

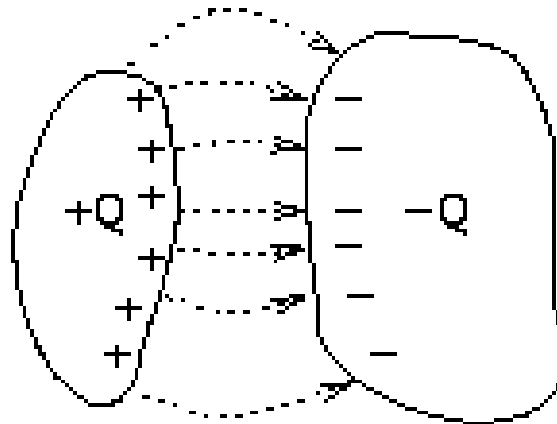
# Il condensatore

## RIASSUNTO:

- Capacita'
- Condensatori a geometria piana, cilindrica, sferica
- La costante dielettrica  $\epsilon_r$
- Condensatore ceramico, a carta, elettrolitico
- Il condensatore come elemento di circuito:
  - Condensatori in serie e parallelo
- Carica del condensatore: tempo caratteristico
  - Energia immagazzinata un un condensatore
  - Energia dissipata durante la carica di un condensatore
- Scarica del condensatore:
  - Energia dissipata durante la scarica di un condensatore

# Il condensatore

- Un condensatore è costituito in linea di principio da due conduttori isolati e posti a distanza finita, detti armature. Caricando i due conduttori con carica opposta, si forma tra di essi un campo elettrico, e si produce quindi una differenza di potenziale.



# Capacità

- Si trova che la differenza di potenziale tra i due conduttori è proporzionale alla carica depositata su di esse.
- Vale allora la formula:

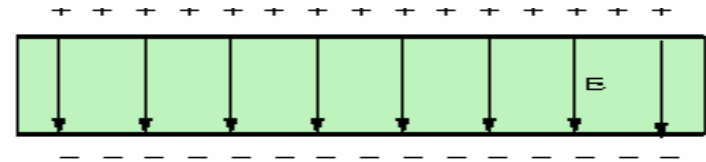
$$Q = CV$$

- Il coefficiente  $C$  è detto capacità del condensatore. Si misura in Farad (simbolo  $F$ ), ma le unità usate in pratiche sono il picofarad ( $pF$ ), il nanofarad ( $nF$ ) e il microfarad ( $\mu F$ ).
- La capacità dipende dalla geometria delle armature e dal materiale ( $\epsilon_r$ ) interposto tra di esse.

# Geometrie di condensatore

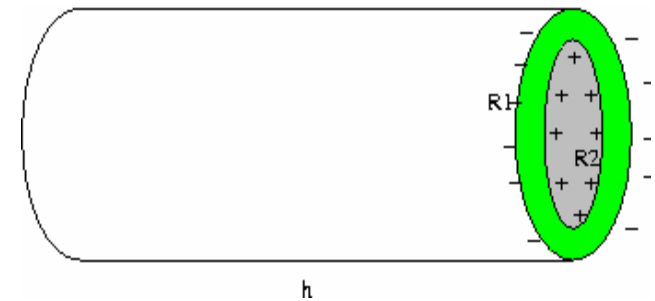
- Condensatore piano:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$$



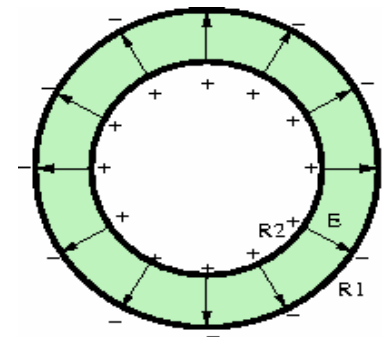
- Condensatore cilindrico:

