallel}^{\text{ferro}} \gg B_{\parallel}^{\text{aria}}$; \mathbf{B} esce solo ai bordi \perp . Le linee di campo \mathbf{B} rimangono dentro il ferromagnete, in cui

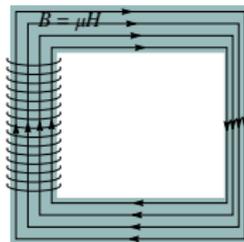
$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{free}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Phi_B = \text{cte} \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{free}}^{\text{conc}} \end{cases}$$

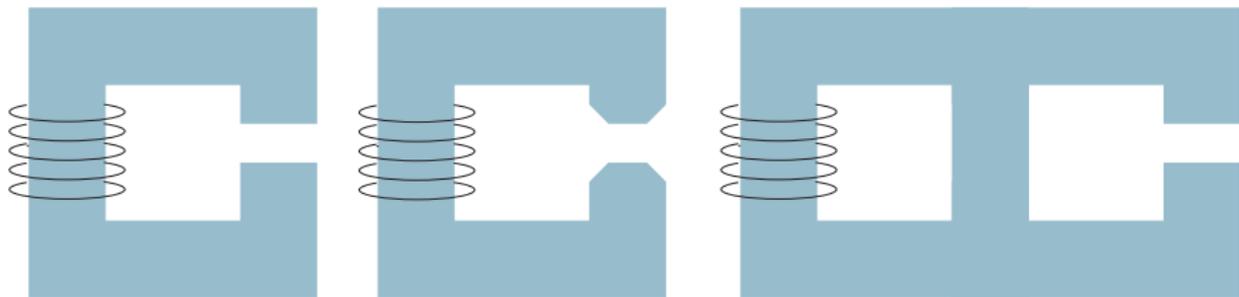


Esempio 1: $4LH = NI$ e $H = B/\mu$ quindi $B = NI\mu/4L$.

Esempio 2: nel lato spesso la metà B vale il doppio in quanto $S_1 B_1 = S_2 B_2$, quindi $B = NI\mu/5L$.



Magnetismo nel ferro: esempi



a) $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI$ con $H = B/\mu$ e $B_{\text{in}} = B_{\text{out}}$ nel buco di spessore d . Quindi

$$\frac{(4L - d)B}{\mu} + \frac{dB}{\mu_0} = NI \quad \Rightarrow \quad B = \frac{NI\mu}{4L + d(\mu_r - 1)}$$

Un $d \sim (\mu_0/\mu)L \ll L$ riduce B .

b) Φ_B è costante, quindi $B_{\text{buco}}S_{\text{buco}} = BS$.

c) ‘Riluttanze’ o ragionamento. Definiamo B_L e B_R nelle maglie Left e Right.

$$4LB_L/\mu - LB_R/\mu = NI \quad (4L - d)B_R/\mu - LB_L/\mu + dB_R/\mu_0 = 0.$$

Quindi nel buco $B_R = NI\mu/(15L + 4d(\mu_r - 1))$.

A che serve il trasformatore

$\mu_r \gg 1$ consente di costruire **trasformatori di corrente alternata**.

Per trasportare una data potenza $W = VI$ da una centrale elettrica al luogo di consumo conviene utilizzare un **grosso V** ed una **piccola I** , in modo da ridurre la potenza RI^2 dissipata per effetto Joule lungo la linea di trasmissione.

Esempio: per trasmettere $W = 10$ kW a **$V = 100$ V** serve **$I = 100$ A**; se invece la trasmetto a **10 kV** basta **$I = 1$ A**, riducendo di 10^4 la potenza dissipata.

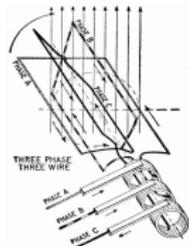
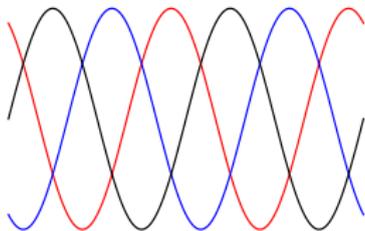
Però vendere corrente ad alto voltaggio ucciderebbe i clienti. Va trasformata a basso voltaggio. È possibile farlo usando l'induzione magnetica $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ che necessita di correnti alternate (la corrente continua darebbe $\Phi_B = \text{cte}$).

Guerra delle correnti (1880-1890)

Per i minori di costi di trasporto la tecnologia della corrente alternata ha vinto su quella della corrente continua, sostenuta da Edison, ma che riusciva a venderla solo fino ad 1 km dalla centrale. A New York non erano contenti di avere una centrale a carbone. Westinghouse e Tesla proposero la corrente alternata. Edison fece una campagna di boicottaggio sottolineando il pericolo dell'alta tensione, brevettò la sedia elettrica, uccise **Topsy**, perse e venne cacciato dalla Edison General Electric che diventò General Electric.

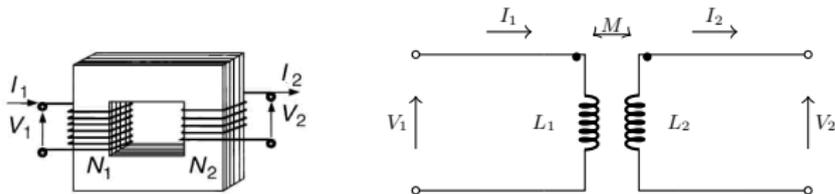
Tesla ed altri ottimizzarono con la **corrente trifase** che non necessita di cavi di ritorno: fattore 2 guadagnato in energia trasportata, B ruotanti...

$$\sum_{k=1}^N \sin(\theta + 2\pi k/N) = 0 \quad N = 3$$



Trasformatore

Due circuiti vengono avvolti N_1 ed N_2 volte attorno ad un magnete toroidale di lunghezza ℓ : dentro $B = \mu(N_1 I_1 + N_2 I_2)/\ell$.



I coefficienti di auto-induzione valgono:

$$L_1 = \frac{\Phi_{B1}(I_1)}{I_1} = \frac{\mu S N_1^2}{\ell}, \quad L_2 = \frac{\Phi_{B2}(I_2)}{I_2} = \frac{\mu S N_2^2}{\ell}.$$

La mutua induzione M viene simmetrica e massima, $M^2 = L_1 L_2$

$$M = \frac{\Phi_{B2}(I_1)}{I_1} = \frac{\Phi_{B1}(I_2)}{I_2} = \frac{\mu S N_1 N_2}{\ell}.$$

Trasformatore ideale

Consideriamo il limite $N_1 \gg N_2$ in cui il primario comanda ed il secondo riceve:

$$-\mathcal{E}_1 \approx L_1 \dot{I}_1, \quad -\mathcal{E}_2 \approx M \dot{I}_1$$

In questo limite $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 = M/L_1 = N_2/N_1$.

In realtà c'è un sistema di equazioni accoppiate: i circuiti si influenzano a vicenda. Senza risolvere il sistema completo, è chiaro che il trasformatore funziona solo quando vicino al limite ideale. Se M è invece molto più piccolo, l'effetto magnetico, lungi da funzionare, diventa trascurabile.

Supponiamo di voler trasformare una corrente alternata a $\omega = 2\pi \cdot 50\text{Hz}$ da $\mathcal{E}_1 = 60\text{ kV}$ a $\mathcal{E}_2 = 220\text{ V}$ per una potenza domestica $W = \mathcal{E}I = 3\text{ kW}$. Serve

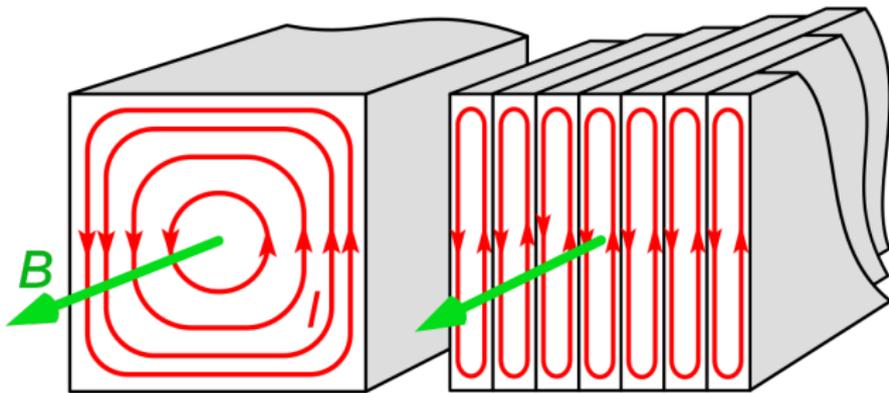
$$I_1 = \frac{W}{\mathcal{E}_1} = 0.05\text{ A} \quad M \approx \frac{\mathcal{E}_2}{\omega I_1} \approx 14\text{ Henry} \quad L_1 \approx \frac{\mathcal{E}_1}{\omega I_1} \approx 3400\text{ Henry}.$$

Realizzabile con $S = 0.01\text{ m}^2$, $\ell = 0.1\text{ m}$, $\mu_r = N_1 = 3000$, $N_2 = N_1 \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \sim 11$

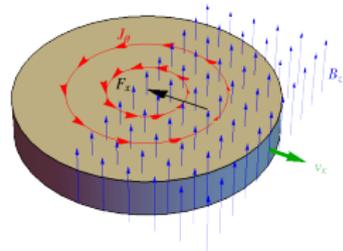
$$M = \frac{\mu S N_1 N_2}{\ell} \sim 14\text{ Henry}, \quad L_1 = \frac{\mu S N_1^2}{\ell} \sim 3400\text{ Henry}.$$

Correnti parassite

Siccome $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ nascono \mathbf{E} 'ruotanti' che generano **correnti parassite** $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ che dissipano energia per effetto Joule $W_J = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ riscaldando i trasformatori. Ridotte mettendo lamine di ferro separate da isolanti.



Altro effetto: quando un ferromagnete entra in B Lenz genera correnti parassite J . La forza magnetica su J agisce come attrito. Usate come freno per ruote di treni.



Effetto pelle

Parallelamente alla superficie di un semipiano metallico con permeabilità magnetica μ e conducibilità σ viene generato un campo magnetico oscillante

$$B_y = B_0 \cos \omega t = \Re B_0 e^{-i\omega t}.$$

B_y genera $E_z(x)$ che genera J_z che corregge $B_y(x)$:

$$\begin{cases} \partial H_y / \partial x = (\nabla \times \mathbf{H})_z = J_z = \sigma E_z \\ \partial E_z / \partial x = -(\nabla \times \mathbf{E})_y = \dot{B}_y = \mu \dot{H}_y \end{cases}$$

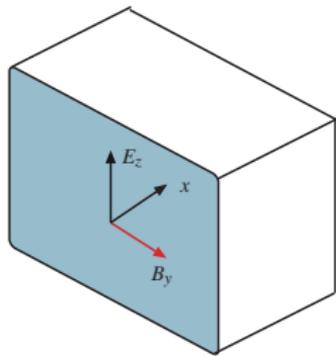
Eliminando E_z , 'equazione di diffusione' per H_y :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad \text{A regime: } \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = -k^2 H_y \quad \text{con} \quad k^2 \equiv i\omega\mu\sigma$$

quindi $k = (1 + i)/\delta$ con $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$. Soluzione a regime:

$$H_y(x, t) = \Re \frac{B_0}{\mu_0} e^{-i\omega t - kx} = \frac{B_0}{\mu_0} e^{-x/\delta} \cos\left(\frac{x}{\delta} + \omega t\right).$$

B entra per la 'lunghezza di pelle' δ , venendo dissipato da correnti parassite. In un filo $J_z = \sigma E_z$ produce B_θ che spinge cariche all'esterno (corregge E e quindi J) aumentando la resistenza R se lo spessore è $\sim \delta$ (esercizio 201).



Corrente di spostamento

Riassunto del corso in 6 equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ 2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ 3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ 4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \end{array}$$

“ B genera E .”

(Più equazioni approssimate per la materia)

Inconsistenza

Le 6 equazioni fondamentali si contraddicono

Esempi pratici:

- Condensatore con $Q(t)$: $I = \dot{Q}$ nei fili, deve esistere un B . Applicando

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

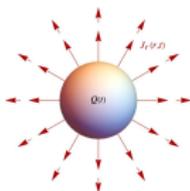
si trova che I_{conc} dipende da quale superficie uno sceglie: $I_{\text{conc}} = I$ sui lati, ma 0 fra i piatti.



- Scarica di un filo carico: $I = -x\lambda$ dipende dalla posizione. $I_{\text{conc}} = ?$.



- Scarica di sfera in conduttore: per simmetria J_r deve produrre B_r che però ha rotore zero.
- Moto di una carica. $I_{\text{conc}} = 0$ a meno che la superficie non intersechi q .



Corrente di spostamento

In generale: la divergenza della dubbia IV equazione, usando $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}' \times \mathbf{B}) = (A_y A'_z - A_z A'_y) B_x + (A_z A'_x - A_x A'_z) B_y + (A_x A'_y - A_y A'_x) B_z = A_i A'_j B_k \epsilon_{ijk}$$

implica $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Incompatibile con la conservazione della carica $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dot{\rho}$.

Una teoria inconsistente ha funzionato abbastanza. In fisica serve meno rigore che in matematica perché c'è una seconda gamba, l'esperimento. Ormai siamo nel bacino di attrazione della teoria giusta, ci si arriva matematicamente.

Maxwell nel 1863 (quando c'era ancora confusione fra e.m. esatto nel vuoto ed e.m. approssimato nella materia) rimediò modificando la IV equazione in

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_S) \quad \mathbf{J}_S = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

la cui divergenza **implica** la conservazione della carica, grazie a $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Il nuovo effetto fisico predetto è chiamato **corrente di spostamento** \mathbf{J}_S perché appare quando si spostano cariche e quindi $\dot{\mathbf{E}} \neq 0$. Equivalente integrale:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(I_{\text{conc}} + \epsilon_0 \dot{\Phi}_E)$$

Riassunto del corso in 5 equazioni

Quale parte di...

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ 2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ 3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ 4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

...non avete capito?

Implicano la conservazione della carica elettrica, non serve la 6a equazione.

(Più equazioni approssimate per la materia)

Corrente di spostamento: esempi

Sfera carica in materiale con conducibilità σ . La corrente ha simmetria sferica: $J_r = \sigma E_r = \sigma Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Per simmetria sferica non può nascere alcun campo magnetico. Ed infatti $J_r + \epsilon_0 \dot{E}_r = (\sigma - \epsilon_0/\tau)E_r = 0$ in quanto $\tau = \epsilon_0/\sigma$.

In un conduttore generico con σ cte che si scarica come $e^{-t/\tau}$ con $\tau = \epsilon_0/\sigma$:

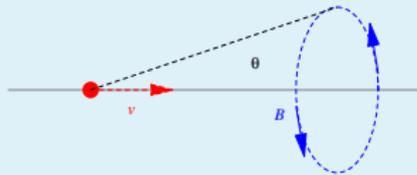
$$\mathbf{J} + \mathbf{J}_S = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$$

Carica q in moto con $v \ll c$. In prima approssimazione \mathbf{E} è radiale. Genera

$$2\pi r B_\theta = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 q \frac{d}{dt} \frac{1 - \cos \theta(t)}{2} = \frac{\mu_0 q v r^2}{2(r^2 + (x - vt)^2)^{3/2}}$$

Riduzionismo: una fila di cariche riproduce il campo di una corrente $I = \lambda v$:

$$B_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dx \mu_0 v r}{4\pi[r^2 + (x - vt)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Corrente di spostamento: esempi

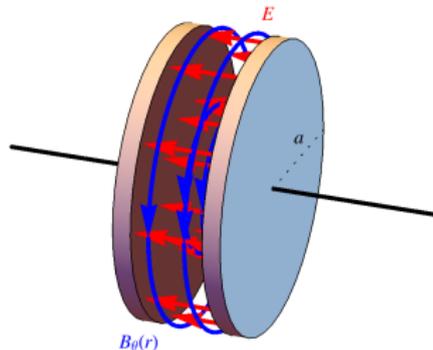
Condensatore con $Q(t)$ e.g. $Q_0 e^{-t/\tau}$ o $Q_0 \cos \omega t$.

La corrente di spostamento vale $J_s = \epsilon_0 \dot{E} = \dot{\sigma}$,

$$I_s = \Phi_{J_s} = S \epsilon_0 \dot{E} = S \dot{\sigma} = \dot{Q} = I.$$

Dentro i piatti J_s genera

$$B_\theta(r) = \frac{\pi r^2 \mu_0 J_s}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r I}{2S} \quad \text{per } r < a.$$



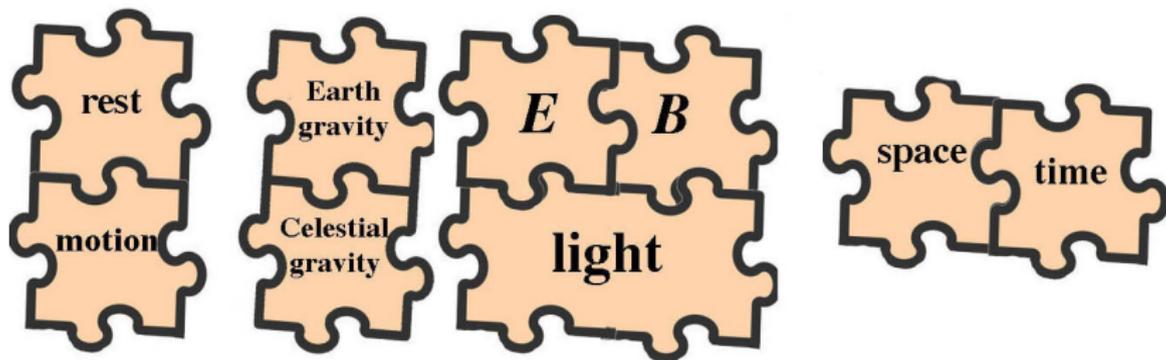
Energia magnetica:

$$U_B = \int dV \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{d\mu_0 I^2}{16\pi}, \quad U_E = V \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \frac{U_B}{U_E} = \frac{1}{8} \left(\frac{a}{c\tau} \right)^2 \quad \tau = \left| \frac{Q}{\dot{Q}} \right|$$

L'energia magnetica è importante se Q varia in modo significativo nel tempo che la luce attraversa l'apparato. In tal caso occorre risommare $E \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B \dots$ o risolvere Maxwell trovando $E \propto J_0(\omega r/c)$. Nuovo fenomeno...

“ E che genera B che genera E che genera B che genera E che genera B ...”
Non si sa più chi ha iniziato. Campi B, E senza nessuna sorgente!?”

