

Teoremi Thevenin/Norton

RIASSUNTO

- Il “carico”
- Teorema di Thevenin
- Come calcolare V_{Th} ed R_{Th} conoscendo il circuito
- Come misurare V_{Th} ed R_{Th}
- Esempi
- Generatore di tensione ideale e reale
- Teorema di Norton
- Generatore di corrente ideale e reale
- Adattare il carico esterno per massimizzare il trasferimento di potenza

Il problema del “carico”

- Si consideri un circuito composto (per il momento) da sole resistenze e generatori di tensione.
- Si immagini di aggiungere tra due punti A e B del circuito una resistenza R_c che chiameremo “carico”.
- Possiamo porci le seguenti domande:
 - Quanto vale la tensione tra i punti A e B dopo avere aggiunto il carico?
 - Quanto vale la corrente che scorre nel carico?
 - Quanto vale la potenza assorbita dal carico?
- Avendo la risposta alla prima domanda, consentirebbe di rispondere immediatamente alle altre due: infatti si ha:

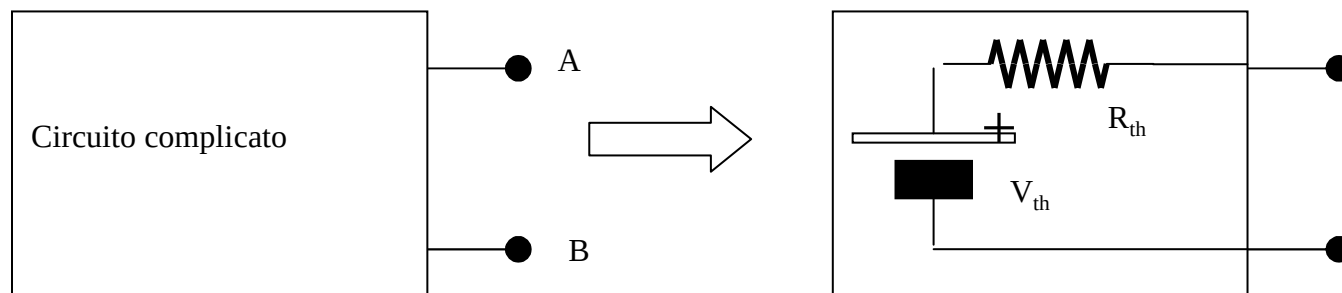
$$I = \frac{V_{AB}}{R_c}, \quad W = \frac{V_{AB}^2}{R_c}$$

Quando si presenta?

- Il problema proposto si presenta quando bisogna collegare assieme due apparecchiature: ad esempio, quando si collega una lampadina ad un generatore, o un altoparlante ad un amplificatore, o un tester a due punti di un circuito...
- In generale, abbiamo un apparecchio che fornisce energia, corrente, o tensione ad un secondo: il collegamento si effettua ponendo in contatto una coppia di fili che esce dal primo (uscita) con un'altra coppia che entra nel secondo (ingresso).
- In linea di principio, il problema sarebbe estremamente complicato se non ci venisse in soccorso il teorema di Thevenin.

Il teorema di Thevenin

- Si consideri un circuito complicato, formato però esclusivamente da resistenze e generatori di tensione.
- Si scelgano due punti del circuito, A e B: si immagini di chiudere il circuito in una scatola da cui escono solamente due fili, collegati rispettivamente ai punti prescelti.
- Il teorema di Thevenin dice che in questi casi sussiste l'equivalenza:



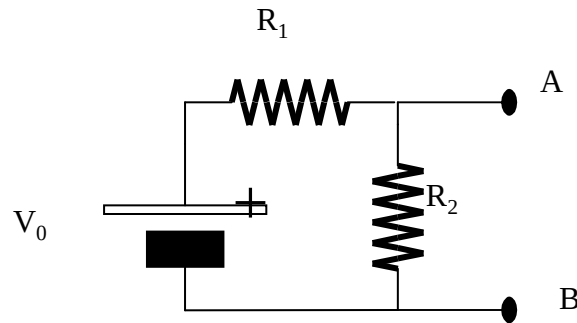
- “Una rete comunque complessa vista dall'esterno, a partire da due suoi punti A e B e' equivalente ad un generatore di tensione V_{Th} in serie ad una resistenza R_{Th} ”:
 - V_{Th} è uguale alla differenza di potenziale tra i punti A e B
 - R_{th} si ottiene sostituendo, nello schema del circuito, tutti i generatori di tensione con dei cortocircuiti (e i generatori di corrente con circuiti aperti) e calcolando la resistenza tra i punti A e B nel circuito così ottenuto.