$$C = 2\pi\epsilon_r\epsilon_0 \frac{h}{\ln(R_1 / R_2)}$$



- Condensatore sferico

$$C = 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

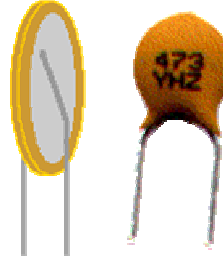


# Costante dielettrica relativa

- La presenza di un materiale tra le armature di un condensatore ne aumenta la capacità di un fattore (numero puro)  $\epsilon_r$  detto costante dielettrica relativa che dipende dalla caratteristica del materiale.
- Valori comuni della costante dielettrica relativa sono compresi tra 2 e 10 (carta, olio, gomma, mica, vetro porcellana...) ma ad esempio l'acqua presenta un valore di 81 e per altri materiali come ad esempio gli ossidi di titanio si riescono a raggiungere valori compresi tra 100 e 200.
- In presenza di campi elettrici intensi, però, si possono creare scintille tra le armature in grado di struggere i condensatori. Il minimo campo in grado di produrre una scintilla è detto rigidità dielettrica e vale tipicamente qualche decina di kV/mm.

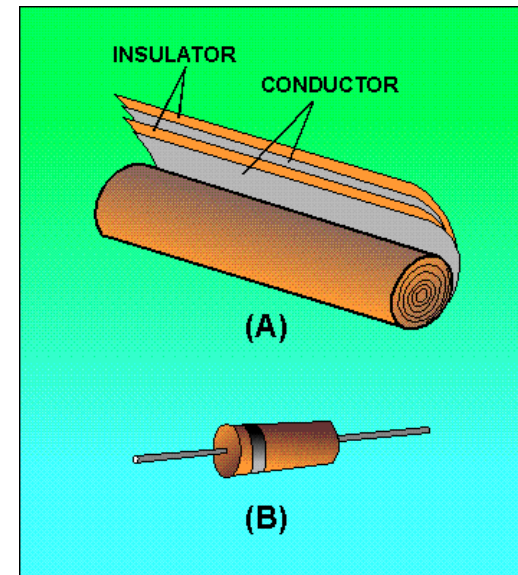
# Condensatori ceramici

- Condensatori ceramici:
  - I condensatori ceramici sono costituiti da un sandwich di lastre conduttrici alternate con materiale ceramico.
  - Hanno tipicamente capacità piccole (da qualche pF a qualche nF), e possono resistere a grandi d.d.p.
  - I valori sono solitamente espressi in pF: ad esempio 103 indica  $10 \cdot 10^3 \text{ pF} = 10 \text{ nF}$



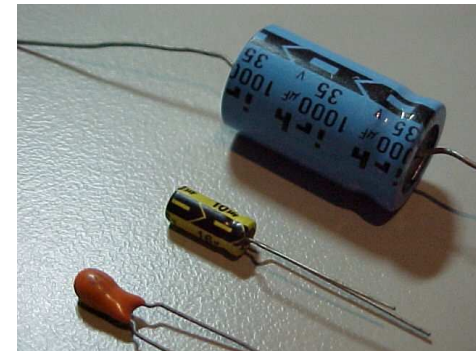
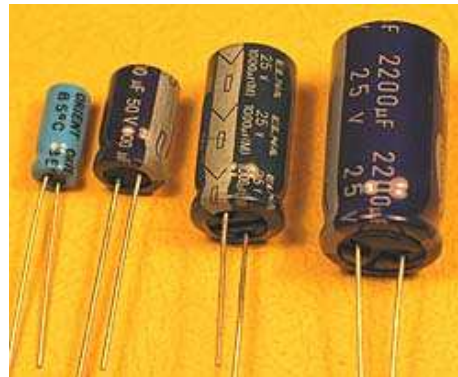
# Condensatori a carta

- Condensatori a carta o a lamina:
  - Sono costituiti da due lamine metalliche intervallate da due fogli di carta o di lamina plastica arrotolati a cilindro.
  - Hanno capacità più grandi dei condensatori ceramici (fino a uno o due  $\mu\text{F}$ ), ma sono meno resistenti alle alte tensioni.
  - Solitamente, i valori sono espressi in  $\mu\text{F}$ , seguiti da una lettera che indica la tolleranza: .1K vuol dire 0.1  $\mu\text{F}$  con una tolleranza del 10%, 4.7M indica 4.7  $\mu\text{F}$  con una tolleranza del 20%