Onde elettromagnetiche



Onda piana nel vuoto

Cerchiamo una soluzione in cui E e B dipendono da x, t ma non da y, z .
Le 4 eq. di Maxwell nel vuoto diventano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}, & 0 &= \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial B_y}{\partial x} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Quindi E_x, B_x sono costanti, e possiamo metterli a zero perchè non descrivono fisica interessante. Le altre equazioni possono essere riscritte come

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W = 0 \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad W = \{E_y, E_z, B_y, B_z\}$$

Equazione d'onda

È l'equazione delle onde, risolta da due onde che vanno una avanti ed una indietro a velocità c , con forma descritta da due funzioni generiche f e g :

$$W(x, t) = f_W(x - ct) + g_W(x + ct)$$

come si verifica passando alle variabili $u = x - ct$, $v = x + ct$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

nelle quali l'equazione delle onde diventa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W = 4 \frac{\partial W}{\partial u \partial v} = 0.$$

Trucco matematico simile: in 2 dimensioni

$$\nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 4 \frac{\partial \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

dove $z = x + iy$. Risolto quindi da $\varphi = f(z) + g(\bar{z})$.

Onda piana nel vuoto

Combinando le equazioni abbiamo perso un po' di informazione. Imponendo Π_z ($\partial_t B_z = -\partial_x E_y$) si trova che B_z è legato ad E_y come:

$$E_y = f_y(x - ct) + g_y(x + ct) \quad \Rightarrow \quad B_z = \frac{1}{c} f_y(x - ct) - \frac{1}{c} g_y(x + ct)$$

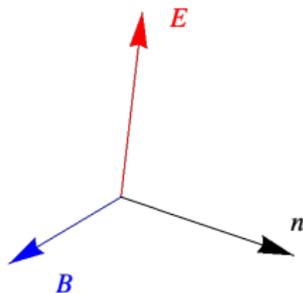
a meno di una funzione $\delta B_z(x)$ che deve valere zero per via della IV eq. di Maxwell. Prendendo solo l'onda in avanti si trova:

$$\begin{cases} E_y = f_y(x - ct) \\ E_z = f_z(x - ct) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B_y = -E_z/c \\ B_z = +E_y/c \end{cases}$$

In notazione vettoriale questo significa

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$$

Per una generica onda piana \mathbf{E} e \mathbf{B} sono ortogonali fra di loro ed alla direzione di propagazione, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ nei conti attuali. Le equazioni di Maxwell sono risolte da onde con **polarizzazione** trasversa alla direzione del moto.



Onde piane nel vuoto

Il conto può essere ripetuto in notazione vettoriale: usando l'identità

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

nel vuoto $\rho = \mathbf{J} = 0$ si ottiene il d'Alambertiano \square^2 :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

e la stessa equazione per \mathbf{B} :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Per via del teorema di Fourier hanno interesse **onde piane** infinite della forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

dove il **vettore d'onda** \mathbf{k} è legato alla **pulsazione** ω dalla **relazione di dispersione** $\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2$. Polarizzazione trasversa alla direzione del moto $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$:

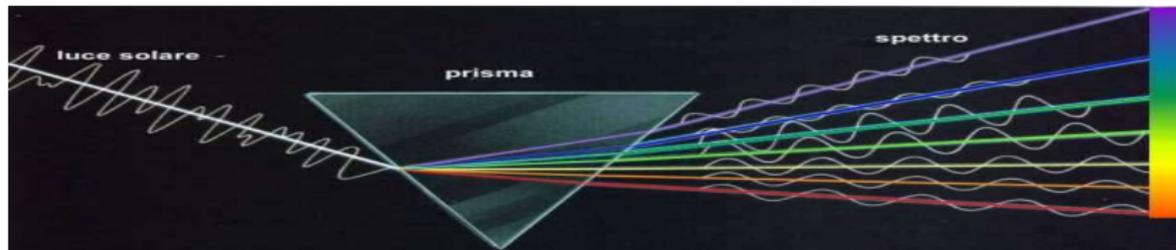
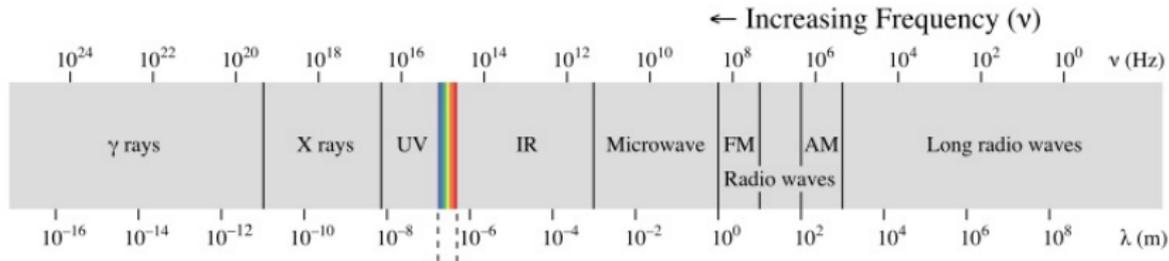
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \quad c\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} .$$

Spettro in frequenza

Si definiscono **lunghezza d'onda** λ e **frequenza** $\nu = 1/T$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \omega = 2\pi\nu \quad c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}.$$

Sono il colore fra **400 nm (blu)** e **700 nm (rosso)** $\gg \text{\AA}$. Bianco = spettro. Onde invisibili: e.g. $\nu \sim 10^6$ Hz trasmettono circa 10^6 bit/s: usate per radio.

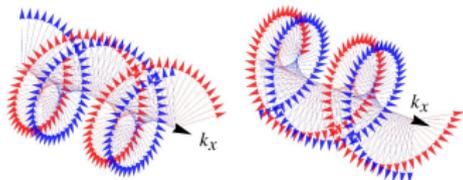
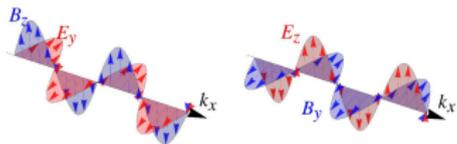


Polarizzazioni

Ci sono due luci! Si usa la notazione complessa: $\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$.
Polarizzazione **lineare** per $\hat{\mathbf{k}} = (1, 0, 0)$:

$$\mathbf{E}_0 = E_0(0, \sin \theta, \cos \theta) \quad \text{orizzontale/verticale}$$

(in Italia i segnali TV sono trasmessi con \mathbf{E} orizzontale, in UK con \mathbf{E} verticale).



Polarizzazione **circolare**: $\mathbf{E}_0 = E_0(0, 1, \pm i)/\sqrt{2}$ Left/Right

Polarizzazione generale **ellittica** $\mathbf{E}_0 = E_0(0, \cos \theta, e^{i\delta} \sin \theta)$:



Alcuni materiali fanno passare solo una polarizzazione.

Interferenza: le onde si sommano: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

L'energia no: $u \neq u_1 + u_2$. Ad esempio $u_1 = u_2$ può dare $0 < u < 4u_{1,2}$!

Luce parzialmente polarizzata

Un'onda $\mathbf{E} = \Re \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ ha polarizzazione data, $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}$. Ad esempio

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{lineare } x & \mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & \text{circolare } L \text{ o elicità } + \\ \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{lineare } y & \mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} & \text{circolare } R \text{ o elicità } - \end{array}$$

Sovrapponiamo due onde con \mathbf{E} polarizzato lungo \mathbf{e}_x e \mathbf{e}_y : se differenza di fase $\delta = 0$ danno un'onda con polarizzazione lineare storta $E_{0x}\mathbf{e}_x + e^{i\delta}E_{0y}\mathbf{e}_y$. Ed una ellittica se $\delta \neq 0$. La luce del sole è non polarizzata. Come fa? Un'onda non polarizzata si ottiene se “la fase relativa $\delta(t)$ varia nel tempo”. In analisi di Fourier significa uno spettro non monocromatico e.g. $\omega_1 \neq \omega_2$.

È utile descriverla tramite la **matrice densità** ed i parametri di Stokes:

$$\rho_{ij} = e_i^* e_j, \quad \rho = \begin{pmatrix} e_x^* e_x & e_y^* e_x \\ e_x^* e_y & e_y^* e_y \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U + iV \\ U - iV & I - Q \end{pmatrix}$$

con $I =$ intensità totale, etc. Infatti due onde si sovrappongono come

$$W_{\text{tot}} \rho_{\text{tot}} = W_1 \rho_1 + W_2 \rho_2 \quad W_{\text{tot}} = W_1 + W_2$$

in quanto l'energia è data da moduli quadri

$$|\mathbf{E}_{\text{tot}}|^2 = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\Re \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t].$$

Per $\omega_1 \neq \omega_2$ il termine misto si media a zero, ed è possibile ottenere luce parzialmente polarizzata o anche non polarizzata, $\rho = \frac{1}{2} \text{diag}(1, 1)$.

Onde 'sferiche' nel vuoto

Cerchiamo soluzioni delle equazioni nel vuoto che dipendono da r, t

$$\square^2 \mathbf{E} = 0, \quad \square^2 \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{etc.}$$

Ogni componente W di \mathbf{E} e \mathbf{B} soddisfa a $\square^2 W = 0$. In coordinate polari

$$\nabla^2 W = W'' + 2 \frac{W'}{r} = \frac{(rW)''}{r}.$$

Definendo $u(r) \equiv rW(r)$ si ottiene l'equazione $1d u'' - \ddot{u}/c^2 = 0$ risolta da

$$W(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r} \quad W = \{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$$

dove f, g sono funzioni arbitrarie. Ignoriamo la soluzione 'entrante' $g(t + r/c)$. Sorgenti puntiformi generano onde sferiche uscenti: in seguito discuteremo come ed i dettagli delle polarizzazioni trasverse (no simmetria sferica).

A grande distanza i.e. in piccolo con le onde sferiche si riducono a onde piane.

La propagazione senza distorsioni (solo f , no rf') è speciale in $d = 3 + 1$.

Un'onda sferica ha componenti di \mathbf{E} o $\mathbf{B} \propto 1/r$: $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ con $\mathbf{S} \propto \mathbf{E} \times \mathbf{B} \dots$

Teorema di Poynting

Dimostrato dal **teorema di Poynting**, che ha la forma di un'equazione di conservazione **locale** per l'energia, che in parte esce ed in parte diventa meccanica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

dove

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

e

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$$

è detto vettore di Poynting. Dimostrazione:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

Primo passaggio: o $\nabla = \nabla_E + \nabla_B$ poi permutazioni, o in componenti.

Per un'onda piana \mathbf{S} è diretto lungo la direzione di propagazione e vale

$$u = \epsilon_0 E^2 \quad \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad \mathbf{S} = c \epsilon_0 E^2 \hat{\mathbf{k}} = c \hat{\mathbf{k}} u, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = c \hat{\mathbf{k}} \langle u \rangle$$

quindi l'energia u viene trasportata a velocità c , come era naturale aspettarsi.

Per un'onda sferica nel vuoto, $S_r \propto 1/r^2$. Unificazione: le stelle sono soli 10^9 meno luminosi perché $10^{4.5}$ volte più lontani [G. Bruno 1600, parallasse 1838].

Vettore di Poynting: esempio

Condensatore con $Q(t)$ lentamente variabile:

$$E_z = \frac{Q}{S\epsilon_0} \quad B_\theta = \frac{r\dot{E}_z}{2c^2}.$$

Energia in un cilindro di raggio r arbitrario:

$$U \simeq U_E = (\pi r^2 h) \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \dot{U} = \pi r^2 h \epsilon_0 E_z \dot{E}_z$$

Vettore di Poynting ($\hat{z} \times \hat{\theta} = -\hat{r}$):

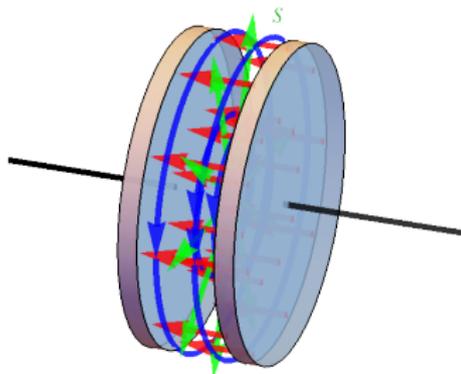
$$S_r = -\epsilon_0 c^2 E_z B_\theta = -\frac{r}{2} \epsilon_0 E_z \dot{E}_z$$

Bilancio energetico:

$$\Phi_S = 2\pi r h S_r = -\dot{U}$$

Filo resistivo di lunghezza ℓ : $E_z = V/\ell$; $J_z = \sigma E_z$ dissipa $W_J = \ell \cdot \pi r^2 J_z E_z$, genera $B_\theta = \mu_0 J_z \pi r^2 / 2\pi r$; $S_r = -r J_z E_z / 2$ ha flusso $\Phi_S = -\ell \pi r^2 J_z E_z = -W_J$.

In un **solenoid** rettilineo lungo avviene lo stesso con $E \leftrightarrow B$. Contiene un $B_z = \mu_0 n I$ e quindi un $E_\theta = -\dot{B}_z r / 2$. Il vettore di Poynting vale $S_r = -B_z \dot{B}_z r / 2\mu_0$. L'energia vale $U \simeq U_B = \pi r^2 h B_z^2 / 2\mu_0$, $\dot{U} = \pi r^2 h B_z \dot{B}_z / \mu_0$, $\Phi_S = 2\pi r h S_r = -\dot{U}$.



Impulso del campo elettromagnetico

Le forze magnetiche fra due cariche non sono uguali e opposte se $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$!
 Esprimendo ρ e \mathbf{J} in funzione dei campi e facendo passaggi vari si dimostra che

$$\frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{p}_{\text{mat}}}{dV} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \dots = \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

Quindi il campo ha densità di impulso $\mathbf{g} \equiv d\mathbf{p}_{\text{em}}/dV = \mathbf{S}/c^2$ trasportato come

$$T_{ij} = \epsilon_0(E_i E_j - \delta_{ij} E^2/2) + (B_i B_j - \delta_{ij} B^2/2)/\mu_0 \quad \text{“tensore degli stress”}.$$

E ha momento angolare $d\mathbf{L}_{\text{em}}/dV = \mathbf{r} \times \mathbf{g}$. Per un'onda $S = cu$ quindi $g = u/c$.
 Onde ellittiche hanno momento angolare, andando oltre il limite di onda piana.
 Verifica: onda che incide su una carica q . La carica riceve energia da \mathbf{E}

$$U = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = q \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

e impulso dal campo magnetico (il \mathbf{p} ceduto da E si media a zero in un periodo)

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt = q \int \mathbf{v} \times \underbrace{\left(\frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{E}\right)}_{\mathbf{B}} dt = \frac{q}{c} \int [\mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) - \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}_{\text{cte}}] dt = \frac{U}{c} \mathbf{n}.$$

Teorema di Noether

La conservazione dell'energia e dell'impulso è ottenuta con trucchi. C'è un modo sistematico: Noether nel 1915 dimostrò che per ogni simmetria continua dell'azione $\mathcal{S} = \int dt L$ c'è una costante del moto, ben definita. Per un $q(t)$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) \delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q$$

Invarianza per traslazioni temporali \Rightarrow energia

Invarianza per traslazioni spaziali \Rightarrow impulso

Invarianza per rotazioni \Rightarrow momento angolare

Vale anche in teoria di campo $\mathcal{S} = \int d^3x dt \mathcal{L}$, che è come avere infiniti gradi di libertà $q(t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$.

Inoltre l'e.m. avrà simmetria relativistica che unifica energia con impulso.

Esempio: luce solare

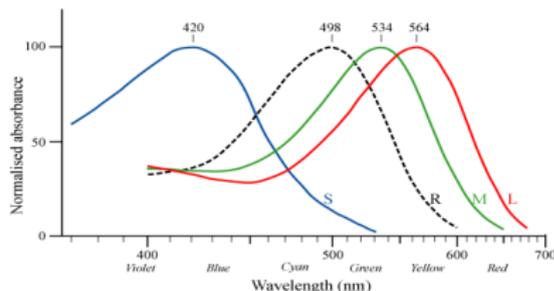
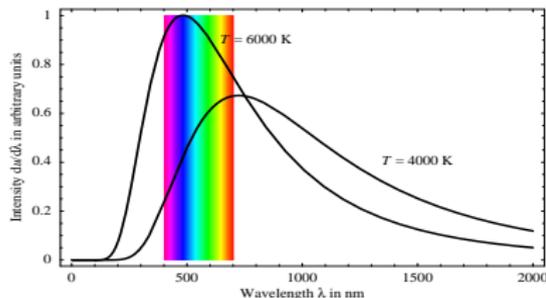
La luce solare fornisce una potenza totale $K_{\odot} = 1366 \text{ J/m}^2\text{s}$. Quindi $\langle S \rangle = K_{\odot}$.
Pressione \wp , densità di energia u , densità di impulso g valgono

$$\langle \wp \rangle = c \langle g \rangle = \langle u \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = 4.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 4.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad g = 1.5 \cdot 10^{-14} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

\wp aiuta ad evitare collasso gravitazionale del sole e navigazione spaziale. Campi:

$$E_0 = 1014 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.38 \cdot 10^{-6} \text{ Tesla.}$$

Spettro continuo di frequenze (corpo nero a $T_{\text{sup}} \sim 6000 \text{ K}$) piccato sul visibile:



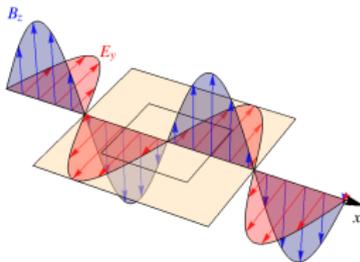
Lampadina termica: 4000 K (+giallo, -UV), $\epsilon \sim 1\%$. Candela, $\epsilon \sim 0.05\%$.

Lumen \equiv (potenza Φ_S emessa nel visibile a 555 nm in W)/683.

Occhio ai **colori invisibili**.