I parametri V_{th} e R_{th}

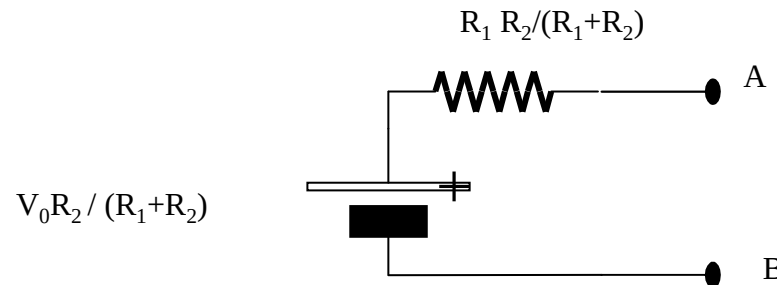
- Ai fini di un'utilizzazione al suo esterno il circuito è assolutamente equivalente a (e quindi assolutamente indistinguibile da) un circuito composto da un generatore di tensione ideale V_{Th} e da una resistenza R_{Th} in serie ad esso.
- I parametri dell'equivalente di Thevenin di un circuito complesso sono calcolabili se e solo se il circuito è conosciuto in dettaglio.
- Nella maggior parte dei casi, non è possibile accedere direttamente al circuito. In questi casi è però possibile misurare direttamente i parametri in oggetto.

Esempio I

- Ad esempio si consideri il circuito in figura:

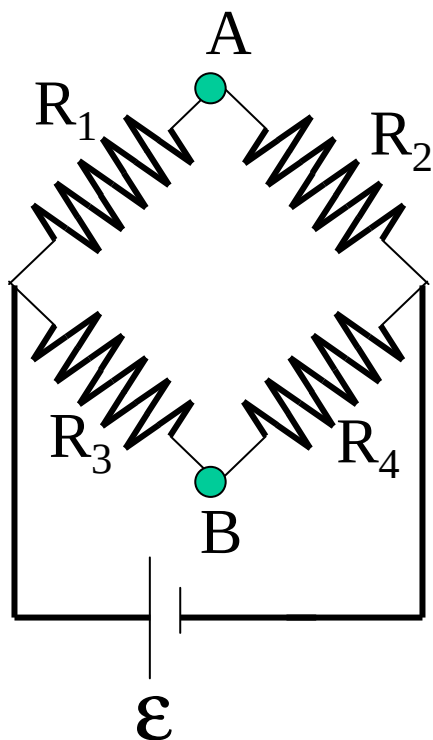


- La tensione a vuoto tra i punti A e B è data dalla formula del partitore, mentre sostituendo il generatore con un cortocircuito le resistenze R_1 ed R_2 vengono viste dai punti A e B in parallelo. Il circuito di Thevenin equivalente è allora il seguente:



Esempio II

Consideriamo il circuito a ponte con due suoi punti A e B.



Sostituiamo al generatore ε un corto-circuito e troviamo $R_{Th} = (R_1 // R_2) + (R_3 // R_4)$:
$$R_{Th} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3 R_4 / (R_3 + R_4)$$

La ddp tra A e B risulta:

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= V_A - V_C - (V_B - V_C) = \\ V_{Th} &= \varepsilon [R_2 / (R_1 + R_2) - R_4 / (R_3 + R_4)] = \\ &= \varepsilon [1 / (1 + R_1 / R_2) - 1 / (1 + R_3 / R_4)] \end{aligned}$$

Mettendo una resistenza R come carico, non vi scorre alcuna corrente se V_{Th} e' nulla, ovvero vale la nota relazione:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Misura dei parametri V_{Th} ed R_{Th}

- Se non si conosce lo schema del circuito, è comunque possibile misurare i valori di V_{Th} ed R_{Th} .
 - Per misurare V_{Th} , basta collegare un voltmetro tra i punti A e B. La resistenza del voltmetro deve essere però più grande di R_{Th} , per non perturbare la misura.
 - Per misurare R_{Th} , basterebbe in teoria collegare un amperometro direttamente ai punti A e B e misurare I_{AB} .