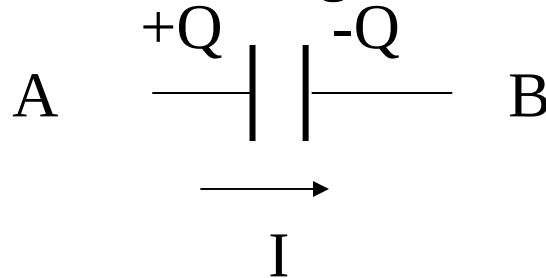
# Condensatori elettrolitici

- Condensatori elettrolitici:
  - Sono costituiti da due lamine metalliche avvolte a cilindro, separate da un sottile strato di ossido ottenuto tramite un procedimento elettrolitico.
  - Hanno capacità grandissime (centinaia di  $\mu\text{F}$ ) , ma resistono tipicamente a poche decine di Volts di d.d.p.
  - Hanno una polarità da rispettare: una delle due armature va sempre caricata positivamente e l'altra sempre negativamente.
  - Visto che sono abbastanza voluminosi, i valori sono indicati chiaramente. Le tolleranze non sono indicate, perché sono molto grandi: intorno al 50%



# Il condensatore come elemento circuitale

- Il simbolo del condensatore è il seguente:



- Se una corrente  $I$  giunge sull'armatura positiva del condensatore, allora in un intervallo di tempo  $\Delta t$  la carica aumenta di una quantità  $\Delta Q = I\Delta t$ .
- Una corrente uguale porterà via una quantità di carica uguale ed opposta dall'altra armatura.
- Si dice comunemente che nel condensatore “scorre corrente” anche se in realtà tra le due armature non si ha un reale movimento di cariche.

# Relazione tra tensione e corrente

- La caduta di potenziale tra i punti A e B:

$$V = Q / C$$

- La relazione tra carica e corrente è:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- La caratteristica tensione-corrente è quindi:

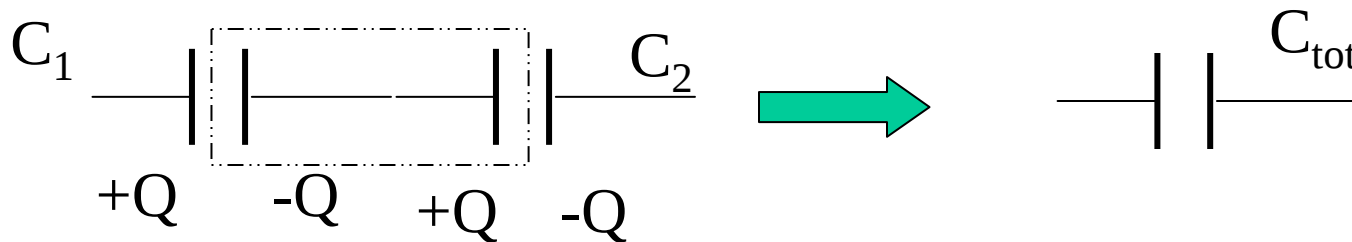
$$I = C \frac{dV}{dt}$$

NOTA:  $\Delta V = \Delta Q / C$

Se abbiamo una variazione “molto veloce” della tensione ad un capo del condensatore, poiché la variazione di carica sulle sue armature non può essere istantanea, la variazione del potenziale ai capi del condensatore deve essere piccola, quindi la variazione veloce della tensione viene trasmessa al secondo capo del condensatore.

# Condensatori in serie

- Come nel caso delle resistenze, i condensatori si possono collegare in serie o in parallelo.



- Quando sono collegati in serie, la carica è la stessa, mentre la d.d.p. ai capi della coppia di condensatori è uguale alla somma delle singole d.d.p.:

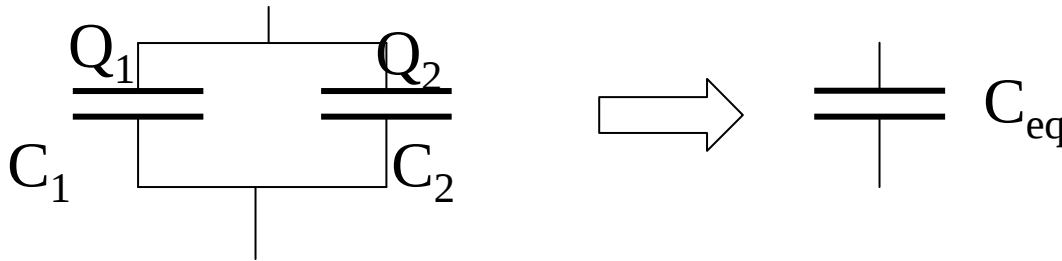
$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{tot}}$$

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_{tot} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

# Condensatori in parallelo

- Quando due condensatori vengono disposti in parallelo, la d.d.p. tra le armature è la stessa, ma la carica si distribuisce tra i due.