Ricezione di onde

Un circuito quadrato di lato ℓ nell'asse xy è attraversato da un'onda che si propaga lungo x con lunghezza d'onda λ ed E_0 lungo y . Calcolare la fem. Può essere calcolata usando \mathbf{E} o \mathbf{B} in quanto l'onda risolve $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Consideriamo $\ell = \lambda/2 \sim \text{m}$ per radio i.e. $k\ell = \pi$ (quadrato piccolo nella figura):



$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \ell[E_y(x = \ell) - E_y(x = 0)] = \\ &= \ell E_0 \left[\sin(k\ell - \omega t) - \sin(-\omega t) \right] \\ &= E_0 \lambda \sin \omega t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\dot{\Phi}_B \\ \Phi_B &= \int dS B_z \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\lambda/2} dx B_0 \sin(kx - \omega t) \\ &= \frac{B_0 \lambda^2}{2\pi} \cos \omega t\end{aligned}$$

Sono uguali, come si verifica usando $\omega = 2\pi c/\lambda$ e $E_0 = cB_0$. Per ℓ generico:

$$\mathcal{E} = E_0 \ell \sin \frac{\pi \ell}{\lambda} \sin(\omega t + \varphi), \quad \langle \mathcal{E}^2 \rangle_t = \frac{E_0^2 \ell^2}{2} \sin^2 \frac{\pi \ell}{\lambda} \quad \text{massima per } \ell = \frac{\lambda}{2}.$$

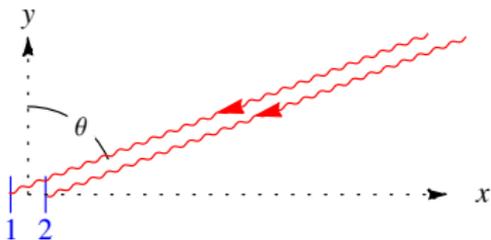
Se $\ell \ll \lambda$ riceve meglio un'antenna lineare in cui $\mathcal{E}_{\text{lin}} = \ell E \gg \ell \Delta E$. Questa geometria è più pratica, ma è più complicato calcolare la corrente indotta.

Da dove arriva l'onda?

Misura rozza: la potenza ricevuta da un'antenna è $\propto \cos^2 \theta$ dove

- Circuito come antenna: θ è l'angolo fra la normale e \mathbf{B} .
- Antenna lineare: θ è l'angolo fra l'antenna e \mathbf{E} .

Due (o più) antenne consentono di misurare più precisamente la direzione: l'antenna più vicina riceve prima. Esempio: due antenne a distanza $\Delta x = d$ ricevono un'onda piana con differenza di fase



$$\delta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta.$$

Se si può misurare δ con precisione di ordine 1, si deduce θ con precisione λ/d .

- A frequenze alte si utilizza la fisica: l'interferenza è sensibile a $\delta \sim 1$. È quello che fanno strumenti ottici nel visibile.
- A frequenze basse si può misurare δ anche meglio confrontando i segnali (computers arrivano a qualche GHz).

Onde nella materia

Onde in dielettrico

Conto semplice nasconde fisica complicata: ogni atomo investito da onda **irraggia** onde secondarie. In un dielettrico lineare l'effetto collettivo è la propagazione di una sola onda modificata i.e. trasparenza.

In un dielettrico con $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e $\mu = \mu_r \mu_0$ costanti, le equazioni hanno forma uguale a quelle nel vuoto ma con $v^2 = 1/\epsilon\mu$. Si definisce l'**indice di rifrazione**

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad v = \frac{c}{n}$$

Di solito $\mu = \mu_0$ e $\epsilon > \epsilon_0$, quindi $v < c$.

$u = \epsilon E^2/2 + B^2/2\mu$ e $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu$ si comportano analogamente al vuoto. Ora u contiene l'energia che va a polarizzare il materiale.

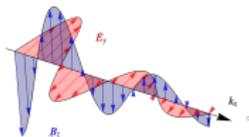
In acqua $\epsilon_r \approx 80$ ma $n_{\text{visibile}} \approx 1.33 \neq \sqrt{80}$. Complicazione necessaria: $\hat{\epsilon}(\omega)$.

Onde in conduttore

Un conduttore si scarica con $\tau = \epsilon/\sigma$: attenuazione onde dipende da ω vs $1/\tau$. Inserendo $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ nella IV equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu(\sigma\mathbf{E} + \epsilon\dot{\mathbf{E}})$ a regime $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ si riduce all'equazione nel vuoto con $\epsilon \rightarrow \hat{\epsilon} \equiv \epsilon + i\sigma/\omega$. Equazione d'onda: $(\nabla^2 + \hat{\epsilon}\mu\omega^2)\hat{\mathbf{E}} = 0$. Onde piane $e^{i(kx - \omega t)}$ hanno k complesso: **attenuazione** dell'onda dovuta all'energia dissipata da correnti parassite:

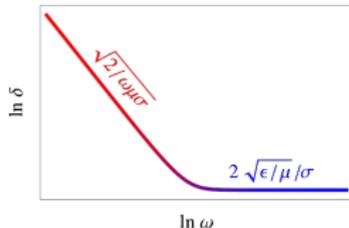
$$E \propto e^{ikx} \ni e^{-x/\delta} \quad \text{con} \quad k^2 = \hat{\epsilon}\mu\omega^2 = \epsilon\mu\left(\omega^2 + \frac{i\omega\sigma}{\epsilon}\right)$$

$$B = kE/\omega \text{ sfasato}$$



Definendo $\omega_{cr} = \sigma/\epsilon$ la lunghezza di pelle vale

$$\delta \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} & \text{per } \omega \ll \omega_{cr} \\ \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} & \text{per } \omega \gg \omega_{cr} \end{cases} = \frac{\lambda_{cr}}{\pi} \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_{cr}}{\omega}} \\ 1 \end{cases} =$$



Onde nella materia: esempi

Tipico metallo, ad esempio il rame a 300 K: $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 / \Omega\text{m}$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Pulsazione critica: $\omega_{\text{cr}} = \sigma / \epsilon = 6.6 \cdot 10^{18}$ Hz cade nei raggi X.

Alte frequenze: $\delta = \delta_{\text{min}} = \lambda_{\text{cr}} / \pi \sim 0.1$ nm. O anche usando $\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \approx 377 \Omega$.

Basse frequenze: luce visibile ($\omega \sim 10^{16}$ Hz) viene riflessa da $\delta \sim 6$ nm.

Basse frequenze: le micro-onde ($\omega = 1.5 \cdot 10^{10}$ Hz) da $\delta \sim \mu\text{m}$.

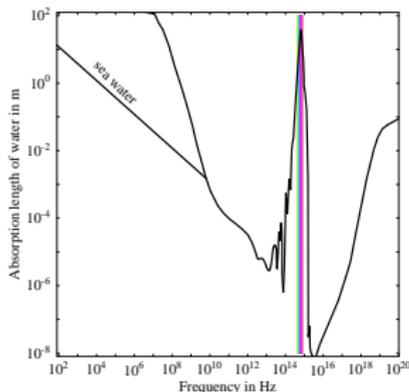
Lamine di alluminio nella stratosfera possono riflettere la luce solare e trasmettere quella terrestre

Acqua di mare: $\sigma \sim 4 / \Omega\text{m}$, $\epsilon \sim 80\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$. $\omega_{\text{cr}} = \sigma / \epsilon \sim 10^{10}$ Hz cade nelle micro-onde che penetrano per $\delta_{\text{min}} \sim 1$ cm. Per trasmettere a sottomarini servono frequenze basse, e quindi si parla lento: $\delta = 8$ m a $\omega = 1$ kHz.

Ma la luce visibile ha grosso $\omega \sim 10^{16}$ Hz.

Perché sott'acqua c'è luce visibile?

Per ω comparabili alle frequenze degli atomi bisogna tenere in conto la loro struttura e gli effetti di materia sono descritti da una **relazione di dispersione $\hat{\epsilon}(\omega)$ complesso**, con picchi per ω vicina alle frequenze di risonanza della molecola. Il visibile è dove l'acqua trasmette bene: $n_{\text{acqua}} = 1.33$.



Dispersione in un materiale

Servirebbe meccanica quantistica. Approssimiamo legame elastico di elettrone in atomo $m_e[\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x}] = -e\mathbf{E}$. Dipolo a regime ottenuto da $d/dt = -i\omega$:

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{x} \equiv \alpha\epsilon_0\mathbf{E}, \quad \text{polarizzabilità} = \alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}$$

Usando Clausius-Mossotti che nei gas si riduce a $\chi \simeq P/\epsilon_0 E \simeq n_e \alpha$ con $\mathbf{P} = n_e \mathbf{p}$:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \frac{1 + 2n_e \alpha / 3}{1 - n_e \alpha / 3} \simeq \epsilon_0 (1 + n_e \alpha).$$

La costante dielettrica è complessa, dipende da ω esibendo picchi sulle risonanze

$$\hat{n}^2 \equiv \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_r \frac{f_r}{\omega_{0r}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_r}$$

Scrivendo $\hat{n} = n_R + in_I$ si ha $E \propto e^{i\omega(t - \hat{n}x/c)} = e^{-x/\delta} e^{i\omega(t - n_R x/c)}$ con $\delta = c/\omega n_I$. L'assorbimento è massimo attorno alle righe spettrali. E.g. saturazione CO₂. Se gli e sono tutti molto legati, $\omega_{0r} \gg \omega$: serie $n \simeq 1 + A(1 + \omega^2 B/4\pi^2 + \dots)$.

Propagazione in un plasma

Propagazione della luce in un materiale con densità n_e di elettroni liberi: $\omega_0 \rightarrow 0$.
A basse frequenze si ritrova il modello di Drude con tempo fra gli urti $\tau \rightarrow 1/\gamma$:

$$\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e (-i\omega\gamma)} \equiv 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad \text{i.e.} \quad \text{conducibilità} = \sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \gamma}.$$

In un plasma di elettroni liberi senza attrito, $\omega_0, \gamma \rightarrow 0$:

$$n^2 = 1 - \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \quad \text{dove} \quad \omega_p \equiv \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 56 \text{ Hz} \sqrt{\frac{n_e}{1/\text{m}^3}}$$

è detta **frequenza di plasma** perché frequenza delle oscillazioni meccaniche.

- La luce solare di giorno ionizza l'aria nella ionosfera a $h \sim (100 - 500)$ km dove $n_e \sim 10^{10-12}/\text{m}^3$, $\omega_p \sim 10^{7-8}$ Hz: onde radio parzialmente 'riflesse'.
- Metalli contengono $n_e \sim 10^{20}/\text{m}^3$ elettroni liberi, quindi $\omega_p \sim 10^{12}$ Hz.

Per $\omega < \omega_p$ n è immaginario: le onde si attenuano su lunghezze $\delta = c/\omega_p$.

Per $\omega > \omega_p$ le onde si propagano con $n < 1$.

Ma $n < 1$ significa $v > c$?

Velocità di fase e velocità di gruppo

Un'onda monocromatica non trasmette informazione... Nel momento in cui la luce viene accesa non è monocromatica, $E \propto e^{i\omega t}$, e non avanza a $v = c/n$.

Consideriamo una generale **relazione di dispersione** $\omega(k) = ck/n(\omega)$ e (per semplicità) la sovrapposizione di due onde con eguali campi: si ottiene

$$\begin{aligned} E &= A[\sin(k_1 z - \omega_1 t) + \sin(k_2 z - \omega_2 t)] \\ &= 2A \cos\left[\frac{k_1 - k_2}{2}z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right] \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2}z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right] \end{aligned} = \text{img}$$

un'onda corta che si muove alla **velocità di fase** $v_f = \omega/k = c/n$ modulata da un'onda lunga che trasmette energia/informazione alla **velocità di gruppo**

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \Rightarrow \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}.$$

Nel vuoto $v_f = v_g = c$. In un materiale con n costante, $v_f = v_g = c/n$.

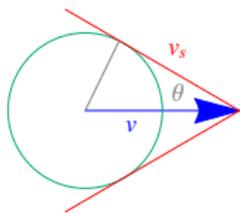
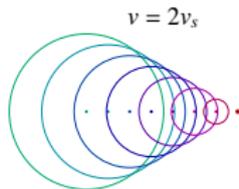
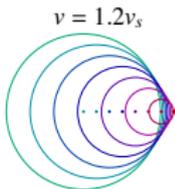
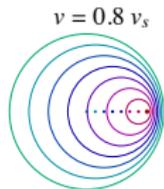
In un plasma per $\omega \gg \omega_p$ si ha $v_f > c$: simile a puntare un laser sulla luna producendo un cartone animato che **sembra** muoversi più veloce della luce

$$v_f = \frac{c}{n} \simeq c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) > c, \quad v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \simeq c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) < c.$$

Effetto Cherenkov

Analogo elettromagnetico del cono di Mach per il suono: una sorgente che emette onde di velocità v_s in moto con $v > v_s$ forma un cono di angolo

$$\cos \theta = v_s/v.$$



La luce si propaga con $v_s = c/n$ e $v < c$, quindi $\cos \theta = c/nv < 1/n$. Nell'acqua $n = 1.33$: elettroni in moto con $E > 0.26 \text{ MeV}/c^2$ fanno coni con $\theta \geq 41.2^\circ$.

Ottica

Ottica

Non è possibile vedere oggetti più piccoli di λ , ma su scale più grosse la luce si comporta come raggi. L'elettromagnetismo implica tutte le leggi dell'ottica... Per semplificare: spazio diviso in regioni: vuoto, conduttori, dielettrici...

Condizioni di raccordo sul bordo fra due **dielettrici e/o diamagnetici**:

$$\Delta D_{\perp} = 0, \quad \Delta E_{\parallel} = 0, \quad \Delta B_{\perp} = 0, \quad \Delta H_{\parallel} = 0$$

Valgono se il bordo è molto più sottile di λ , altrimenti è più complicato.

Condizioni sul bordo fra **vuoto ed un conduttore** perfetto $\sigma = \infty$:

$$E_{\parallel} = 0, \quad B_{\perp} = 0$$

Dentro deve essere $\mathbf{E} = 0$ e quindi $\mathbf{B} = 0$ in quanto $\dot{\mathbf{B}}$ genera \mathbf{E} .
Cariche e correnti di superficie generano $E_{\perp}, B_{\parallel} \neq 0$.

Riflessione

Inviando un'onda incidente si ottiene un'onda riflessa con $\omega_R = \omega_I$, $\theta_I = \theta_R$.

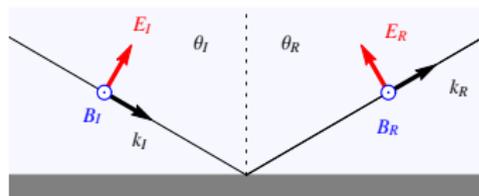
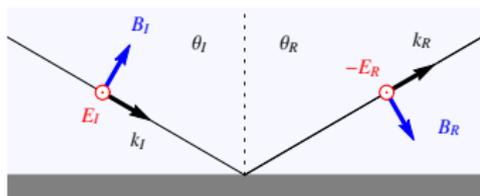
Condizioni al bordo $\forall t$ implicano che le onde I , R hanno la stessa ω .

Condizioni al bordo $\forall x$: le onde hanno lo stesso $k_{\parallel}^R = k_{\parallel}^I$. Quindi $k_{\perp}^R = -k_{\perp}^I$.

$E_{\parallel}^R + E_{\parallel}^I = 0$: onda incidente e riflessa hanno la stessa intensità.

\mathbf{E} parallelo al piano

\mathbf{B} parallelo al piano



Fra due specchi a distanza $d = n\lambda/2$ si possono avere **onde stazionarie**

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] = 2\mathbf{E}_0 \sin(kx) \sin(\omega t).$$

Consentono di misurare $c = d\omega_n/n\pi$.

Guide d'onda

Inclinando si ottengono onde in moto. Prendiamo guida rettangolare $\Delta x \times \Delta y$:

$$E_y = E_0 \sin(k_x x) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad k_x = \frac{n\pi}{\Delta x} \quad \text{con } n = 1$$

Sui bordi $E_{\parallel} = 0$. Soddisfa a $\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial E_y / \partial y = 0$. $\square^2 E_y = 0$ implica

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 / c^2.$$

k_x agisce come termine di massa: $\omega > \omega_c = \pi c / \Delta x$. TE_{10} è il modo TE o TM con frequenza critica minore. Soluzione completa: aggiungo un B_x trasverso

$$B_x = B_0 \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Soddisfa a $B_{\perp} = 0$ ma non ancora a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Serve anche B_z non trasverso:

$$B_z = i \frac{k_x}{k_z} B_0 \cos k_x x e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \frac{B_0}{E_0} = -\frac{k_z}{c}.$$

Utile per trasportare energia, che si propaga a $v_g < c < v_f$:

$$\langle u \rangle_{x,y,t} = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2, \quad \langle S_z \rangle_{x,y,t} = u \cdot v_g, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} < c.$$

Rifrazione: direzione

Come in due corde attaccate...

$$v_i^2 = \frac{1}{\epsilon_i \mu_0} \equiv \frac{c^2}{n_i^2}, \quad \frac{E_i}{B_i} = \frac{c}{n_i} = \frac{\omega}{k_i}$$

Condizioni al bordo $\forall t$ implicano che le onde I , R , T hanno la stessa ω .

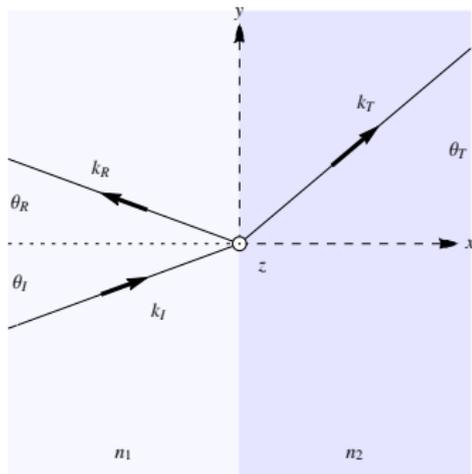
Condizioni al bordo $\forall y$: le onde hanno lo stesso

$$k_y \equiv k_y^I = k_y^R = k_y^T.$$

Moduli $k_i = n_i \omega / c$ quindi $k_I / k_R = 1$ ($\theta_R = \theta_I$) e $k_I / k_T = n_1 / n_2$: l'onda trasmessa si inclina

$$\sin \theta_T = \frac{k_y}{k_T} \quad \sin \theta_I = \frac{k_y}{k_I} \quad \Rightarrow \quad n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T.$$

Legge di Snell. "Riflessione interna totale" per $\sin \theta_I \geq n_2 / n_1$ se $n_1 > n_2$.
($v = c/n$: minimizza il tempo percorso, come per salvare in mare).