La resistenza R_{Th} è data da: $R_{Th} = V_{Th} / I_{AB}$

La misura di R_{Th} in realtà:

• In pratica, non è consigliabile collegare un amperometro direttamente all'uscita di un circuito, per evitare sovraccarichi. Si preferisce allora misurare R_{Th} collegando tra i punti A e B una resistenza di valore noto R , misurando di quanto diminuisce la tensione tra i punti A e B.

$$V_{mis} = V_{Th} \frac{R}{R + R_{Th}} \rightarrow R_{Th} = R \left(\frac{V_{Th} - V_{mis}}{V_{mis}} \right)$$

- Si ha la massima sensibilità per $R = R_{Th}$.

Impedenza di ingresso e di uscita

- L'importanza del teorema di Thevenin sta nel fatto che un circuito (lineare) per quanto complesso si puo' sempre schematizzare con un generatore di tensione in serie ad una resistenza, secondo il teorema.
- Riferendosi alla resistenza di Thevenin, si parla allora di resistenza di
 - ingresso di un circuito utilizzato come carico
 - uscita di un circuito utilizzato come alimentatore
- Il carico di solito quando e' staccato non ha una differenza di potenziale propria: gli apparecchi utilizzatori quindi equivalgono ad una sola resistenza, detta appunto resistenza di carico.
- Spesso, invece della parola resistenza, si adopera il termine impedenza, che è più generale e che definiremo in seguito.

Esempio: il generatore di tensione reale

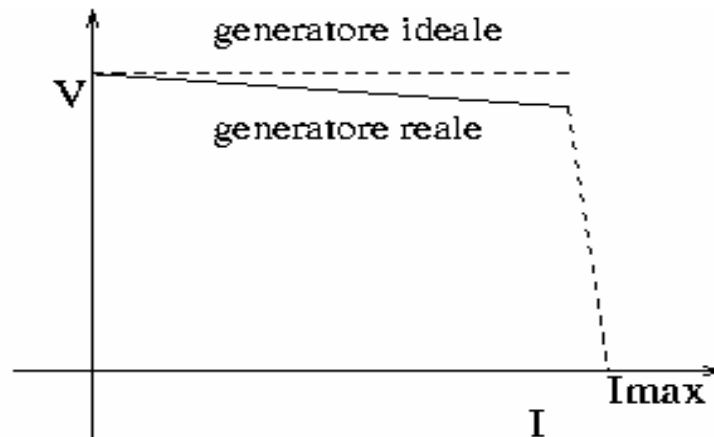
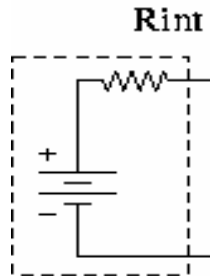
- Il generatore di tensione ideale è in grado di mantenere costante la d.d.p. tra i suoi estremi indipendentemente dalla corrente fornita.
- Il generatore reale possiede invece una resistenza interna che fa sì che la tensione fornita diminuisca all'aumentare della corrente:

$$V = V_0 - R_{\text{int}} I$$

- La scarica di una batteria si può allora imputare ad un aumento della resistenza interna in funzione del tempo.