- Quindi la carica del condensatore equivalente è uguale alla somma delle cariche:

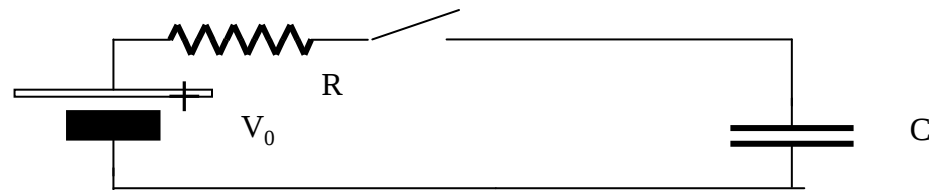
$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

- Due condensatori posti in parallelo equivalgono quindi ad un condensatore di capacità pari alla somma delle singole capacità.

# Carica del condensatore

- Per caricare un condensatore, ovvero per depositare le cariche positive e negative sulle armature, si utilizza di solito il circuito seguente:



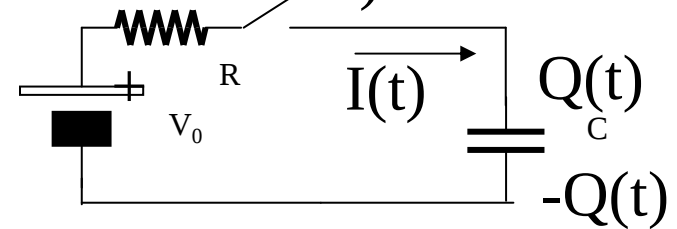
- La resistenza  $R$  è ineliminabile, in quanto anche collegando il generatore direttamente al condensatore, rimane presente la sua resistenza interna.
- Intuitivamente, si capisce che man mano che il condensatore si carica, il potenziale della armatura collegata al polo positivo aumenta, e si avvicina a quello del generatore.
- Allora la differenza di potenziale ai capi della resistenza diminuisce, per cui la corrente diminuisce di intensità.
- Quindi il condensatore si carica dapprima velocemente, poi sempre più lentamente.

# Equazioni del circuito

- L'equazione della maglia (alla chiusura dell'interruttore):