Intensità delle onde rifratte

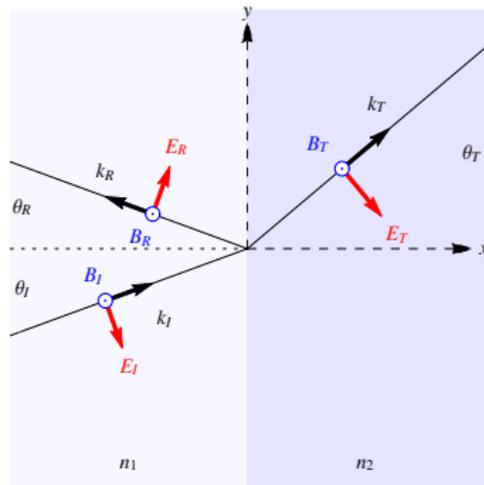
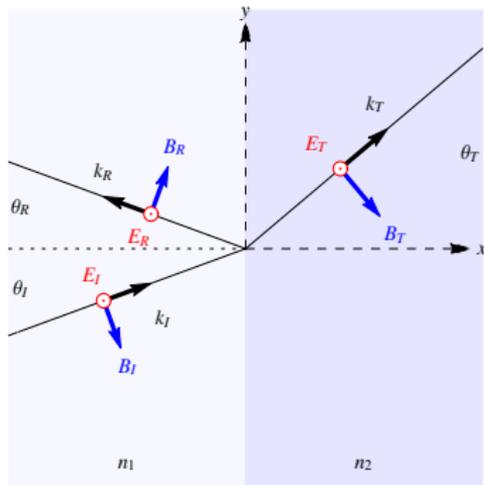
Le intensità delle onde R e T sono date dalle condizioni di raccordo

$$\Delta E_{\parallel} = 0, \quad \Delta D_{\perp} = 0, \quad \Delta \mathbf{B} = 0.$$

Dipendono dalla polarizzazione dell'onda incidente. Base conveniente:

\mathbf{E} parallelo al piano

\mathbf{B} parallelo al piano



Rifrazione: E parallelo al piano

Le condizioni di raccordo si riducono a 2:

$$\begin{aligned} E_I + E_R &= E_T && \text{(da } E_z \text{ o da } B_x \text{ usando } \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega) \\ k_x^I E_I - k_x^I E_R &= k_x^T E_T && \text{(da } B_y \text{ o da } E_y^I + E_y^R = E_y^T) \end{aligned}$$

Soluzioni (“formule di Fresnel”)

$$\left\{ \begin{aligned} R &\equiv \frac{E_R}{E_I} = \frac{k_x^I - k_x^T}{k_x^I + k_x^T} = \frac{n_1 \cos \theta_I - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}{n_1 \cos \theta_I + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}} = -\frac{\sin(\theta_I - \theta_T)}{\sin(\theta_I + \theta_T)} \\ T &\equiv \frac{E_T}{E_I} = 1 + R = \frac{2n_1 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_I + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}} \end{aligned} \right.$$

Incidenza normale: $R = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$, $T = 2n_1/(n_1 + n_2) > 1$ se $n_2 < n_1$.
La potenza mediata sullo spazio vale $W = vu$. In un dielettrico $v = c/n$ e

$$u = \left\langle \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{\epsilon}{2} [E^2 + B^2 v^2] \right\rangle = \frac{\epsilon}{2} E_0^2$$

Quindi $W_R/W_I = R^2$ e $W_T/W_I = T^2 n_2/n_1$. L'energia si conserva:

$$(W_I - W_R) \cos \theta_I = W_T \cos \theta_T.$$

Per incidenza normale $W_T/W_I = 4n_1 n_2 / (n_1 + n_2)^2 < 1$.

Rifrazione: B parallelo al piano

Le condizioni di raccordo si riducono a 2:

$$B_I + B_R = B_T \quad (\text{da } B_z \text{ o da } D_x \text{ usando } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E})$$

$$k_x^I (B_I - B_R) / n_1^2 = k_x^T B_T / n_2^2 \quad (\text{da } E_y \text{ usando } \mathbf{E} = c^2 \mathbf{B} \times \mathbf{k} / n^2 \omega)$$

Soluzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} R \equiv \frac{E_R}{E_I} = \frac{B_R}{B_I} = \frac{n_2^2 \cos \theta_I - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}{n_2^2 \cos \theta_I + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}} = \frac{\sin 2\theta_I - \sin 2\theta_T}{\sin 2\theta_I + \sin 2\theta_T} \\ T \equiv \frac{E_T}{E_I} = \frac{B_T/n_2}{B_I/n_1} = \frac{2n_1 \cos \theta_I}{n_2 \cos \theta_I + n_1 \sqrt{1 - n_1^2 \sin^2 \theta_I / n_2^2}} \end{array} \right.$$

La luce riflessa ha intensità $R = 0$ se $\theta_I = \theta_{\text{Brewster}} = \arctan \frac{n_2}{n_1} = 53^\circ$ al mare.

A questo angolo viene riflessa solo la luce con \mathbf{E} polarizzato parallelo al piano. Occhiali polarizzati che lasciano passare solo E_\perp riducono il riflesso del sole.

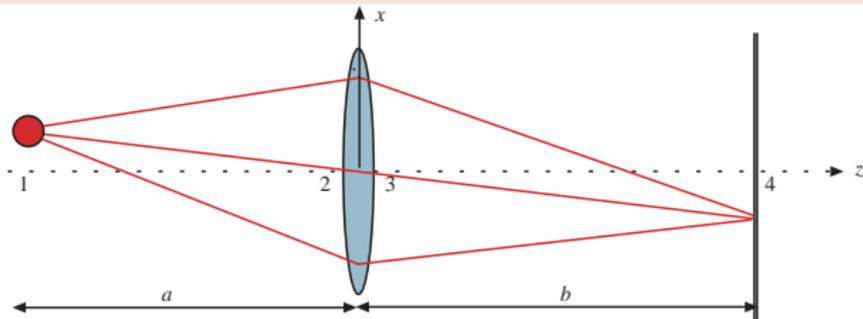


Ottica matriciale

Luce, approssimata come raggi ad angolo piccolo, descritta da $x(z)$ e $x'(z)$.

- Distanza ℓ vuota: $\begin{pmatrix} x(\ell) \\ x'(\ell) \end{pmatrix} = M(\ell) \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad M(\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Lente sottile di focale f cambia solo l'inclinazione del raggio:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{dopo}} = M_{\text{lente}} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{prima}} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$



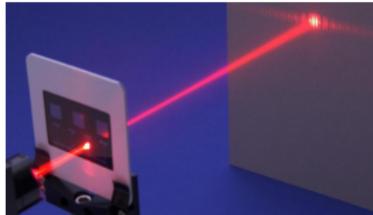
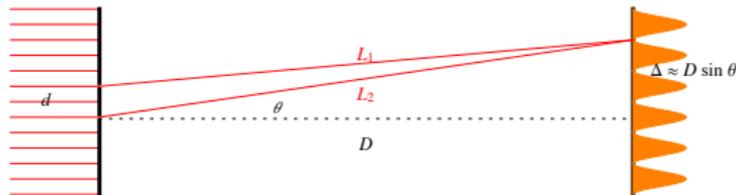
$$M = M(b) \cdot M_{\text{lente}} \cdot M(a) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b/f & a + b - ab/f \\ -1/f & 1 - a/f \end{pmatrix}$$

Focale se $M_{12} = 0$ i.e. $1/a + 1/b = 1/f$. Allora $x_C = (1 - b/f)x_A$ ingrandito.

Ottica ondulatoria

Interferenza

L'esperimento di Young (1801) mostra fenomeni tipici di onde. Due buchi di dimensione trascurabile a distanza d , illuminati da luce di lunghezza d'onda λ . Ogni buco emette onda sferica, osservata su schermo a distanza $D \gg d$



Differenza di cammino ottico $L_1 - L_2 = \sqrt{D^2 + (\Delta - d)^2} - \sqrt{D^2 + \Delta^2} \simeq d \sin \theta$.
Differenza di fase: $\delta = 2\pi(L_1 - L_2)/\lambda = kd \sin \theta$. Ampiezza dell'onda totale:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \simeq \mathbf{E}_1(1 + e^{i\delta}), \quad I \propto |\mathbf{E}|^2 \propto \cos^2 \frac{\delta}{2} = \cos^2 \frac{kd \sin \theta}{2} = \cos^2 \frac{\pi d \Delta}{\lambda D}$$

Massimi a $\Delta_n = n\lambda D/d$, dove $\cos^2(\pi n) = 1$. Grazie a $D/d \gg 1$ una piccola λ produce effetti su scala macroscopica: ad esempio $\Delta_1 = \text{mm}$ per $\lambda = \mu\text{m}$, $d = \text{mm}$, $D = 1 \text{ m}$. Film sottili (bolle di sapone) fanno interferenza fra luce riflessa in entrata ed uscita, costruttiva/distruttiva a seconda di λ (colore).



Ottica ondulatoria

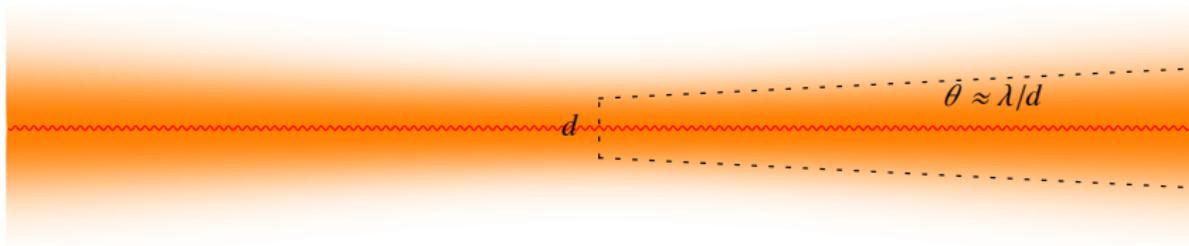
Il trattamento standard risolve problemi tipo: onda piana attraversa un buco, o incontra un ostacolo di dimensione d . Fenomeno nuovo: la luce va storta di

$$\theta \sim \lambda/d \ll 1$$

Lo capiremo mediante l'interferenza. Come i due buchi a distanza d che danno fasci di angolo θ tale che $\delta \simeq 2\pi d\theta/\lambda \lesssim 2\pi$. Ma con geometria più complicata.

Anticipiamo comprensione qualitativa. È proprietà generale delle onde (non solo quelle elettromagnetiche), non del buco. Le onde piane infinite non esistono.

Onde di spessore finito d hanno direzione non univoca entro $\delta\theta \sim \lambda/d$:



Poi: strumenti ottici di dimensione d raggiungono risoluzione angolare $\theta \sim \lambda/d$.

Onda di spessore finito

Ogni componente W di \mathbf{E} , \mathbf{B} soddisfa a $\square^2 W = 0$ i.e. $(\nabla^2 - \omega^2/c^2)W = 0$ a pulsazione ω . Direzione definita $W = f(y, z) \cos(kx - \omega t)$ non risolve. Soluzione:

Argomento con onde. Decompongo profilo di spessore d (e.g. Gaussiana) in serie di Fourier di onde piane: necessita di $k_y \sim 1/d$, quindi $\theta_y \sim k_y/k_x \sim \lambda/d$.

$$W(x=0, y, z, t=0) = e^{-y^2/2d^2} = \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y e^{ik_y y - d^2 k_y^2/2}.$$

$$W(x, y, z, t) \approx \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \Re \int_{-\omega/c}^{+\omega/c} dk_y e^{i(k_x x + k_y y - \omega t) - d^2 k_y^2/2}, \quad k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2}$$

Argomento con polarizzazioni. Proviamo onda che va lungo x con spessore d :

$$E_y(x, y, z, t) = E_0 e^{-y^2/2d^2} \cos(kx - \omega t), \quad B_z = \frac{E_y}{c}.$$

Per soddisfare la 1a equazione di Maxwell aggiungiamo E_x :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = - \int dx \frac{\partial E_y}{\partial y} = E_0 e^{-y^2/2d^2} \frac{\lambda y}{2\pi d^2} \sin(kx - \omega t)$$

Stesso E_x dalla componente x della IV equazione di Maxwell: $-\partial B_z / \partial y = \dot{E}_x / c^2$.

Suggerisce che l'onda devia di $\theta \sim E_x / E_y \sim \lambda/d$.

Risoluzione ottica

Una lente o occhio di dimensione d ha risoluzione angolare (ideale) $\theta \approx \lambda/d$. Un oggetto di dimensione Δ a distanza D sottende angolo $\theta \approx \Delta/D$. Quindi è visibile se $d\Delta \gtrsim \lambda D$: notare simmetria $d \leftrightarrow \Delta$ fra osservato e osservatore



Un occhio ha $d \sim 3\text{mm} \gg \lambda \approx 600\text{ nm}$: $\theta \approx 1/5000 \approx \text{arcmin} \equiv \text{deg}/60$.

Un occhio ideale (aquila) vede un coniglio di $\Delta \approx 0.2\text{ m}$ a $D \approx 5000\Delta \approx \text{km}$.

Vede separati due fari a $\Delta \approx 2\text{ m}$ fino a $D \approx 5000\Delta \approx 10\text{ km}$.

È l'altezza di un aereo, da cui un telescopio di diametro $d \sim 0.2\text{ m}$ può vedere $\Delta \approx 3\text{ cm}$ e quasi leggere una targa in condizioni meteo ideali.

Lo stesso telescopio su di un satellite in orbita geo-stazionaria, $D \approx 42000\text{ km}$, può vedere oggetti di dimensione $\Delta \sim \lambda D/d \sim 100\text{ m}$.

Questo telescopio ha $\theta \approx \lambda/d \approx 3 \cdot 10^{-6} \approx \text{arcsec} \equiv \text{deg}/3600$.

Telescopi più grandi limitati dalle fluttuazioni nell'aria: $\theta \gtrsim \text{arcsec}$.

Nello spazio Hubble ha $d = 2.4\text{ m}$ e vede $\text{arcsec}/20 \sim 2.4 \cdot 10^{-7}$.



$\theta \sim \lambda/d$ vale ad altre frequenze e con altre onde. Pipistrelli 'vedono' poche centinaia di pixel in quanto ricevono onde sonore di $\lambda \approx 6\text{ mm}$.

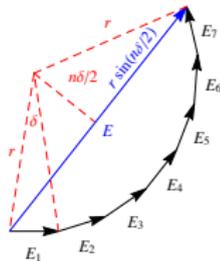
Diffrazione

La diffrazione è l'interferenza fra tante sorgenti. n sorgenti sfasate di δ :

$$E = E_1 \sum_{r=0}^{n-1} \cos(\omega t + r\delta) = \operatorname{Re} E_1 \sum_{r=0}^{n-1} e^{i\omega t + ir\delta}$$

Usando \mathbb{C} è come sommare n vettori nel piano complesso: fanno un arco di raggio $r = E_1/2 \sin(\delta/2)$ dando $E = 2r \sin(n\delta/2)$.

$$\sum_{r=0}^{n-1} e^{ir\delta} = \frac{1 - e^{in\delta}}{1 - e^{i\delta}}, \quad |E|^2 = |E_1|^2 \frac{\sin^2 n\delta/2}{\sin^2 \delta/2}$$



ok per $n = 2$: $\sin \delta / \sin(\delta/2) = 2 \cos(\delta/2)$.

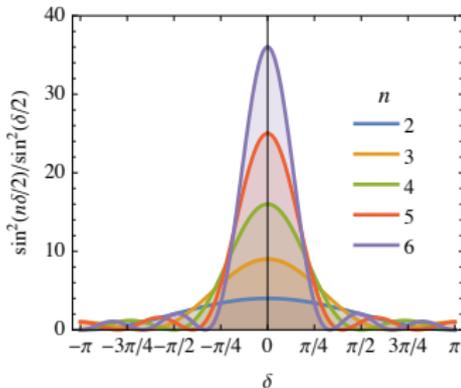
Area $2\pi n$, piccata a $\delta = 0$ per $n \gg 1$.

Massimo a $\delta = 0$: $W_{\max} \propto |E|^2 \simeq n^2 |E_1|^2$.

1° minimo $E = 0$ a $\delta = 2\pi/n$ i.e. cerchio.

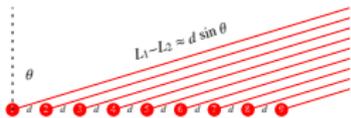
2° massimo a $\delta = 3\pi/n$, piccolo:

$$W \simeq W_{\max} 4/9\pi^2 \approx 0.05 W_{\max}$$



Griglia di diffrazione

Per n oscillatori a distanza d sfasati di φ uno dall'altro visti da osservatore a θ



$$\delta = \varphi + kd \sin \theta = \varphi + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

1° massimo a $\delta = 0, \pm 2\pi, \dots$ i.e. $2\pi m$: multipli se $d > \lambda$. Dipendono da λ .

$n = 3$
 $d = 0.5\lambda$
 $\varphi = 0$



$n = 10$
 $d = 0.5\lambda$
 $\varphi = 0$



$n = 10$
 $d = 1\lambda$
 $\varphi = 0$



$n = 10$
 $d = 1.5\lambda$
 $\varphi = 0$



$n = 10$
 $d = 2\lambda$
 $\varphi = 0$



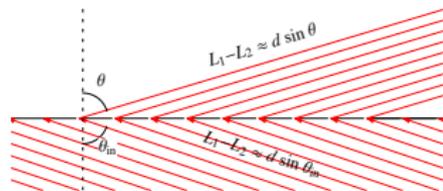
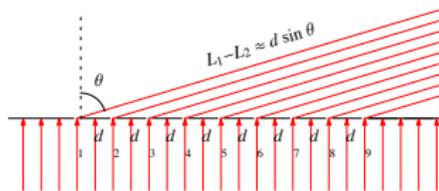
$n = 10$
 $d = 0.5\lambda$
 $\varphi = 1$



E.g. per $\varphi = 0$: 1° massimo a $\theta = 0$ e 1° minimo a $\sin \theta = \lambda/nd$.
Emissione concentrata in piccoli angoli a grande n .

Griglia di diffrazione

Basta tracciare solchi a d costante su di una superficie ed illuminarla. Farfalla blu, madreperla, **cioccolata**... CD contengono punti a distanza di circa $1 \mu\text{m}$.



$$\delta = \varphi + kd \sin \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_{\text{in}})$$

La luce può arrivare anche da sopra e uscire a $\theta = \theta_{\text{in}}$ come nella riflessione, di cui questo è il meccanismo microscopico. Se $d > \lambda$ (non atomi) altri massimi uguali a $\delta = 2\pi m$ cioè $\sin \theta = m\lambda/d$ per $\theta_{\text{in}} = 0$. Dipendono da λ : divide i colori meglio di un prisma. Inviando $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$

$$\delta' - \delta = 2\pi m \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1 \right) = 2\pi m \frac{\Delta\lambda}{\lambda} < \frac{2\pi}{n} \quad \leftarrow \left(\begin{array}{l} \text{Posizione del minimo per } \lambda \\ \text{Criterio di Rayleigh, arbitrario} \end{array} \right)$$

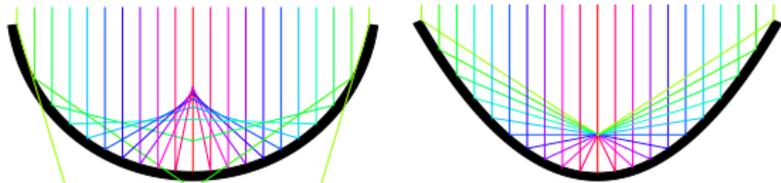
Potere risolvete $\Delta\lambda/\lambda < 1/mn$.