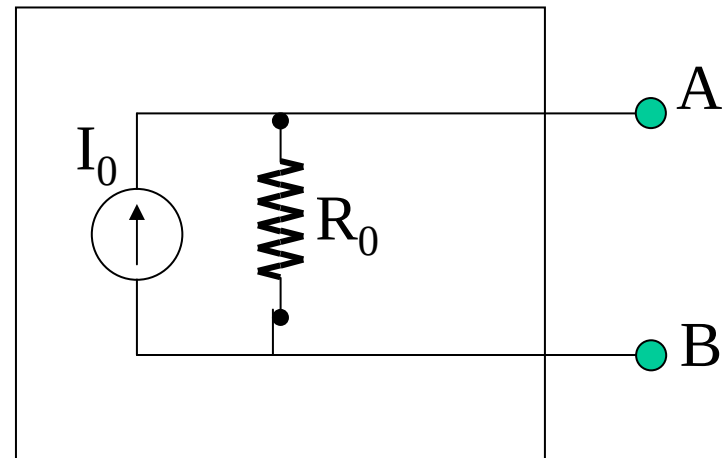
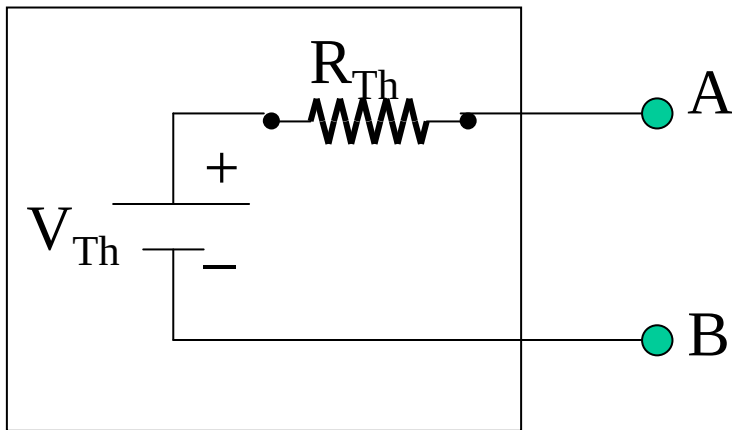
Alimentatori

- Negli alimentatori, come quello adoperato in laboratorio, esiste una corrente massima che il generatore è in grado di fornire.
- Alcuni sono protetti automaticamente dai cortocircuiti, per cui non possono erogare una corrente maggiore di una data corrente massima (“compliance”) e la tensione in uscita scende rapidamente a zero.
- Altri, sono protetti tramite un fusibile, un filo di stagno sottilissimo che in caso di corrente elevata fonde interrompendo il circuito.



Teorema di Norton

- “Una rete comunque complessa vista dall'esterno a partire da due suoi punti A e B, e' equivalente ad un generatore di corrente I_0 (corrente che scorre cortocircuitando A e B) in parallelo ad una resistenza R_0 tale che la ddp a circuito aperto tra A e B risulta $= I_0 R_0$



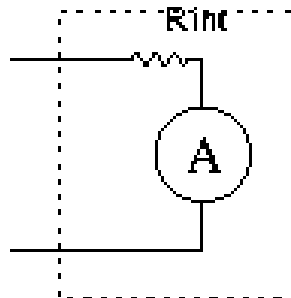
- Risulta $R_0 = R_{Th}$ e $I_0 = V_{Th}/R_{Th}$ (quantita' equivalenti di Thevenin)



Generatore reale di corrente

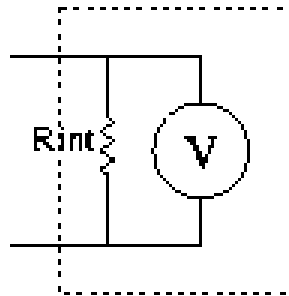
Amperometri

- Un amperometro ideale (A) ha resistenza nulla per non turbare il circuito.
- Un amperometro reale avrà invece una sua resistenza interna, che dev'essere la più piccola possibile.
- La resistenza interna decresce al crescere della scala di lettura: se si ha il dubbio che una misura di corrente possa essere turbata da effetti dovuti alla resistenza interna, si può provare a cambiare scala di lettura per vedere cosa succede.
- In un amperometro analogico la resistenza interna (della bobina) è dell'ordine di qualche centinaio di Ω . Per un fondo scala da 500 mA quindi la resistenza è $\sim 1 \Omega$. ($\sim 1 \text{ k}\Omega$ per il fondo scala da 500 μA)