$$V_R + V_C - V_0 = 0$$

$$RI + \frac{Q}{C} = V_0$$



$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0$$

$$\frac{dQ}{Q - CV_0} = -\frac{dt}{RC}$$

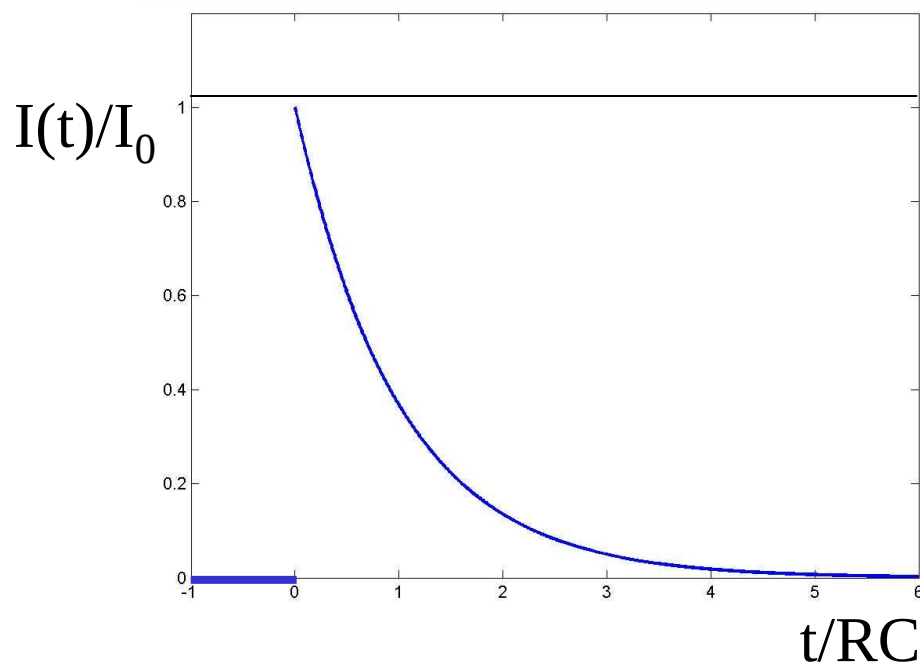
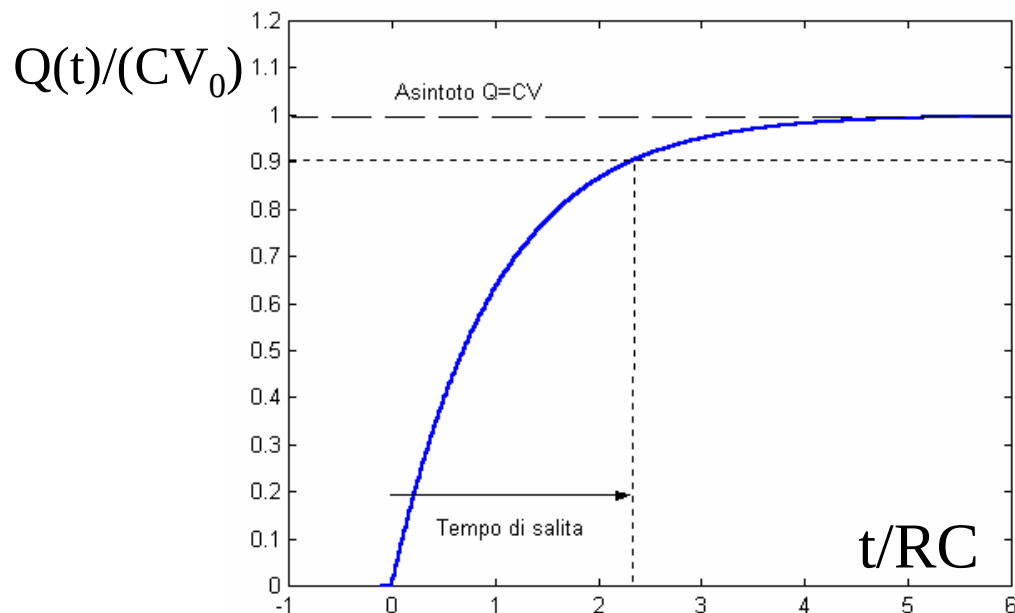
$$\ln \left| \frac{Q(t) - CV_0}{Q(t=0) - CV_0} \right| = -\frac{t}{RC}$$

- Se il condensatore è scarico (per  $t=0$ )  
si ottengono le eq. della carica e corrente:

$$Q(t) = CV_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

# Grafico del processo di carica



- Grafico della carica di un condensatore.
- Il tempo  $RC$  è detto tempo caratteristico del circuito.
- Il tempo di salita è definito come il tempo impiegato dal condensatore per raggiungere il 90% del valore massimo:

$$t_{90\%} = -\log(1 - 0.9) RC = 2.3 RC$$

- La corrente iniziale e':  
 $I(t=0)=V_0/R$  e decresce esponenzialmente nel tempo

# Energia

L'energia immagazzinata in un condensatore:

$$dU_C = VdQ$$

$$U_C = \int_0^{Q_f} VdQ = \int_0^{Q_f} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C} = \frac{1}{2} CV_0^2$$

L'energia dissipata nella resistenza durante la carica del condensatore

$$E_{joule} = \int_0^{\infty} P(t)dt = \int_0^{\infty} RI^2(t)dt = \int_0^{\infty} R\left(\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{V_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{V_0^2}{R} \frac{RC}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{2} CV_0^2$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

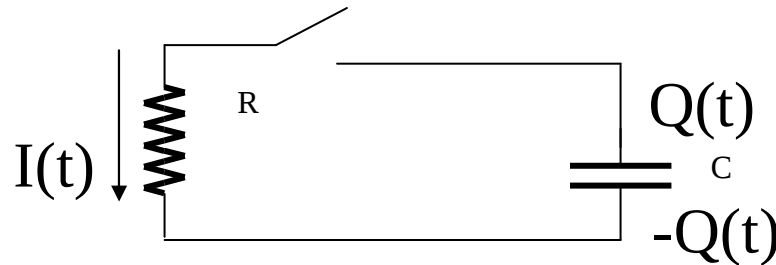
L'energia totale fornita dal generatore

durante la carica :

$$E_{tot} = U_C + E_{joule} = CV_0^2 = \frac{Q_f^2}{C}$$

# Scarica del condensatore

- Per scaricare il condensatore, si utilizza il circuito seguente:



- Le equazioni stavolta si riducono a :

Una corrente che scorre  
come in figura causa una  
variazione  $-dQ$  della carica  
sull'armatura superiore

$$V_R - V_C = 0$$

$$Ri - \frac{Q}{C} = 0$$

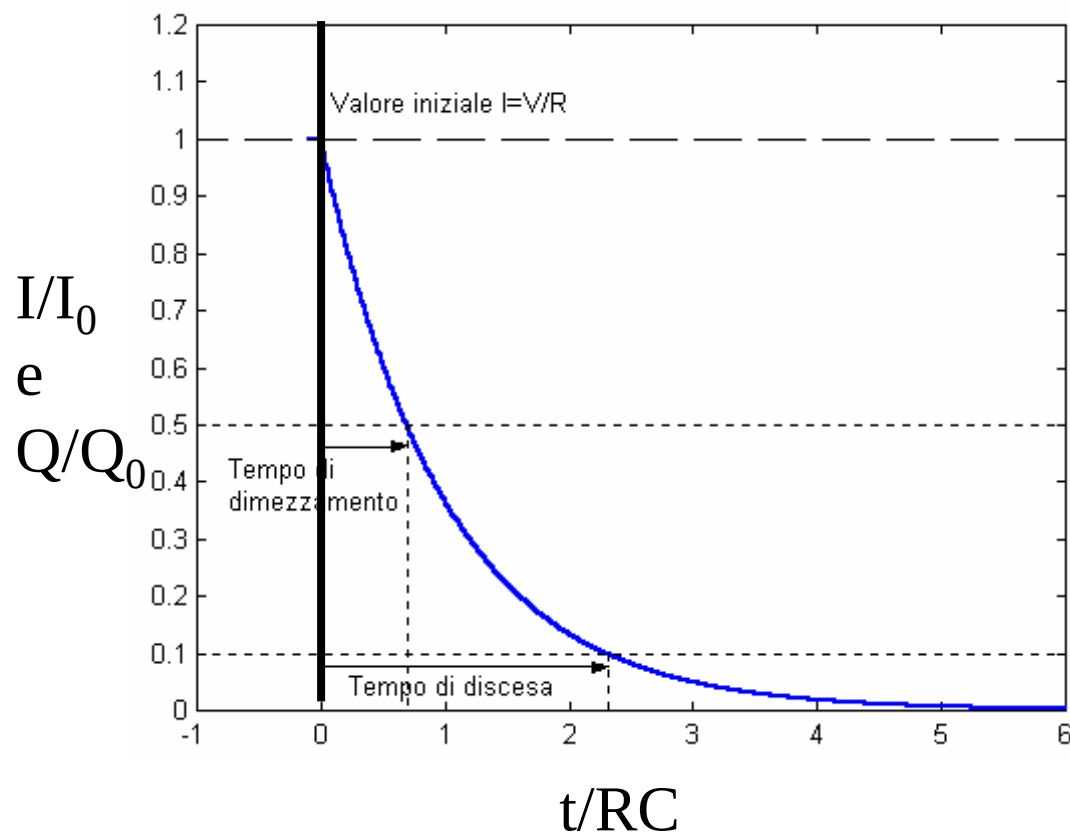
$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

$$-R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

- La soluzione è un esponenziale decrescente:

$$Q(t) = Q_o e^{-\frac{t}{RC}} \quad I(t) = \frac{Q_o}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

# Grafico del processo di scarica



- Corrente in funzione del tempo. Lo stesso grafico determina l'andamento della carica.
- Il tempo di dimezzamento è definito come il tempo in cui la carica o la corrente raggiunge metà del valore iniziale.
- Il tempo di scarica è definito come il tempo in cui la carica o la corrente raggiunge il 10% del valore iniziale.