È il solito $\Delta\nu \gtrsim 1/\Delta t$ dove $\Delta t = mn\nu$ è la differenza di tempo fra 1 ed n .

Griglia come antenna ricevente

Lo si può costruire riflettendo con cerchio o meglio parabola:

$$\theta < 1.22\lambda/L$$



Arceibo $L \sim 300$ m, FAST $L = 500$ m ricevono fino a $\lambda = 0.1$ m i.e. $\nu = 3$ GHz.

Una lente focalizza in un punto usando la rifrazione: analogo a griglia tonda. Capito come funziona un pixel che vede a 90° , si ottengono occhi a più pixel aggiungendo sensori vicino al fuoco, che ricevono da altre direzioni vicine. Gli occhi vedono la direzione guardando alla fase.

Grosso telescopio raccoglie tanta luce ma costa e si rompe. Due bracci di fibre ottiche possono avere maggiore risoluzione e contrasto, perdendo luminosità. Utili per vedere pianeti extra-solari come variazione di intensità di stelle.

Principio di Huygens-Fresnel

Come calcolare luce che incontra un ostacolo o un buco? Risolvendo le eq. di Maxwell. Difficile. In pratica si usa un'approssimazione generica per onde.

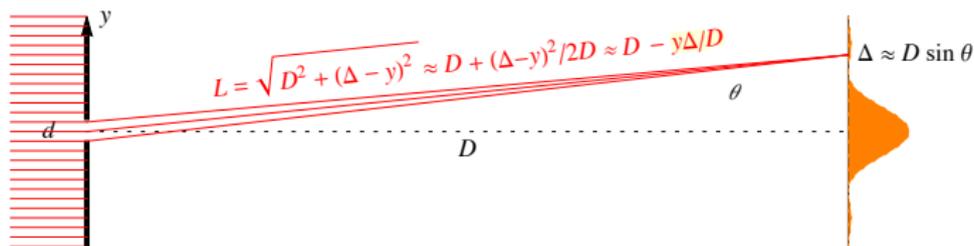
Ogni dS di un fronte d'onda si può considerare come una sorgente secondaria di onde (sferiche) con fase ed ampiezza dell'onda primaria.

Spiegazione fisica: succede nella materia. Ogni atomo investito irraggia combinandosi a dare un'onda totale uguale a quella primaria a parte $n \neq 1$.

Spiegazione matematica: a frequenza data (Fourier) l'equazione d'onda scalare è $(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0$. Identità matematica: $\int_V dV (\varphi \nabla^2 G - G \nabla^2 \varphi) = \int_{\partial V} dS [\varphi \partial G / \partial n - G \partial \varphi / \partial n]$ (teorema di Green \sim divergenza). Si sceglie $G = e^{ikR} / 4\pi R$ la funzione di Green tale che $(\nabla^2 + k^2)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Risultato: $\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S dS \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n}' \cdot [\varphi \cdots + \nabla \varphi \cdots]$. Fattori angolari $f(\theta) \sim (1 + \cos \theta) / 2$ evitano propagazione all'indietro. Generalizzabile a onde vettoriali.

Utilizzo: approssimazione di Kirchhoff: zero su schermo, onda primaria su buchi. Inutile calcolare \cdots , è solo un'approssimazione (inconsistente...), ma va bene per buchi $d \gg \lambda$ e quindi angoli $\theta \ll 1$. Conta solo e^{ikR} .

Diffrazione da fenditura lineare

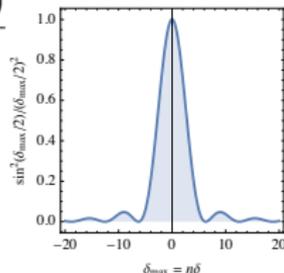


Fraunhofer: schermo lontano, $\lambda \ll d \ll \Delta \ll D$. Quindi $\delta(y) = ky \sin \theta$ e

$$A = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dy}{d} e^{i\delta} = \frac{2 \sin(\frac{1}{2}kd \sin \theta)}{kd \sin \theta}, \quad |A|^2 = \frac{4 \sin^2(\frac{1}{2}kd \sin \theta)}{k^2 d^2 \sin^2 \theta}$$

È il limite continuo della griglia, $n \rightarrow \infty$, $n\delta \rightarrow \delta_{\max}$

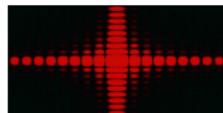
$$\frac{\sin^2 n\delta/2}{\sin^2 \delta/2} \rightarrow \frac{4 \sin^2(\delta_{\max}/2)}{\delta_{\max}^2}$$



Schermo a infinito, o lente che focalizza su schermo finito.

Fresnel: schermo vicino, $\lambda \ll d, \Delta \ll D$, y^2 in L produce erfi.

Fraunhofer da rettangolo: integrando su y e z esce $F_y F_z$.



Diffrazione da fenditura circolare

Onda piana incide \perp su buco circolare di raggio a parametrizzato da r :

$$A = \int \frac{dS}{S} e^{ikL}.$$

In approssimazione di Fraunhofer (a distanza infinita o nel fuoco di lente)

$$L \simeq D - \frac{\mathbf{r} \cdot \Delta}{L} = D - \frac{r\Delta}{D} \cos \phi.$$

Quindi, definendo $R = 2\pi a\Delta/D\lambda$

$$A = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left(ik \frac{r\Delta}{D} \cos \phi\right) = \frac{4\pi}{a^2} \int_0^a dr r J_0\left(\frac{kr\Delta}{D}\right) = 4\pi \frac{J_1(R)}{R}$$

e $|A|^2 \propto J_1^2(R)/R^2$ fa “disco di Airy” con picco a $R = 0$ (84% del flusso) zero a $R = 1.22 \pi$ e poi altro massimo (0.017 più basso). Risoluzione angolare

$$\theta = \frac{\Delta}{D} \approx 1.22 \frac{\lambda}{2a}$$



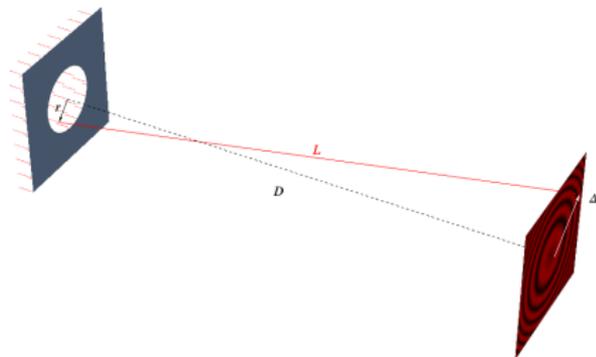
well resolved



just resolved



not resolved



Fenomeno generale di onde e.g. scattering protone-protone. Path integral.

Il path integral

Huygens-Fresnel vale anche per un piano vuoto, senza nessuno schermo: è modo complicato di calcolare l'ovvio. Principio di Babinet degli schermi complementari: $A_{\text{piano}} = A_{\text{ostacolo}} + A_{\text{buco}}$ se piano = ostacolo + buco.



$I_{\text{piano}} = |A_{\text{piano}}|^2 \neq I_{\text{ostacolo}} + I_{\text{buco}}$. Con due ostacoli o buchi bisogna iterare

$$A \approx \int dq_1 \int dq_2 e^{iS} \quad S = k(R_{S1} + R_{12} + R_{2O}) = 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{numero di} \\ \text{lunghezze d'onda} \end{array} \right).$$

Con infiniti piani si ha un integrale sulle traiettorie $Dq = dq_1 dq_2 \cdots dq_\infty$

$$\square^2 \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \approx \iint Dq(x) e^{iS}$$

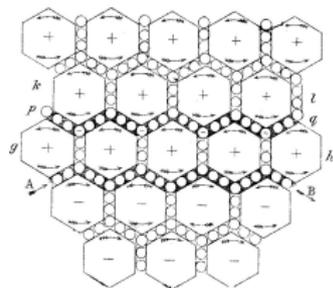
Ottica geometrica: domina la traiettoria dritta da S ad O che estremizza S . Soluzione approssimata perché $e^{ikR} f(\theta)/R \approx e^{ikR}$. Con $\approx \rightarrow =$ è la meccanica quantistica, di cui la meccanica classica è il limite geometrico $\delta S/\delta q = 0$.

Dubbi fondamentali

Come Maxwell ci è arrivato

Dopo essere sopravvissuto al vaiolo, seguendo il pensiero meccanicistico clockwork dell'epoca, Maxwell immaginò un universo pervaso da un materiale detto **etere**, modellizzato come celle ruotanti lubrificate da rotelle mobili.

B è la rotazione media delle celle, E è il moto delle rotelle. L'energia di moto delle rotelle è l'energia elettrica. L'energia di rotazione delle celle è l'energia magnetica.



- Quando una cella ruota fa come la terra: si allarga ortogonalmente all'asse di rotazione; questo genera una pressione ed una tensione che spiega la pressione magnetica.
- Quando un circuito viene acceso, il moto delle rotelle fa girare le celle, trasmettendo il moto rotatorio a celle adiacenti; questo spiega l'induzione di una corrente in un circuito vicino, incluso il segno dell'effetto.
- Nei conduttori le celle sono libere di muoversi. Negli isolanti no. Pigiando, si distorcono un poco, per via della loro elasticità. Così facendo riescono a spostarsi un poco: per questo la chiamò 'corrente di spostamento'.
- ...

Fisica 1 \Rightarrow Fisica 2? No

Alla fine Maxwell notò che il suo materiale trasmetteva onde analoghe a quelle del suono, con velocità $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ che puzzava di velocità della luce. Forse aveva capito cosa era la luce mentre era in vacanza a Glenair: dovette aspettare un mese prima di tornare al lavoro e verificare che c coincideva con il valore misurato.



Anni dopo, nel 1862, buttò via il modello meccanico proponendo le equazioni di Maxwell. Alcuni pensarono che avesse fatto un passo indietro. Venne ignorato fino a quando 20 anni dopo Hertz confermò/scoprì le onde elettromagnetiche.

Quanto una teoria nuova mangia quella vecchia, la gente cerca di capire quella nuova in termini dei vecchi concetti. Invece funziona al contrario. L'elettromagnetismo produce corpi macroscopici e forze di contatto, è inutile cercare di capirlo in termini di meccanica. Il moto degli atomi si media a dare temperatura. E la meccanica classica discende da quella quantistica...

Fisica 2 \Rightarrow Fisica 1? Quasi

Tentativi di spiegare la materia in termini di e.m. (~ 1900) davano roba strana.

- Stati legati di elettromagnetismo (materia) in moto si contraggono.
- Tentavano modelli dell'elettrone in cui tutta l'energia e l'impulso sono e.m. (ipotesi sbagliata). Assumendo una sfera non rigida Lorentz trovò una relazione di dispersione $E = p^2/2m$ con $m = m_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$.
- La velocità della luce è c , ma rispetto a quale sistema di riferimento?

Più in generale, **in quale sistema di riferimento valgono le eq. di Maxwell?**

L'analogia Fisica 1 \Rightarrow Fisica 2 suggeriva idee ragionevoli, ma sbagliate:

- a) Rispetto al sistema di riferimento di chi ha emesso la luce, come una pistola?
- b) Rispetto al sistema di riferimento di chi la propaga, come il suono?
“Le eq. di Maxwell sono come le eq. del suono, generato dal moto collettivo delle molecole di aria. Quindi esiste un fluido cosmologico, l'**etere**”.

Bizzarro: il suono va veloce nei materiali duri, c è enorme, nessuno vede l'etere.

Servivano altri schiaffoni i.e. test sperimentali: se fosse $v_{\text{luce}} = c$ rispetto all'etere, un osservatore in moto con velocità \mathbf{v} vedrebbe $\mathbf{v}_{\text{luce}} = \mathbf{c} + \mathbf{v}$. $v_{\text{Terra}} \approx 30 \text{ km/s} \dots$

Esperimento di Michelson-Morley

Tramite riflessione parziale un'onda viene divisa in due raggi, uno parallelo ed uno perpendicolare al vento di etere. Il tempo necessario a fare avanti-indietro è

$$t_{\parallel} = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} \stackrel{v \ll c}{\simeq} \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

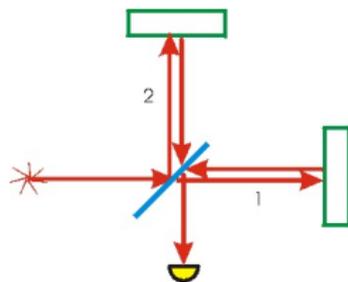
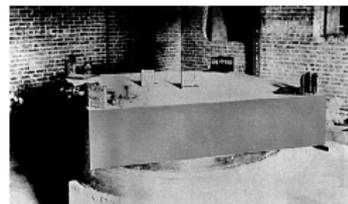
$$t_{\perp} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} \stackrel{v \ll c}{\simeq} \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Poi vengono ricombinati. Per $d \sim \text{m}$ la differenza

$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} \sim \frac{v^2}{c^2} \frac{d}{c} \sim 0.3 \cdot 10^{-16} \text{ s} \quad c\Delta t \approx 100 \text{ nm}$$

è comparabile alla λ della luce visibile, quindi rilevabile da un interferometro. Non videro alcuno spostamento. Oggi $v \lesssim 10^{-6} \text{ m/s}$. Interpretazioni: la Terra trascina l'etere, il Sole gira attorno alla Terra piatta, ..., le equazioni di Maxwell sono valide in ogni sistema, ma le equazioni di trasformazione non sono quelle suggerite dal buonsenso galileiano che implicherebbero $c' = c + v$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$



Invarianza di gauge e relativistica

Potenziale vettore

Le equazioni di Maxwell nascondono simmetrie importanti

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Le 2 eq. di Maxwell senza sorgenti sono automaticamente soddisfatte scrivendo:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Esempio: \mathbf{B} costante descritto da potenziale vettore $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$. In termini di φ (ritorno del potenziale scalare) e \mathbf{A} le 2 equazioni con sorgenti diventano

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi &= -\rho/\epsilon_0 - \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 (\nabla \dot{\varphi} + \ddot{\mathbf{A}}) \end{cases}$$

Usando $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ si inizia a vedere una struttura

$$\begin{cases} \square^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} G \\ \square^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla G \end{cases}$$

dove

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad G = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Invarianza di gauge

Potenziali φ ed \mathbf{A} della forma

$$\mathbf{A} = -\nabla\omega, \quad \varphi = +\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

dove $\omega(x, y, z, t)$ è una generica funzione, descrivono campi zero:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 0.$$

Quindi i potenziali φ , \mathbf{A} sono definiti a meno di una **trasformazione di gauge**

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla\omega, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \frac{\partial\omega}{\partial t}$$

Generalizza $\varphi \rightarrow \varphi + \text{cte}$: si può scegliere lo zero di φ ad ogni \mathbf{r}, t , quindi $\varphi = 0$.
6 campi \mathbf{E}, \mathbf{B} scritti in termini di 4 potenziali φ, \mathbf{A} che in realtà sono 3.

Scelte di gauge

Scegliendo la **gauge di Coulomb** $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ l'equazione per φ diventa come in elettrostatica, $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$. Soluzione nota:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Trasmissione istantanea anche a $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$. Strano. Ed infatti è solo illusorio: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}}$ dipende anche da \mathbf{A} , e la sua equazione è brutta.

Meglio scegliere la **gauge di Loren-z** $G = 0$. Le equazioni diventano

$$\begin{cases} \square^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad G = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Soluzione nel vuoto: $\varphi = \varphi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$.

La condizione di gauge $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}' - k\varphi'/c = 0$ è soddisfatta da:

a) Trasversi: $\varphi = 0$ e $\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$. Danno onde.

b) Longitudinali: $A_x(kx - \omega t) = \varphi(kx - \omega t)/c$. Danno campi 0.

Termini di sorgente danno $G = 0$ per conservazione carica: potenziali ritardati...

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

Invarianza relativistica $\text{SO}(3,1)$

Le equazioni di Maxwell sono invarianti sotto rotazioni spaziali $\text{SO}(3)$ R_{ij} rese esplicite dalla notazione vettoriale $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Lasciano invarianti la distanza

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{cioè} \quad \mathbf{1} = R^T \mathbf{1} R.$$

\square^2 e $\{\mathbf{A}, \varphi\}$ e $\{\mathbf{J}, \rho\}$ suggeriscono 4-vettori che ruotano spazio \leftrightarrow tempo. La simmetria che c'è dietro è più generale delle eq. di Maxwell. È **$\text{SO}(3,1)$** che ruota il quadri-vettore 'controvariante' $\mathbb{X}^\mu = (x, y, z, ct)$ che unifica lo spazio col tempo nello **spazio-tempo** di Minkowski e che conserva il prodotto scalare

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{X} \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = \mathbb{X}^T \eta \mathbb{X} \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1) \quad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

L'invariante $\eta_{\mu\nu}$ non è la matrice $\mathbf{1}$: bisogna distinguere il vettore 'covariante' $\mathbb{X}_\mu = (x, y, z, -ct) = \eta_{\mu\nu} \mathbb{X}^\nu$. Quindi $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X}_\mu \mathbb{X}^\mu$ e $\eta_\nu^\nu = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$.

Dal differenziale si ottiene il quadri-vettore **quadri-gradiente**:

$$df = f(\mathbb{X} + d\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{X}^\mu} d\mathbb{X}^\mu \equiv \square f \cdot d\mathbb{X}$$

$$\square_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \square^\mu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Il suo quadrato è il $\square^2 = \square \cdot \square = \square^\mu \square_\mu$ che compare nelle eq. di Maxwell.

Invarianza relativistica delle eq. di Maxwell

La simmetria $SO(3,1)$ delle equazioni di Maxwell è esplicita definendo i 4-vettori

$$\mathbb{A}^\mu = (A_1, A_2, A_3, \frac{\varphi}{c}), \quad \mathbb{J}^\mu = (J_1, J_2, J_3, c\rho).$$

Le equazioni dell'elettro-magnetismo erano

$$\left\{ \begin{array}{l} \square^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} G \\ \square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla G \end{array} \right. \quad G = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

e sono riscritte come

$$\square^2 \mathbb{A}^\mu - \square^\mu G = -\mu_0 \mathbb{J}^\mu \quad G \equiv \square \cdot \mathbb{A}$$

Scrivendola come $(\square^2 \eta^{\mu\nu} - \square^\mu \square^\nu) \mathbb{A}_\nu = -\mu_0 \mathbb{J}^\mu$ si nota che il primo termine vale zero contratto con \square_μ , da cui la conservazione della carica $\square \cdot \mathbb{J} = 0$.