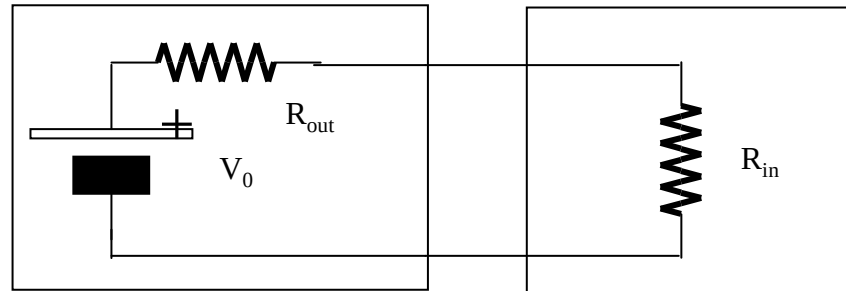
Voltmetri

- Un voltmetro ideale ha resistenza interna infinita.
- In un voltmetro reale, la resistenza deve essere la più grande possibile.
- Un voltmetro digitale ha una resistenza interna tipica di $10\text{ M}\Omega$.
- Un voltmetro analogico ha una resistenza interna di qualche decina o centinaia di $\text{k}\Omega$, che varia col fondo scala: un fondo scala alto ha un'alta resistenza.
- Nei tester di laboratorio, la resistenza è di $20(\text{k}\Omega/\text{V}) * V_{\text{fs}}$: vale quindi $40\text{ k}\Omega$ nel fondo scala di 2 V e $200\text{ k}\Omega$ in quello da 10 V



Adattare l'impedenza

- Si supponga di collegare un ingresso con una uscita.



- la tensione ai capi dell'utilizzatore è
$$V_{in} = \frac{R_{in}}{R_{out} + R_{in}} V_0$$
- la corrente che vi scorre è
$$I_{in} = \frac{V_0}{R_{in} + R_{out}}$$
- per massimizzare la tensione, la resistenza di ingresso deve essere molto maggiore della resistenza di uscita
- per massimizzare la corrente, la resistenza di ingresso deve essere molto minore della resistenza di uscita

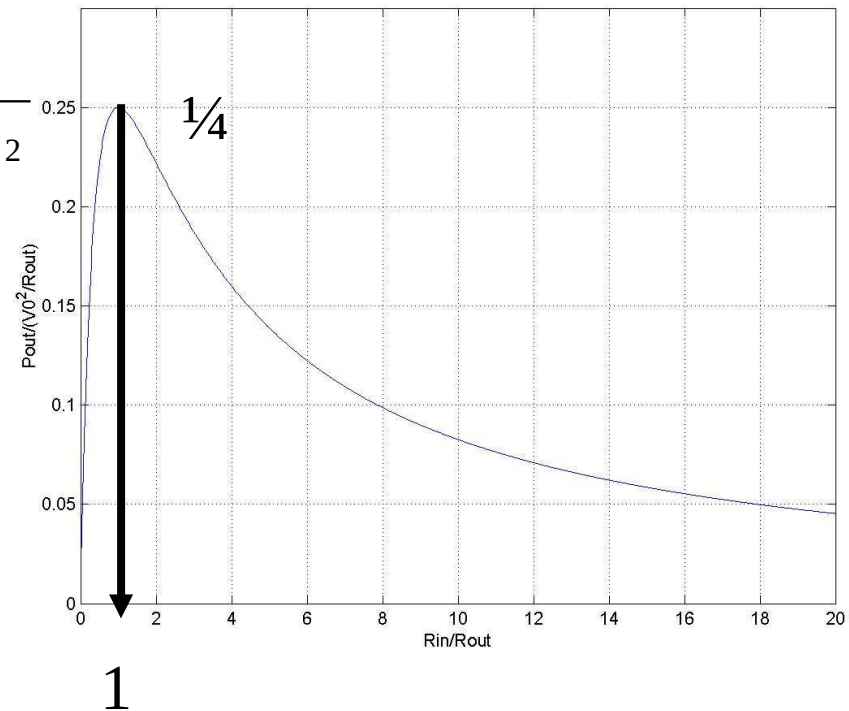
Potenza assorbita

- La potenza assorbita dal carico è:

$$P_{out} = R_{in} I_{in}^2 = \frac{R_{in} V_0^2}{(R_{in} + R_{out})^2} = \frac{V_0^2}{R_{out}} \frac{\frac{R_{in}}{R_{out}}}{(1 + \frac{R_{in}}{R_{out}})^2}$$

- E' massima quando $R_{in}=R_{out}$ e vale:

$$P_{max} = \frac{V_0^2}{4R_{out}}$$



- Quindi per trasferire al carico la massima potenza, la resistenza di ingresso deve essere uguale a quella di uscita.
- In queste condizioni sulla resistenza interna viene dissipata una quantità di energia pari a quella erogata: il trasferimento di energia ha una efficienza del 50%.