$$t_{1/2} = -\log(0.5) RC = 0.69 RC$$

$$t_{10\%} = -\log(0.1) RC = 2.3 RC$$

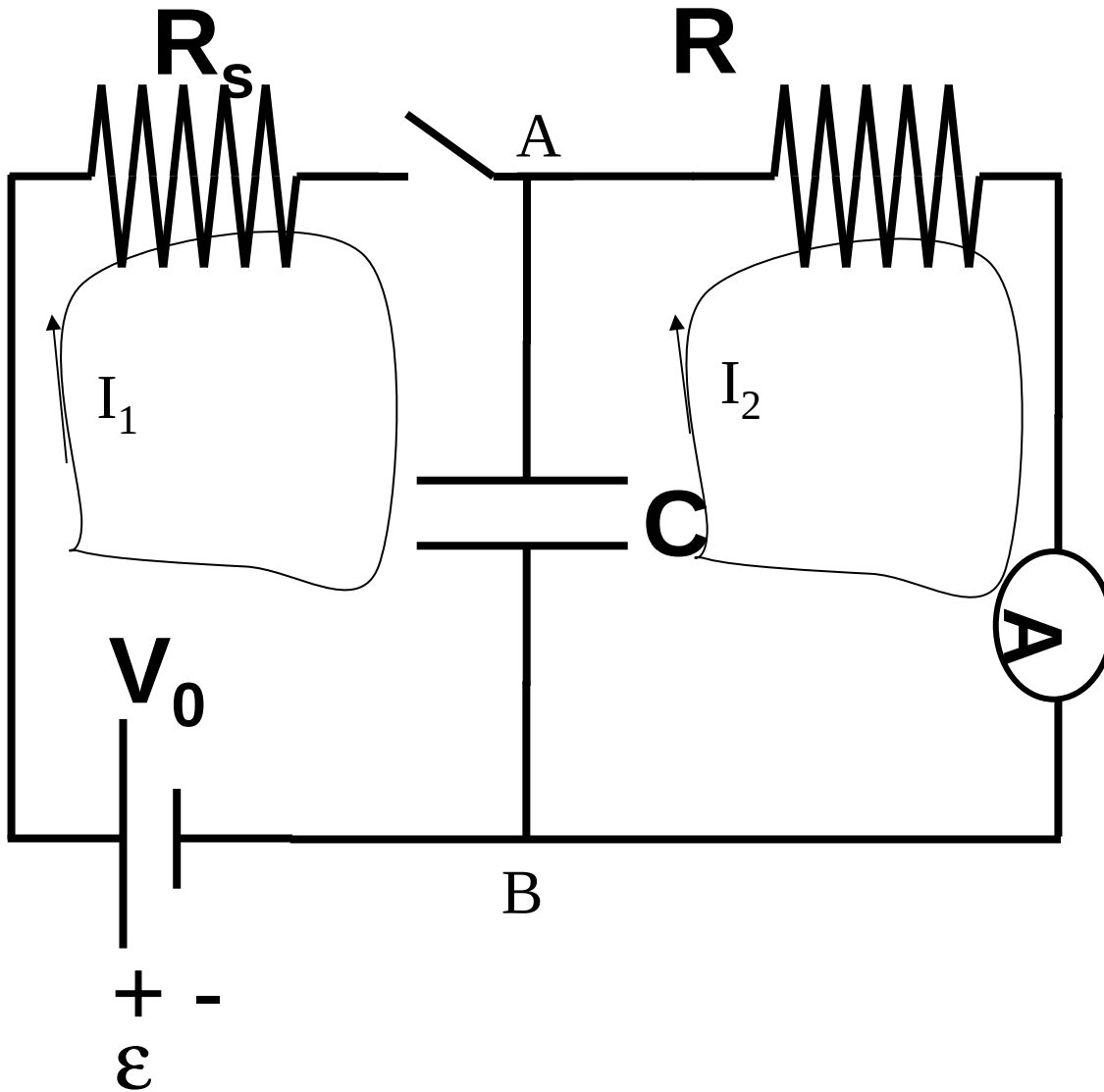
## Energia:

(nella resistenza) viene dissipata durante la scarica l'energia precedentemente immagazzinata nel condensatore:  $E_{\text{joule}} = U_C$

# Esercizio:

risolvere il circuito (alla chiusura dell'interruttore)

3 rami, 2 nodi  $\rightarrow$  2 maglie indip.



$$Q(t = 0) = 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon = R_s I_1 + \frac{Q}{C} \\ \frac{Q}{C} = R I_2 \end{cases}$$