La trasformazione di gauge era

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \omega, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

che, in notazione relativistica, si scrive come

$$\mathbb{A}^\mu \rightarrow \mathbb{A}^\mu - \square^\mu \omega$$

Tensore dei campi

Senza fissare gauge, le equazioni di Maxwell con sorgenti sono

$$\square_\nu(\square^\nu \mathbb{A}^\mu - \square^\mu \mathbb{A}^\nu) = -\mu_0 \mathbb{J}^\mu.$$

Compare un tensore di rango 2 (cioè matrice) anti-simmetrico (in ogni sistema).
Contiene le 6 componenti dei campi \mathbf{E} , \mathbf{B} :

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \square_\mu \mathbb{A}_\nu - \square_\nu \mathbb{A}_\mu = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -B_z & B_y & -E_x/c \\ B_z & 0 & -B_x & -E_y/c \\ -B_y & B_x & 0 & -E_z/c \\ \hline E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{array} \right)$$

$F_{i0} = E_i/c$ e $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$: in 3d (tensore anti-simmetrico) = (pseudo-vettore).

Il tensore dei campi è gauge-invariante:

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} \rightarrow \mathbb{F}_{\mu\nu} + \square_\mu \square_\nu \omega - \square_\nu \square_\mu \omega = \mathbb{F}_{\mu\nu}.$$

Equazioni di Maxwell in notazione relativistica

Ritorno alle equazioni di Maxwell in termini di \mathbf{E} , \mathbf{B} in notazione relativistica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square^\mu \mathbb{F}_{\mu\nu} = \mu_0 \mathbb{J}_\nu \quad \text{I } (\nu = 0) \text{ e IV } (\nu = i) \text{ equazione} \\ \square^\mu \tilde{\mathbb{F}}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{III } (\nu = 0) \text{ e II } (\nu = i) \text{ equazione} \end{array} \right.$$

avendo definito il **tensore dei campi duale**, che ha $\mathbf{E}/c \leftrightarrow \mathbf{B}$ scambiati:

$$\tilde{\mathbb{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathbb{F}_{\rho\sigma} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -E_z/c & E_y/c & -B_x \\ E_z/c & 0 & -E_x/c & -B_y \\ -E_y/c & E_x/c & 0 & -B_z \\ \hline B_x & B_y & B_z & 0 \end{array} \right)$$

$\epsilon_{i_1 i_2}$ è tensore invariante di SO(2), $\epsilon_{i_1 i_2 i_3}$ di SO(3), $\epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ di SO(4) e SO(3,1).
Se ne può fare a meno: in notazione meno elegante la III+II equazione è

$$\square_\sigma \mathbb{F}_{\mu\nu} + \square_\mu \mathbb{F}_{\nu\sigma} + \square_\nu \mathbb{F}_{\sigma\mu} = 0.$$

‘Identità di Bianchi’, matematica nota come ‘forme differenziali’ anti-simmetriche:

$$F = dA \quad \Rightarrow \quad dF = 0, \quad d^*F = J \quad \Rightarrow \quad dJ = 0$$

In questa forma Maxwell si generalizza a dimensione $d \neq 3 + 1$ generica (E è vettore, B è tensore anti-simmetrico), e con sorgenti di dimensione $d' \neq 0 + 1$.

Trasformazioni di Lorentz

Cosa è $SO(3,1)$? Trucco matematico: $\mathbf{x}^2 - (ct)^2 = \mathbf{x}'^2 + (ict)^2$. $SO(3,1)$ diventa $SO(4)$ cioè rotazioni in 4d. Consideriamone una nuova fra x e ict :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Per rimanere fra i reali bisogna prendere $\theta = ia$. Infatti $\sin(ia) = i \sinh a$ e $\cos(ia) = \cosh(a)$. Le rotazioni spazio \leftrightarrow tempo diventano

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh a & -\sinh a \\ -\sinh a & \cosh a \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x' = +x \cosh a - ct \sinh a \\ ct' = -x \sinh a + ct \cosh a \end{cases}$$

Sono infatti le trasformazioni che lasciano invariante

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad \text{cioè} \quad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda.$$

Sono le **trasformazioni di Lorentz**. Riscrivendo in termini di $\tanh a \equiv v/c$:

$$\cosh a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh a = \gamma \frac{v}{c} \quad \boxed{\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - xv/c^2) \end{cases}}.$$

Sono trasformazioni fra sistemi di riferimento in moto relativo con velocità v , entrate nelle eq. di Maxwell quando si è misurò che Lenz vale in ogni sistema.

Lorentz \rightarrow Galileo

Per $v \ll c$ le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - xv/c^2) \end{cases} \quad v \ll c \quad \begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} .$$

Analogo a: (simmetria SO di rotazione di una Sfera) $\xrightarrow{\text{localmente}}$ (traslazione T)

$$\text{SO}(2) \rightarrow T_1, \quad \text{SO}(3) \rightarrow T_2.$$

Lorentz ha una struttura globale diversa da Galileo: la luce va a c rispetto ad ogni sistema di riferimento. Matematicamente, **SO ha (quadri)vettori**, T no.

Invece di studiare l'intero elettromagnetismo, Einstein nel 1905 isolò la lezione cruciale: la simmetria. Basandosi solo su Michelson-Morley postulò:

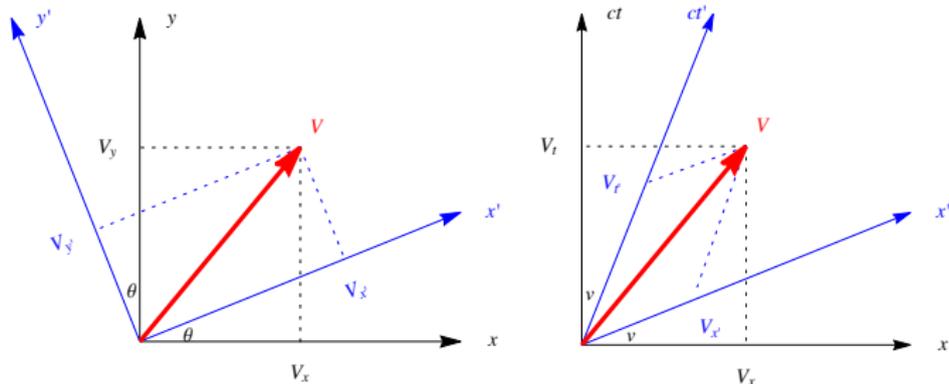
- 1) La velocità della luce è c in ogni sistema inerziale.
- 2) Stesse leggi della fisica in ogni sistema inerziale.

Secondo Galileo sono contraddittori. Einstein modificò Galileo in Lorentz e aggiustò la meccanica rendendola Lorentz-invariante. L'elettromagnetismo è già ok.

Oggi tutta la fisica sono particelle (γ , $e...$) descritte da campi come quello elettromagnetico $\mathbb{A}_\mu(\mathbb{X})$ che soddisfano equazioni Lorentz-invarianti.

Spazio-tempo di Minkowski

Minkowski (professore di matematica di Einstein) nel 1908 semplificò la relatività introducendo il formalismo $SO(3,1)$: spazio-tempo e 4-vettori.

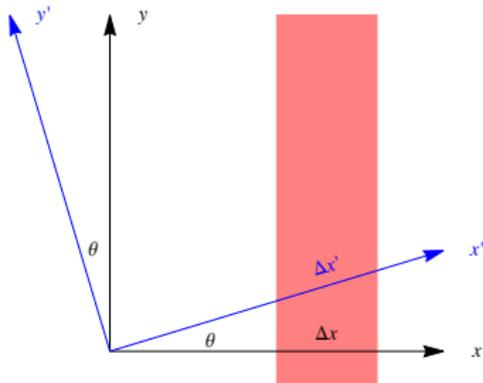


Disegnando in un piano a metrica positiva non è visibile l'invarianza di $x^2 - c^2t^2$.

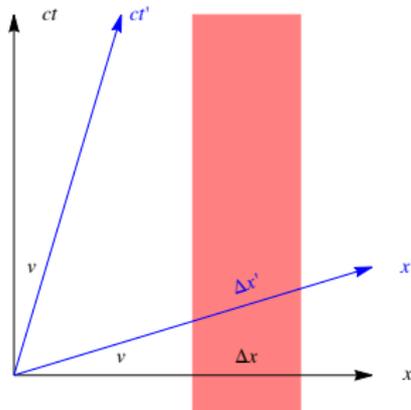
Contrazione delle lunghezze

Un albero ha sezione maggiore se tagliato storto, $\Delta x' = \Delta x / \cos \theta > \Delta x$.

Rotazioni SO(2)

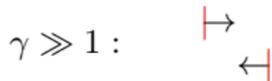


Lorentz SO(1,1)



Bisogna calcolare per vedere che $\Delta x' = \Delta x / \cosh a = \Delta x / \gamma < \Delta x$.

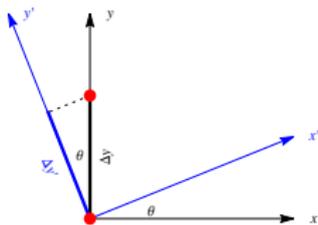
I protoni sono sfere di 3 quark e gluoni. A $\gamma \gg 1$ urtano come piattelli...



Dilatazione dei tempi

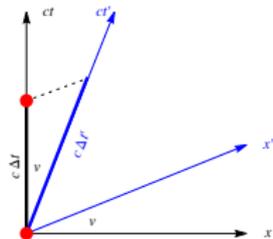
Rotazioni SO(2): un albero verticale a $x = 0$ rispetto ad S , è alto Δy . Rispetto ad S' girato

$$\begin{aligned}\Delta y' &= \Delta y \cos \theta + \Delta x \sin \theta \\ &= \Delta y \cos \theta < \Delta y\end{aligned}$$



Lorentz SO(1,1): un processo fermo a $x = 0$ rispetto ad S , impiega Δt . Rispetto ad S' boostato

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma(\Delta t - \Delta x v/c^2) \\ &= \Delta t \cosh a = \gamma \Delta t > \Delta t\end{aligned}$$



Un muone a riposo decade con vita media $\tau \approx 659 \text{ m} \cdot c$. Prodotto ad alta energia $\gamma \gg 1$ da raggi cosmici nell'atmosfera è più stabile, $\gamma\tau$, e raggiunge la terra.

Un fascio di protoni si respinge e destabilizza in tempo τ . Se ha alta energia $\gamma \gg 1$ appare più stabile, $\gamma\tau$. In questo caso la dinamica è nota: repulsione Coloumbiana. La maggiore stabilità è calcolabile come $F = q(E + vB) < qE$ (pag. 130). Ma il risultato dipende solo dalla simmetria.

Causalità

Secondo Galileo $\Delta t' = \Delta t$. Prima e dopo sono assoluti. Se A avviene prima di B , A può causare B . La relatività viola la causalità? No, ma la modifica.

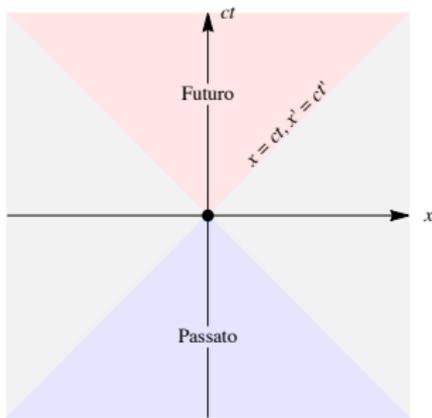
Secondo Lorentz $\Delta t' = \gamma \Delta t$ per eventi a $\Delta x = 0$. Ancora peggio per eventi a $\Delta x \neq 0$: **il segno di $\Delta t'$ può differire da quello di Δt !??**

La causalità è preservata grazie all'invarianza di

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

Se $\Delta x / \Delta t < c$ gli eventi sono causalmente connessi da segnali che viaggiano a $v \leq c$ e l'ordinamento temporale è assoluto. Infatti esiste sistema in cui $\Delta x = 0$.

Se $\Delta x / \Delta t > c$ l'ordinamento temporale non è assoluto ma non causa acausalità perché gli eventi non sono causalmente connessi.



Simmetrie Lorentz invarianti: *Time inversion* ($t \rightarrow -t$), *Parità* ($x \rightarrow -x$), *PT*.

Meccanica relativistica

Quadri-posizione di punto $\mathbb{X}(\tau)$ dove τ è un parametro ($\tau \rightarrow \tau'$ è invarianza di gauge). Spesso conviene il **tempo proprio** $d\tau^2 = dt^2 - dx^2/c^2 \neq 0$ se $v \neq c$.

Quadri-velocità: $\mathbb{V} = \frac{d\mathbb{X}}{d\tau}$ $\mathbb{V}^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbb{X}^\mu}{dt} = \gamma(\mathbf{v}, c), \quad \mathbb{V}^2 = -c^2.$

Il **quadri-impulso** di una particella ferma non può essere $\mathbb{P} = (0, 0, 0, 0)$, perché altrimenti sarebbe 0 anche quello Lorentz-ruotato di una particella in moto:

$$\mathbb{P} = \left(0, 0, 0, \frac{E_0}{c}\right)_S \stackrel{\text{Lorentz}}{=} \left(\gamma \frac{v}{c} \frac{E_0}{c}, \dots\right)_{S'} \stackrel{v \ll c}{\simeq} \left(\frac{vE_0}{c^2}, \dots\right)_{S'} \Rightarrow E_0 = mc^2.$$

La definizione giusta è

$$\mathbb{P} = m\mathbb{V} \quad \mathbb{P}^\mu \equiv \left(\mathbf{p}, \frac{E}{c}\right), \quad \begin{cases} \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} \simeq m\mathbf{v} + \dots \\ E = m\gamma c^2 \simeq mc^2 + mv^2/2 + \dots \end{cases}$$

$\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = -m^2c^2$ quindi $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$. Ha senso $m \rightarrow 0$ (fotone): $E = pc$. Conservato negli urti che ora permettono variazioni di massa e.g. decadimenti.

Quadri-forza: $\mathbb{F} = \frac{d\mathbb{P}}{d\tau}$ $\mathbb{F}^\mu = \gamma(\mathbf{F}, \frac{W}{c}), \quad \mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad W \equiv \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$

Forza elettromagnetica

Anche la forza di Lorentz su carica q è $SO(3,1)$ simmetrica:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{F}_\mu = q\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{V}^\nu$$

Infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{F}^0 = q\mathbb{F}^{0i}\mathbb{V}_i = q\frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \gamma\mathbf{v} \stackrel{\simeq}{=} \gamma\frac{W}{c} \\ \mathbb{F}_i = q(-\mathbb{F}_{i0}\mathbb{V}^0 + \mathbb{F}_{ij}\mathbb{V}^j) = q\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = \gamma\mathbf{F}_i \end{array} \right.$$

riproducono la forza di Lorentz.

Esempio: q in B costante: $d\mathbf{p}/dt = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ i.e. $(v/a)p = qvB$ i.e. $p = aqB$ dove ora $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$. Accelerare a grande energia $E \simeq pc$ richiede grandi raggi a :

$$pc = caqB = eV \overbrace{\frac{c}{\text{m/s}}^{0.3 \text{ GeV}}} \frac{a}{\text{m}} \frac{q}{e} \frac{B}{\text{Tesla}}$$



Invarianti di Lorentz dei campi

Quando possibile, conviene utilizzare invarianti. Ce ne sono due:

| | |
|--|----------------|
| $\frac{1}{2}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu} = (E/c)^2 - B^2$ | scalare |
| $\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}_{\rho\sigma} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{c}$ | pseudo-scalare |

Esempio 1: per un'onda piana nel vuoto valgono zero.

Esempio 2: carica in \mathbf{E}_y e \mathbf{B}_z ortogonali. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ in ogni sistema.

- Se $E < cB$ posso andare in un sistema in cui $E' = 0$ e quindi $B' = \sqrt{B^2 - E^2/c^2}$. È il drift a velocità $v_x = E_y/B_z$ di pag. 113.
- Se $E > cB$ è così forte che B non incurva le traiettorie: vado in sistema dove $B' = 0$ e $E' = \sqrt{E^2 - c^2B^2}$ boostato di $v_x = c^2B_z/E_y$ (pag. prossima).

Trasformazione di Lorentz dei campi

I campi trasformano come $\mathbb{F}_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} \mathbb{F}_{\mu\nu}$. Per \mathbf{v} lungo l'asse x :

$$\Lambda_{\nu'}^{\mu} = \left(\begin{array}{ccc|c} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{array} \right) \quad \Lambda_{\mu'}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} \eta_{\mu'\nu'} = \left(\begin{array}{ccc|c} \gamma & 0 & 0 & \gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{array} \right)$$

Quindi:

$$\left\{ \begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) & B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{array} \right.$$

Verifica invarianti \checkmark . Notazione vettoriale:

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2)_{\perp}$$

Per $v \ll c$ si riducono a Galileo, $\mathbf{E}' \simeq \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, pag. 113.

I campi trasformano seguendo le loro sorgenti:

$$\begin{array}{ll} \rho & \rightarrow E \\ \updownarrow & \updownarrow \\ J & \rightarrow B \end{array}$$

Magnetismo come effetto relativistico

F_B è effetto relativistico, soppresso da $(v/c)^2 \sim 10^{-30}$ e visibile perché enormi F_E di $\sim 10^{30}$ e e e p si cancellano, ma e fanno moti collettivi dando correnti. La materia è fatta di cariche opposte p^+ ed e^- con densità $\rho_+^0 + \rho_-^0 = 0$. A riposo: correnti $\mathbf{J}_\pm = 0$, quadri-correnti $\mathbb{J}_\pm = (\mathbf{J}_\pm, c\rho_\pm) \neq 0$, totale $\mathbb{J} = \mathbb{J}_+ + \mathbb{J}_- = 0$:



Materia in moto (o vista da carica in moto): $\mathbb{J}_\pm = \gamma(\mathbf{v}, c)\rho_\pm^0$, \mathbb{J} rimane 0:



Un \mathbf{E}_{ext} mette in moto i soli elettroni $\mathbb{J}_- = \gamma(\mathbf{v}, c)\rho_-^0$ quindi $\mathbf{J} = \mathbf{J}_- = \gamma\mathbf{v}\rho_-^0$ produce B ; $\rho = (\gamma - 1)\rho_-^0$ produce piccolo E . È la contrazione delle lunghezze:

$$x'_n = na = \gamma(x_n - vt) \quad \Rightarrow \quad x_n = n\frac{a}{\gamma} + vt$$

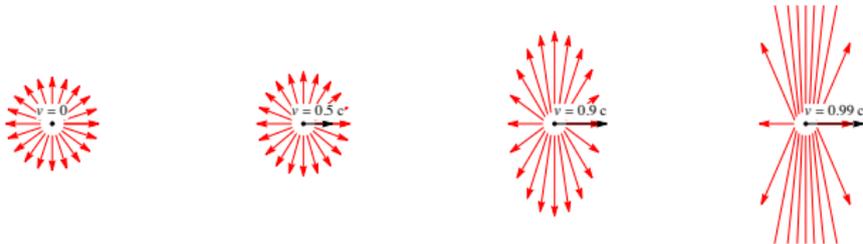


$F_B \gg F_E$ su carica q in moto con $v_q \gg v$. Ma solo F_E nel sistema in cui $v'_q = 0$.

Campi di carica con velocità costante

Campi \mathbf{E} , \mathbf{B} generati da carica q in moto a velocità v costante lungo x .

- 1) \mathbf{B} calcolato da \mathbf{J}_s a pag. 168 per $v \ll c$: $B_\theta = \frac{\mu_0 q v \sqrt{y^2 + z^2}}{4\pi((x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.
- 2) La formula integrale con il tempo ritardato porta a calcoli pesanti...
- 3) Nel sistema S dove q è ferma i campi sono $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/4\pi\epsilon_0 r^3$, $\mathbf{B} = 0$. Nel sistema S' diventano $E'_x = E_x$, $E'_{y,z} = \gamma E_{y,z}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{E}' \times \mathbf{v}/c^2$ cioè $B'_\theta = vE'_\perp \sin\theta/c^2$. Per $v \sim c$ \mathbf{E}' non è sferico e $\mathbf{r} = (x', y', z') = (\gamma(x - vt), y, z)$ contiene γ .



Osservatore in S' sente $E'_{y,z}$ intensificato di γ ma per un tempo ridotto di $1/\gamma$.

$$E'_y(0, b, 0, t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t'^2)^{3/2}} = \epsilon_y$$

Forza fra due q in moto a v : $F_v = q(E'_y - vB'_z) = \gamma(1 - v^2/c^2)F_0 = F_0/\gamma$.
 È solo la trasformazione delle forze, che produce la dilatazione dei tempi.

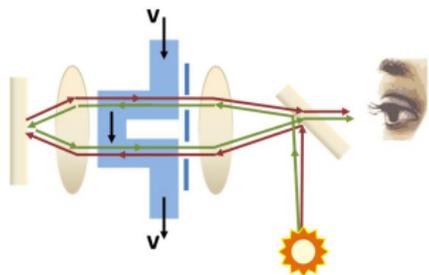
Trasformazione di Lorentz di un'onda

Altri problemi dinamici risolti da simmetria. Contrazione di Lorentz di materia formata da e.m. Riflessione da specchio in moto. Trascinamento di onda...

I campi di un'onda sono funzioni di $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \mathbb{K} \cdot \mathbb{X}$ dove $\mathbb{K}^\mu = (\mathbf{k}, \omega/c)$ è un quadri-vettore. In un sistema S' in moto relativo con $v = v_x$ è $\mathbb{K}^{\mu'} = \Lambda_\mu^{\mu'} \mathbb{K}^\mu$

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ \omega'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c \\ -\gamma v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ \omega/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(k_x - v\omega/c^2) \\ \gamma(\omega - vk_x)/c \end{pmatrix}, \quad k'_{y,z} = k_{y,z}.$$

Mediante interferometria Fizeau nel 1851 misurò la velocità della luce in acqua in moto con v . Nel sistema dove l'acqua è ferma $v_o = \omega/k = c/n$. Doppio circuito solo per cancellare sistematiche. Secondo Galileo: $\mathbf{v}'_o = \mathbf{v}_o - f\mathbf{v}$ con $f = 1$. Ma si misura $f < 1$. Relativisticamente si ottiene la formula di addizione delle velocità (per $\mathbf{v}_o \parallel \mathbf{v}$):



$$v'_o = \frac{\omega'}{k'} = \frac{v_o - v}{1 - v_o v/c^2} \stackrel{v \ll c}{\simeq} v_o - fv + \mathcal{O}(v^2) \quad f = 1 - \frac{v_o^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{n^2} < 1$$

Trasformazione di un'onda nel vuoto

Onda nel vuoto: $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$. Quindi $\mathbb{K}^\mu = \omega(\mathbf{n}, 1)/c$ e $\mathbb{K}^{\mu'} = \omega'(\mathbf{n}', 1)/c$

$$\omega' = \gamma\omega(1 - n_x v/c), \quad n'_x = \frac{n_x - v/c}{1 - n_x v/c} \quad n'_{y,z} = \frac{n_{y,z}}{\gamma(1 - n_x v/c)}.$$

Trasformazioni dei campi. I due invarianti valgono zero. Conti noiosi. Per $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ parallelo a \mathbf{v} i campi sono solo \perp e $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$ e trasformano:

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)\mathbf{E} = r\mathbf{E} \quad r = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}' = r\mathbf{B}.$$

Seguono le trasformazioni di densità di energia $u' = r^2 u$ e Poynting $W' = r^2 W$.

Raffreddamento laser. Forza su specchio (atomo) investito da entrambi i lati da luci di potenza $W_\pm = W$. Se fermo $F = 2S(W_+ - W_-)/c = 0$. Se in moto con velocità $v \ll c$ riceve forza di attrito (trascurando effetti di ordine v^2/c^2):

$$F \simeq F' = \frac{2S}{c}(W'_+ - W'_-) \simeq -\frac{8SW}{c^2}v \quad W'_\pm \simeq (1 \mp 2\frac{v}{c})W_\pm$$

Possibile ottenerle in maniera diretta sapendo che fanno parte di tensore $\mathbb{T}_{\mu\nu}$.

Formalismo Lagrangiano

Le equazioni di Maxwell estremizzano l'azione del campo elettromagnetico

$$S = \int d^4X \mathcal{L} \quad \mathcal{L} = -\frac{\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}}{4\mu_0} + \mathbb{J}^\mu \mathbb{A}_\mu$$

Equazioni di Lagrange:

$$\square_\mu \underbrace{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \square_\mu \mathbb{A}_\nu}}_{\mathbb{F}^{\mu\nu}/\epsilon_0} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbb{A}_\nu} \quad \text{cioè} \quad \square_\mu \mathbb{F}^{\mu\nu} = \mu_0 \mathbb{J}^\nu.$$

Costante di Noether per simmetria sotto 4-traslazioni $\mathbb{X}_\mu \rightarrow \mathbb{X}_\mu + \mathbb{D}_\mu$

$$\mathbb{T}^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \square_\mu \mathbb{A}_\alpha} \square^\nu \mathbb{A}_\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbb{F}^{\mu\alpha} \mathbb{F}^\nu{}_\alpha + \frac{\eta^{\mu\nu}}{4} \mathbb{F}_{\alpha\beta} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \right] \quad \mathbb{T}^\mu{}_\mu = 0.$$

In componenti:

$$\mathbb{T}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -T_{ij} & S_i/c \\ \hline S_j/c & u \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} u = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0 = \text{densità di energia} \\ \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0 = \text{flusso di energia} \\ T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + B_i B_j/\mu_0 - \underbrace{\delta_{ij} u}_{\text{pressione}} = \text{tensore stress} \end{array}$$

Conservazione: $\square_\mu \mathbb{T}^{\mu\nu} = \mathbb{F}^\nu = \mathbb{F}^{\nu\alpha} \mathbb{J}_\alpha$. Per $\nu = 0$ si ottiene il teo. di Poynting

$$\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Tensore dei campi

Onda piana che si propaga nel vuoto lungo l'asse x :

$$\mathbb{T}^{\mu\nu} = u \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Nel sistema S' :

$$\mathbb{T}^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \mathbb{T}^{\mu\nu} \Lambda_{\nu}^{\nu'} = \gamma^2 (1 - v/c)^2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \equiv u' \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Stesso risultato già ottenuto con la trasformazione dei campi:

$$u' = \frac{1 - v/c}{1 + v/c} u$$

Altre simmetrie?

Traslazioni spazio-temporali. $\mathbb{X}_\mu \rightarrow \mathbb{X}_\mu + \mathbb{D}_\mu$. Conservazione di $\mathbb{T}_{\mu\nu}$.

Invarianza di scala. $\mathbb{X}_\mu \rightarrow \lambda \mathbb{X}_\mu$ grazie a $m_\gamma = 0$. Quindi $\mathbb{T}_\mu^\mu = 0$. Ma $m_{e,p} \neq 0$.

Invarianza conforme. $\mathbb{X}_\mu \rightarrow \mathbb{X}'_\mu = \mathbb{X}_\mu / (\mathbb{X} \cdot \mathbb{X})$ (q davanti a sfera conduttrice...).

Insieme a $\mathbb{X}'_\mu \rightarrow \mathbb{X}'_\mu + \mathbb{D}'_\mu$ e Lorentz e scala farebbe $SO(4,2)$.

Dualità elettro-magnetica. Se esistessero cariche magnetiche conservate:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_E}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_B - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_B \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_E + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

che sarebbe simmetrica sotto $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}/c$ insieme a

$$\mathbf{F} = q_E(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_B(\mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E})$$

Magari esistono ma sono pesanti e decadute.

Rimaste elucubrazioni teoriche. Einstein ha scelto la simmetria giusta.

Analogo economico dell'invarianza di gauge

Weyl propose la prima teoria con invarianza di scala ('gauge' in tedesco) dove le unità di lunghezza possono essere ridefinite localmente. Nome improprio: l'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo è invece libertà di scegliere una fase.

Immaginiamo un mondo con un paese ad ogni punto \vec{r} , vettore con valore interi. Chiamiamo $\varphi(\mathbf{r}) = \exp[\varphi(\mathbf{r})]$ il prezzo di un prodotto espresso nella valuta locale. Chiamiamo $\exp[A_i(\mathbf{r})]$ il tasso di cambio da \mathbf{r} a $\mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_i$.

Ogni paese può localmente ridefinire la sua moneta (unità di misura del valore) moltiplicandola per $\exp[\epsilon(\mathbf{r})]$. I tassi di cambio diventano

$$A_i(\mathbf{r}) \rightarrow A_i(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_i) - \epsilon(\hat{\mathbf{x}})$$

Facendo un giro $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_i \rightarrow \mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_j \rightarrow \mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_j \rightarrow \mathbf{r}$ uno guadagna

$$\exp[F_{ij}(\mathbf{r})] \quad \text{dove} \quad F_{ij}(\mathbf{r}) = [A_j(\mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_i) - A_j(\mathbf{r})] - [A_i(\mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_j) - A_i(\mathbf{r})].$$

Commerciando un prodotto fra due paesi \mathbf{r} e $\mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_i$ uno guadagna

$$\exp[D_i\varphi(\mathbf{r})] \quad \text{dove} \quad D_i\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r} + \hat{\mathbf{x}}_i) - \varphi(\mathbf{r}) - A_i(\mathbf{r}).$$

Con assunzioni extra le eq. di Maxwell statiche descrivono l'equilibrio economico nel continuo [1410.6753]. Equazioni dinamiche da SO(3,1) o assunzioni extra.

A posteriori

Oggi è possibile dedurre l'elettromagnetismo dal puro pensiero postulando:

- a) invarianza relativistica $SO(3,1)$, cioè $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \mathbb{X}^\mu \text{diag}(1, 1, 1, -1)_{\mu\nu} \mathbb{Y}^\nu$;
- b) teoria di campo di un 4-vettore, cioè $\mathbb{A}_\mu(\mathbb{X})$;
- c) fisica locale, cioè derivate;
- d) niente energia negativa, cioè soluzioni classiche che esplodono.

a + b + c implica le equazioni più generali a due derivate:

$$c_1(\square \cdot \square)\mathbb{A}_\mu + c_2\square_\mu(\square \cdot \mathbb{A}) + m_\gamma^2\mathbb{A}_\mu = \mathbb{J}_\mu.$$

Ma, per il $-$ di $SO(3,1)$, le componenti spaziali $\mathbb{A}_{1,2,3}$ hanno energia cinetica con segno opposto alla componente temporale $\mathbb{A}^0 = \varphi/c$. Solo per $c_1 = -c_2$ c'è un'ulteriore simmetria, l'invarianza di gauge, che rende non fisico un modo (ad esempio $\varphi = 0$). Implica 'massa' $m_\gamma = 0$, 2 polarizzazioni, conservazione della carica $\square \cdot \mathbb{J} = 0$. Interazioni forti e deboli: fratello maggiore \mathbb{A}_μ^a .

La gravità relativistica

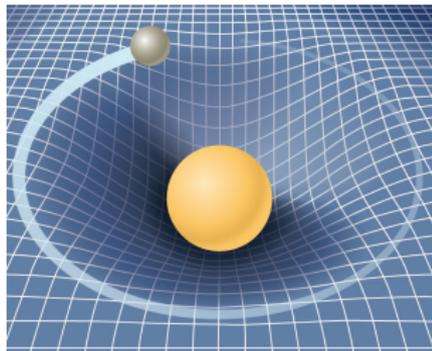
Einstein cercò la generalizzazione relativistica della forza gravitazionale di Newton. Forse φ_{Newton} è un altro \mathbb{A}_0 ? Uno-scalare? Non funzionava finché ebbe l'idea giusta: il dato sperimentale $m_{\text{inerziale}} = m_{\text{gravitazionale}}$ implica che esiste un sistema in caduta libera in cui la gravità vale $\mathbf{g} = 0$. Matematicamente sembra analogo al fatto che uno spazio curvo è localmente piatto. Riemann aveva matematicamente descritto la curvatura dello spazio con un tensore metrico

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

in coordinate x_i arbitrarie (come già accennato). Quindi Einstein introdusse un campo

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(\mathbb{X})$$

per descrivere la curvatura dello spazio-tempo.

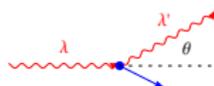


Einstein-Hilbert trovarono nel 1915 la più semplice equazione covariante (con significato geometrico indipendentemente dalle coordinate scelte; in pratica l'analogo curvo del ∇^2). La relatività generale è una specie di e.m. più complicato. Per campo debole $g_{00} = -(1 + 2\varphi_{\text{Newton}})$ si riduce a Newton con $1/r^2$. Spiega il moto anomalo di Mercurio, pianeta vicino al campo forte del sole. Predice la deflessione gravitazionale della luce, onde gravitazionali, l'espansione dell'universo.

Effetto Compton e $\mathbb{P} = \hbar\mathbb{K}$

Compton nel 1923 mandò fotoni di lunghezza d'onda $\lambda \sim$ raggi X su elettroni fermi, trovando fotoni deflessi ad angolo θ con

$$\lambda'(\theta) = \lambda + \underbrace{\lambda_{\text{Compton}}}_{2.4 \cdot 10^{-12}\text{m}} (1 - \cos \theta)$$



Spiegabile come scattering $\gamma e \rightarrow \gamma' e'$ se γ sono particelle con $\mathbb{P} = \hbar\mathbb{K}$, quindi $E = h\nu = hc/\lambda$. Infatti $\mathbb{P}_\gamma + \mathbb{P}_e = \mathbb{P}'_\gamma + \mathbb{P}'_e$ dipende da un parametro θ :

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{E}{c}(1, 0, 0, 1), \quad \mathbb{P}'_\gamma = \frac{E'}{c}(\cos \theta, \sin \theta, 0, 1), \quad \mathbb{P}_e = (0, 0, 0, m_e c).$$

Quadrando $\mathbb{P}'_e = \mathbb{P}_e + \mathbb{P}_\gamma - \mathbb{P}'_\gamma$ si ottiene

$$m_e^2 c^2 = m_e^2 c^2 + 0 + 0 + 2m_e(E - E') + \frac{2}{c^2}EE'(\cos \theta - 1)$$

cioè

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \lambda + \underbrace{\lambda_{\text{Compton}}}_{h/m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Luce solare: grande numero di quanti $W_\odot/h\nu \sim 10^{21}/\text{m}^2 \text{sec}$. Affievolendo fino ad avere **intensità minima** si osservano quanti $E = h\nu$ a tempi random.

Irraggiamento

Onde sferiche nel vuoto

Nella **gauge di Lorenz** $G \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ le equazioni si semplificano in

$$\begin{cases} \square^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad \text{da cui poi} \quad \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

L'equazione $\square^2 \varphi = 0$ ammette **onde a simmetria sferica**,

$$\varphi(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

dove f, g sono funzioni arbitrarie. Ignoriamo la soluzione 'entrante' $g(t + r/c)$.

Un'onda sferica ha componenti di \mathbf{E} o $\mathbf{B} \sim f'/r$, come atteso da $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$.
Ma una g genera $E_r \propto 1/r^2$: cosa genera un'onda $E_\theta \propto 1/r$? Troveremo che

le onde elettromagnetiche sono generate cariche elettriche accelerate.

Soluzione integrale a $\square^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$

Iniziamo risolvendo per una carica puntiforme variabile (!!?) $q(t)$ ferma in $\mathbf{r} = 0$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q(t) \delta(\mathbf{r}).$$

Per $r \neq 0$ la soluzione deve essere un'onda nel vuoto

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

il cui profilo f è ora determinato dalla sorgente $q(t)$.

Per $r \rightarrow 0$ si ha $f(t - r/c) \simeq f(t)$, e deve ridursi alla soluzione statica:

$$\nabla^2\varphi = \frac{q\delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \text{risolta da} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Combinando le due informazioni, si deduce la soluzione dinamica:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q(t')}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad t' = t - \frac{r}{c}.$$

dove t' è detto **tempo ritardato**. Sulla luna è 1.5 s fa, sul sole 8 min fa.

Soluzione integrale delle eq. di Maxwell

Una carica variabile $q(t)$ non esiste, è un utile artificio matematico: una sorgente generica $\rho(\mathbf{r}, t)$ è somma di $q(t)$ in punti diversi. Per linearità la soluzione è

$$\square^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

L'unica cosa nuova rispetto alla soluzione statica è il **tempo ritardato** t' .

Riassumendo: nella gauge di Lorenz $G = 0$ si ha

$$\begin{cases} \square^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{cases} \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

La soluzione analoga con tempo avanzato viene ignorata per motivi di causalità.