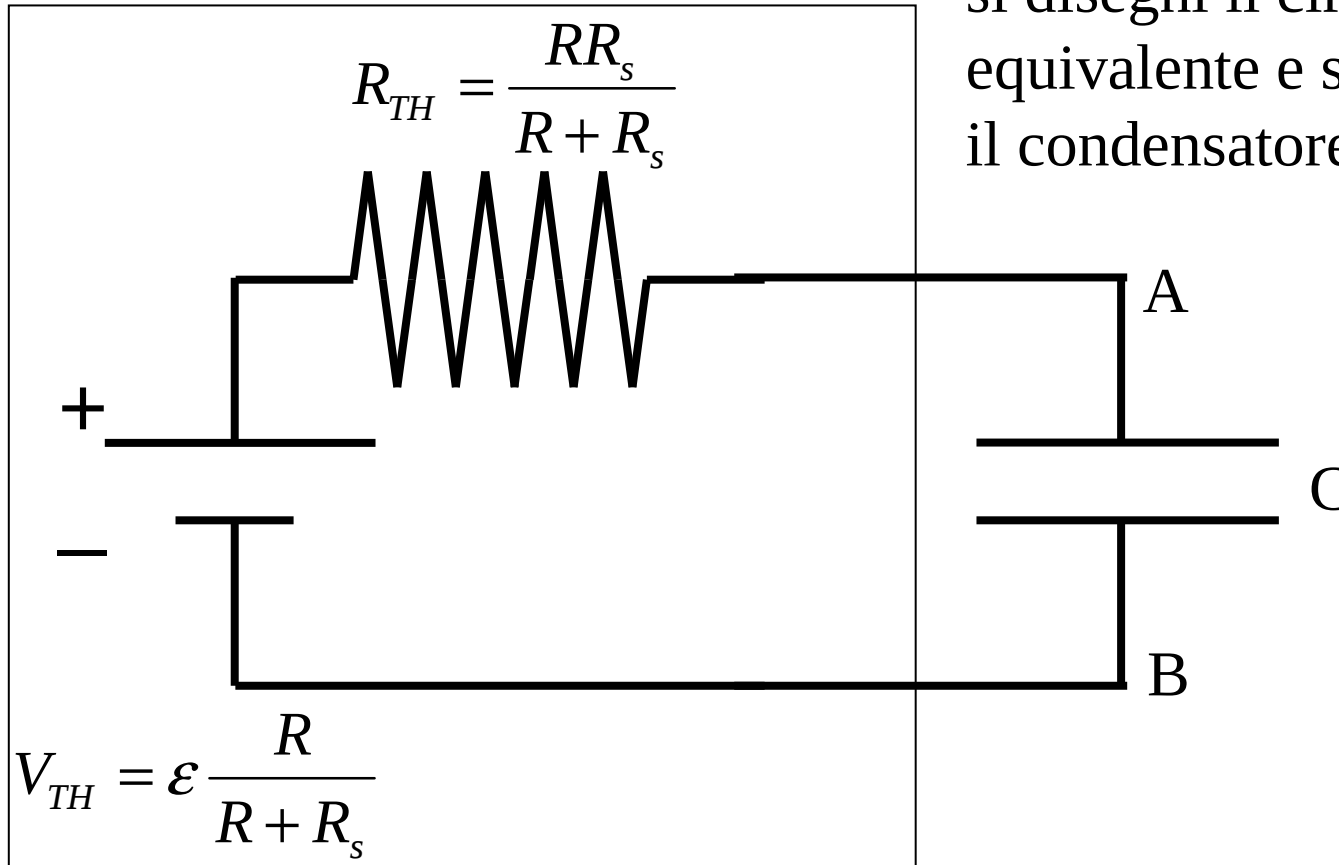
$$\frac{dQ}{dt} = I_1 - I_2$$

$$Q(t) = C\varepsilon \frac{R_{eq}}{R_s} (1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C}})$$

$$R_{eq} = \frac{RR_s}{R + R_s}$$

## Esercizio (continua)

Soluzione alternativa:  
si disegni il circuito Thevenin  
equivalente e si inserisca  
il condensatore C tra i punti A e B.



Dalla soluzione diretta della  
carica del condensatore:

$$Q(t) = CV_{TH} \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_{TH}C}} \right)$$