Verifica calcolosa

Passare da ∇^2 (elettrostatica) a \square^2 (elettrodinamica) implica che le sorgenti ρ , \mathbf{J} sono integrate al **tempo ritardato** t' . Verifica: definendo $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t' = t - R/c)}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\square^2 \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\rho \nabla^2 \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \nabla^2 \rho + 2(\nabla \frac{1}{R}) \cdot (\nabla \rho) - \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R} \right] \stackrel{?}{=} -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Il primo termine produce il risultato desiderato $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(\mathbf{R})$ come nel caso statico, gli altri si cancellano usando $\nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t' = -\dot{\rho} \nabla R/c = -\dot{\rho} \mathbf{R}/Rc$ e

$$\nabla^2 \rho = - \left(\frac{\mathbf{R}}{Rc} \right)^2 \ddot{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\nabla \cdot \mathbf{R}}{R} - \frac{\dot{\rho}}{c} \mathbf{R} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\ddot{\rho}}{c^2} - \frac{\dot{\rho}}{cR} (3 - 1).$$

Le onde in $d = 3$ non riverberano

$$\square^2 \varphi = 0 \quad \text{con} \quad \varphi(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \dot{\varphi}(\mathbf{r}, 0) = g(\mathbf{r})$$

| d | Fisica | Soluzione $\varphi(\mathbf{r}) =$ | Grazie a |
|-----|-------------|---|------------|
| 1 | corda | $\frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\rho \leq ct} g(r') dr'$ | D'Alembert |
| 2 | onda marina | $\frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\rho \leq ct} \frac{f(\mathbf{r}') d^2 r'}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} + \frac{1}{2\pi c} \int_{\rho \leq ct} \frac{g(\mathbf{r}') d^2 r'}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}$ | Poisson |
| 3 | suono, luce | $\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \int_{\rho=ct} f(\mathbf{r}') d^2 S' + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\rho=ct} g(\mathbf{r}') d^2 S'$ | Kirchoff |

dove $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ e S' è la sfera ritardata.

($d - 1$ si ricava da d considerando una funzione che non dipende da x_d).

L'onda si propaga con $v = c$; in $d = 3$ passa e se ne va; in $d < 3$ riverbera: a diventa aaa... Esempio: lanciando un sasso in acqua, rimane agitata dopo il passaggio dell'onda.

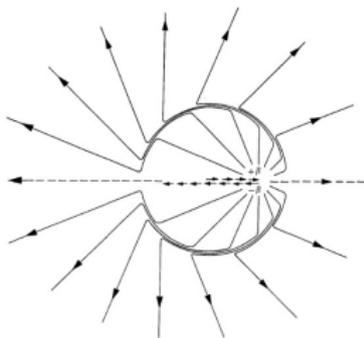
E solo in $d = 3$ le onde sferiche non si distorcono (a diventa b).

Radiazione da carica in moto

Le onde e.m. sono generate da cariche accelerate.

Argomento intuitivo: una q genera un φ centrato sulla posizione ritardata, e quindi un \mathbf{E} come in figura.

Accelerando q da 0 a $\Delta v \ll c$ in un breve tempo Δt si produce un'onda trasversa. Fra r e $r + \Delta_r$ le linee di campo vengono shiftate in direzione ortogonale di $\Delta\theta$:

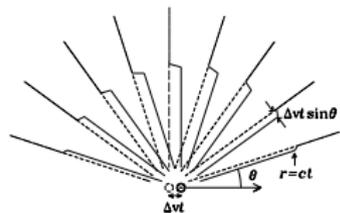


$$E_\theta = E_r \frac{\Delta\theta}{\Delta_r} = E_r \frac{\Delta v t \sin\theta}{c \Delta t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r}{c^2} \frac{dv}{dt} \sin\theta = \frac{q\dot{v} \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{E}$$

Il flusso del vettore di Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0 \propto 1/r^2$ fornisce la potenza totale irradiata, zero parallela a $\dot{\mathbf{v}}$:

$$\frac{dW}{dS} = S_r \quad \frac{dW}{d\Omega} = r^2 S_r = \frac{\sin^2\theta}{4\pi} \frac{q^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$W = \Phi_S = \int \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 q^2 |\dot{\mathbf{v}}|^2}{6\pi c}$$



Radiazione da carica in moto

$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t))$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_q \rho(\mathbf{r}, t)$. Inserendo $1 = \int dt' \delta(t_{\text{rit}} - t')$:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \delta(t_{\text{rit}} - t') \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|}$$

Se $v \ll c$ è immediato ottenere la formula intuitiva:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \Big|_{t-R/c}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}_q}{R} \Big|_{t-R/c}$$

dove $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')$. Derivando solo t' si ottengono (...) i campi di radiazione

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}_q)}{c^2 R}, \quad \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}, \quad \mathbf{n} = \hat{\mathbf{R}}, \quad W = \frac{q^2 |\dot{\mathbf{v}}_q|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Per moto relativistico si ottengono i **potenziali di Lienard-Wiechert**

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_q/c} \right]_{t-R/c}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_q/c} \right]_{t-R/c}$$

da cui, con conti pesanti, i campi in termini di $\beta = \mathbf{v}_q/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 R^2} + \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR} \right]_{t-R/c} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{E}.$$

Radiazione da dipolo elettrico

Caso più semplice: non q in moto ma dipolo elettrico puntiforme $\mathbf{p}(t)$ che oscilla o ruota stando **fermo** nell'origine. Genera

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t')}{r^3}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{r} \quad \text{con} \quad t' = t - \frac{r}{c}.$$

Infatti un filo genera $\mathbf{A} = \mu_0 \int ds I/4\pi r$; un $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ sono come due $\pm q(t)$ a distanza d ; quindi $I = \dot{q}$ genera $\mathbf{A} = \mu_0 I \mathbf{d}/4\pi r$. Poi $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}}$.

- Quando la derivata agisce su $1/r$ produce i soliti campi statici, $E \propto 1/r^3$, $B \propto 1/r^2$ che dominano a piccoli r .
- Quando agisce su t' produce campi di radiazione $E, B \propto 1/r$ che dominano a grandi $r \gg c/\omega$ dove $\omega \sim \dot{p}/p$ è la scala temporale della variazione di p .

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \simeq \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} \hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\mu_0 \ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 c r^2}, \quad \Phi_S = \boxed{W_{\text{el}} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}}$$

Per $p(t) = p_0 \cos \omega t$ la potenza mediata sul tempo vale $\langle W \rangle_t = \mu_0 \omega^4 p_0^2 / 12\pi c$.

Radiazione da dipolo magnetico

Similmente tramite contatti o dualità $E \leftrightarrow B$ si ottiene che un dipolo magnetico μ irraggia $\mathbf{E}_\mu \sim \mathbf{B}_p$ e $\mathbf{B}_\mu \sim \mathbf{E}_p$ e quindi $W_{\text{mag}} = \mu_0 \ddot{\mu}^2 / 6\pi c^3$.

Quindi $\frac{W_{\text{mag}}}{W_{\text{el}}} \sim \left(\frac{\ddot{\mu}}{\dot{p}c}\right)^2 \sim \left(\frac{\text{dimensione}}{\text{tempo } c}\right)^2 \ll 1$ a meno di sistemi speciali.

La Terra ha $\mu = 8.05 \cdot 10^{22}$ J/T disallineato di 11° rispetto ad $\omega = 2\pi/\text{day}$. Quindi μ_\perp produce $\dot{K} = I\omega\dot{\omega} = -W_{\text{mag}}$ con $I \approx \frac{2}{5}MR^2$:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{\mu_0 \mu_\perp^2 \omega^2}{6\pi I c^3} \approx \frac{1}{10^{35} \text{ sec}}.$$

Stelle di massa $M \gtrsim 1.4M_\odot$ collassano a stelle di neutroni: raggio scende di $\lambda \sim r_{\text{atomo}}/r_{\text{nucleo}} \sim 10^5$ fino a $R \sim 10$ km, densità aumenta da atomica a nucleare di λ^3 , $L = I\omega$ costante, quindi ω aumenta di λ^2 fino a $\sim 1/\text{s}$. Si osservano **pulsar** con $\dot{T} = -2\pi\dot{\omega}/\omega^2 \sim 10^{-10}$ da cui $\mu_\perp \sim 10^{30}$ J/T, $B(R) \sim 10^{11}$ T e

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + t/\tau}} \quad \tau = \frac{3\pi I c^3}{\mu_0 \mu_\perp^2 \omega_0^2}$$

Radiazione da sorgente estesa periodica

Assumere $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ è generale per Fourier. Semplifica i conti: il tempo ritardato diventa una fase. Per avere $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ basta

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad k \equiv \frac{\omega}{c}.$$

Vicino ad una sorgente di dimensione d si ha la “zona statica” per $d \ll r \ll \lambda$ in cui la fase vale 1. Lontano a $r \gg d$ si può approssimare $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ dove $\hat{\mathbf{r}}$ è la direzione dell'osservatore. In “zona di radiazione” $d \ll \lambda \ll r$, all'ordine dominante in r/λ si ottiene un'onda sferica $1/r$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')$$

Essendo $d \ll \lambda$ si può espandere la fase esponenziale. All'ordine zero $\exp \simeq 1$ si ritrova la radiazione da dipolo elettrico integrando per parti

$$\int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') = - \int d^3 r' \mathbf{r}' \nabla \cdot \mathbf{J} = \int d^3 r' \mathbf{r}' \dot{\rho} = \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu_0 e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \simeq ik \frac{\mu_0 e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}$$

Al 1o ordine si trova dipolo magnetico e quadrupolo elettrico... [Jackson 9.3]

Radiazione da antenna

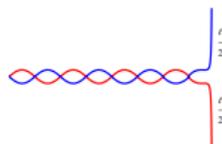
Come al solito, sistemi realistici piccoli sono approssimati come dipoli.

Condensatore: $p = Qd$, quindi $\dot{p} = Id$ e $W_{el} = R_{rad}I^2$ con resistenza di radiazione

$$R_{rad} = \frac{\mu_0 \omega^2 d^2}{6\pi c} = Z_0 \frac{\pi}{6} \frac{d^2}{\lambda^2} \quad \mu_0 = \frac{Z_0}{c}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega.$$

Bacchette conduttrici di lunghezze $\pm \ell/2 \ll \lambda$ percorse da

$$I(z, t) \approx I_0 e^{-i\omega t} (1 - 2|z|/\ell) \quad \Rightarrow \quad p = iI_0 \ell e^{i\omega t} / 2\omega$$



Si può anche usare una bacchetta sola, e l'immagine nella Terra.

Teorema di reciprocità fra emissione e ricezione di onde. Consideriamo due sorgenti $\mathbf{J}_{1,2}$ separate localizzate che producono $\mathbf{E}_{1,2}$, $\mathbf{B}_{1,2}$. Espandendo

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1) = (\nabla \times \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{B}_2 - (\nabla \times \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{E}_1 - (1 \leftrightarrow 2) = \mu_0 (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1)$$

Integrando su tutto il volume ed usando il teorema della divergenza

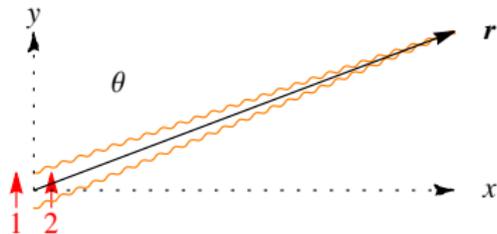
$$\mu_0 \int dV (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1) = \Phi(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2) - \Phi(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1) = 0$$

i flussi sono opposti, radiali ad infinito. Quindi le potenze ricevute sono uguali:

$$\int dV \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \int dV \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1$$

Radiazione da due antenne

L'approssimazione generale per \mathbf{A} diventa intuitiva nel caso di due antenne.



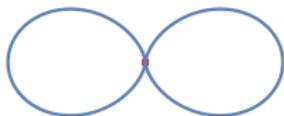
Assumendo differenza di fase Δ possono irraggiare più direzionalmente:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \simeq \mathbf{E}_1(1 + e^{i\delta}) \quad \delta = \Delta + 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{dW_1}{d\Omega} \times |1 + e^{i\delta}|^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} \sin^2 \theta \times 4 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

Esempi:

$$\Delta = 0, d = 0$$



$$\Delta = 0, d = \lambda/2$$



$$\Delta = \pi/2, d = \lambda/4$$

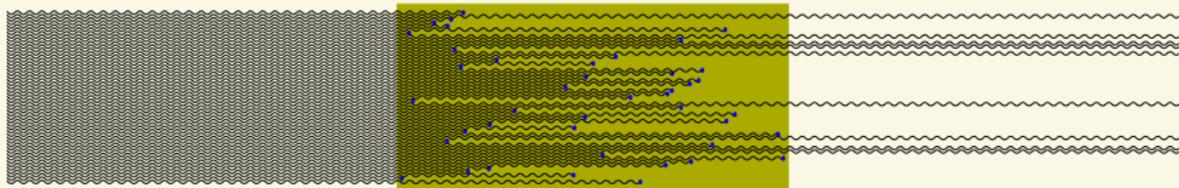


Radiazione da elettrone investito da onda

Un'onda elettromagnetica accelera un **elettrone libero**, che irradia $W = q_e^2 a^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3$ con $a = q_e E / m$. È come se la luce che finisce dentro la 'sezione d'urto' Thomson venisse presa dall'elettrone e irraggiata:

$$\sigma_e \equiv \frac{W}{S} = \frac{q_e^2 (q_e E / m_e)^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3}{\epsilon_0 c E^2} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$$

dove $r_e = q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ è il raggio classico dell'elettrone. Luce 'corta' (raggi X...) vede gli elettroni negli atomi come liberi. Entra nella materia in quanto σ_e è minore della dimensione degli atomi: radiografia $S \propto e^{-n_e \sigma_e x}$



Stessa W ottenuta vedendo l'elettrone come un dipolo $p = q_e x$, anche a regime

$$\ddot{x} \simeq -\omega^2 x = \frac{q_e E}{m_e} \quad \Rightarrow \quad \ddot{p} \simeq -\omega^2 p = \frac{q_e^2 E}{m_e}$$

Radiazione da atomo investito da onda

Irraggiamento da atomo investito da onda e.m. Sistema quantistico, approssimato classicamente come p ed e tenuti fermi da forza elastica $\omega_0 \gg \omega$. A regime l'onda produce piccole oscillazioni di e ed un dipolo oscillante $p = q_e x$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \simeq (-\omega^2 + \omega_0^2)x = \frac{q_e E}{m_e} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{legato}} \stackrel{\omega \ll \omega_0}{\simeq} -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} x_{\text{libero}}$$

e quindi $\sigma_{\text{atomo}} = \sigma_e (\omega/\omega_0)^4$: per via dell' ω^4 il cielo è blu lontano dal sole. Le nuvole sono bianche perché sono riflessione/rifrazione da gocce di acqua.



Ora sapete perchè

Difficoltà finali

Problema del corpo nero

Un generico campo $\varphi(\vec{x}, t)$ come quelli e.m. può essere discretizzato come tanti gradi di libertà. Fourier con periodicità in cubo di lato L :

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{n}} q_{\vec{n}}(t) e^{i\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \vec{x}} \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \vec{k}_{\vec{n}} = \frac{2\pi\vec{n}}{L}.$$

Ogni $q_{\vec{n}}$ è un oscillatore con interazioni, che nell'e.m. sono fra il campo e le cariche.
Energia

$$\langle H \rangle = \sum_{\vec{n}} \omega_{\vec{n}}^2 \langle q_{\vec{n}} q_{-\vec{n}} \rangle + \text{interazioni}.$$

Interazioni generiche evolvono il campo verso uno **stato termico in cui ogni grado di libertà $q_{\vec{n}}$ ha energia $\sim kT$. Ma un campo ha infiniti gradi di libertà.**

Questo **problema del corpo nero** affligge il campo e.m. e teorie di campo iperboliche i.e. onde. Ad esempio una corda vibrante è approssimata da un'equazione d'onda su distanze maggiori degli atomi. L'energia fluisce da modi macroscopici a microscopici, il moto della corda si smorza, diventando moto degli atomi: attrito. Un uragano si divide in sotto-sistemi fino ad arrivare agli atomi.

Una teoria di campo classica non può avere senso fino a distanze zero.

La fine è vicina

L'atomo di idrogeno collassa irraggiando rapidamente $E = \infty$ presa da

$$U = -e^2/4\pi\epsilon_0 r \rightarrow -\infty \text{ a } r \rightarrow 0 \quad (\text{anche } E = m_e c^2 + m_p c^2 + U < 0).$$

Potenza irraggiata $W = e^2 a^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3$ dove $a = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 m_e = v^2 / r$ per un e in orbita circolare. Eliminando $r = e^2 / 4\pi\epsilon_0 m v^2$, in un periodo $T = 2\pi r / v$ perde

$$\Delta E \sim W T = \frac{4\pi m_e v^5}{3c^3} = \epsilon |E| \quad \epsilon = \frac{\Delta E}{E} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^3 \ll 1$$

dove ϵ è la frazione di energia E persa per giro:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_e v^2}{2}.$$

Fa $\sim 1/\epsilon$ giri, per un tempo $\tau \sim 12\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 r^3 c^3 / e^4 \sim 10^{-11}$ s.

Un conto più preciso conferma che l'atomo collassa in un tempo finito τ

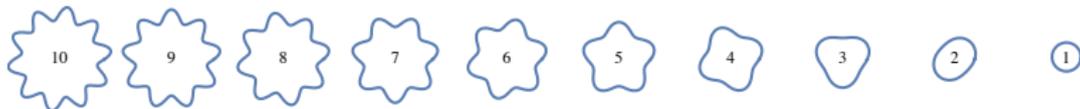
$$-\dot{E} = W = \frac{32}{3} \frac{4\pi\epsilon_0 E^4}{c^3 e^2 m_e^2} \quad \Rightarrow \quad E(t) = \frac{E_0}{(1 - t/\tau)^{1/3}}$$

$$\tau = \frac{e^2 c^3 m_e^2}{128\pi\epsilon_0 |E_0|^3} = \frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^3}{e^4} r_0^3 \sim 10^{-11} \text{ s.}$$

Un'orbita ellittica perde energia ancora più rapidamente diventando circolare.

Meccanica quantistica

Gli atomi eccitati irradiano circa come previsto da Larmor, ma su frequenze discrete. Poi si fermano, avendo tutti lo stesso raggio, diversamente dai pianeti. Anche gli elettroni sono descritti da campi $\psi(\mathbf{r}, t)$, che soddisfano l'equazione d'onda di Schroedinger. Elettroni liberi hanno lunghezza d'onda $\lambda = h/m_e v$ con $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J s. Diffrazione osservata. Elettroni in atomi formano stati stabili di raggi $2\pi r \sim N\lambda$ dove $N = 1, 2, \dots$. Non possono collassare a $r < \lambda$.



Ma non ha senso, gli elettroni sono particelle individuali, non onde...

Gli elettroni sono particelle e onde. Anche la luce. Si osserva che illuminando una lastra fotografica con luce di frequenza ν escono elettroni di energia $E = h\nu - E_B$, indipendentemente dall'intensità dell'onda. Una luce intensa ne fa uscire tanti; una luce fioca ne fa uscire pochi, a tempi casuali...

...

tutto è campi quantistici, onde di probabilità che si manifestano come particelle.