Gravitazione

Forza agente tra due corpi puntiformi di massa M e m :

$$\vec{f} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{r}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *u.SI*

Campo gravitazionale: Il corpo di massa M genera nello spazio un *campo* $-G\frac{M}{r^2}\,\hat{r}$, che interagisce con la massa m.

Principio di sovrapposizione:

Forza agente su un corpo m_1 da parte di più masse :

$$\vec{F}_1 = \sum_{i\neq 1} \vec{f}_{1,i} = -G\sum_{i\neq 1} \frac{m_1\, m_i}{r_{1,i}^2}\,\hat{r}_{1,i} = -Gm_1\sum_{i\neq 1} \frac{m_i}{r_{1,i}^2}\,\hat{r}_{1,i}$$

Forza agente su un corpo puntiforme m_1 ad opera di un corpo esteso :

$$\vec{F}_1 = -Gm_1 \int_V \frac{1}{r^2}\,\hat{r}\,\mathrm{d}m = -Gm_1 \int_V \frac{\rho}{r^2}\,\hat{r}\,\mathrm{d}V$$

Si dimostra che, se il corpo esteso è sferico e la sua densità è omogenea, la forza da esso esercitata è uguale a quella esercitata da un corpo puntiforme avente la stessa massa e posizionato nel centro.

Teorema di Gauss

ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

FORZA DI GRAVITÀ SU UNA MASSA m IN PROSSIMITÀ DELLA TERRA.

Assumendo la Terra come un corpo sferico omogeneo (ρ costante):

$$\vec{f} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\hat{r}$$

In prossimità della superficie terrestre $\vec{f} = m\vec{g}$

$$\Rightarrow \qquad \vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\,\hat{r}$$

M : *massa della Terra*; R : *raggio della Terra*

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

La forza di gravitazione è conservativa.

Per definizione, assumendo $U(\infty) = 0$*:*

$$\Delta U = U(R) - U(\infty) = -\mathcal{L}_{\infty \to R}$$

$$\mathcal{L}_{\infty \to R} = \int_{\infty}^{R} \vec{f}(r)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -GMm\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{\infty}^{R} = \frac{GMm}{R}$$

$$U(R) = -\frac{GMm}{R}$$

*Perché un corpo si allontani definitivamente da un pianeta, al momento della partenza dalla superficie deve possedere un'energia cinetica sufficiente perché la sua **energia totale** sia **positiva**.*

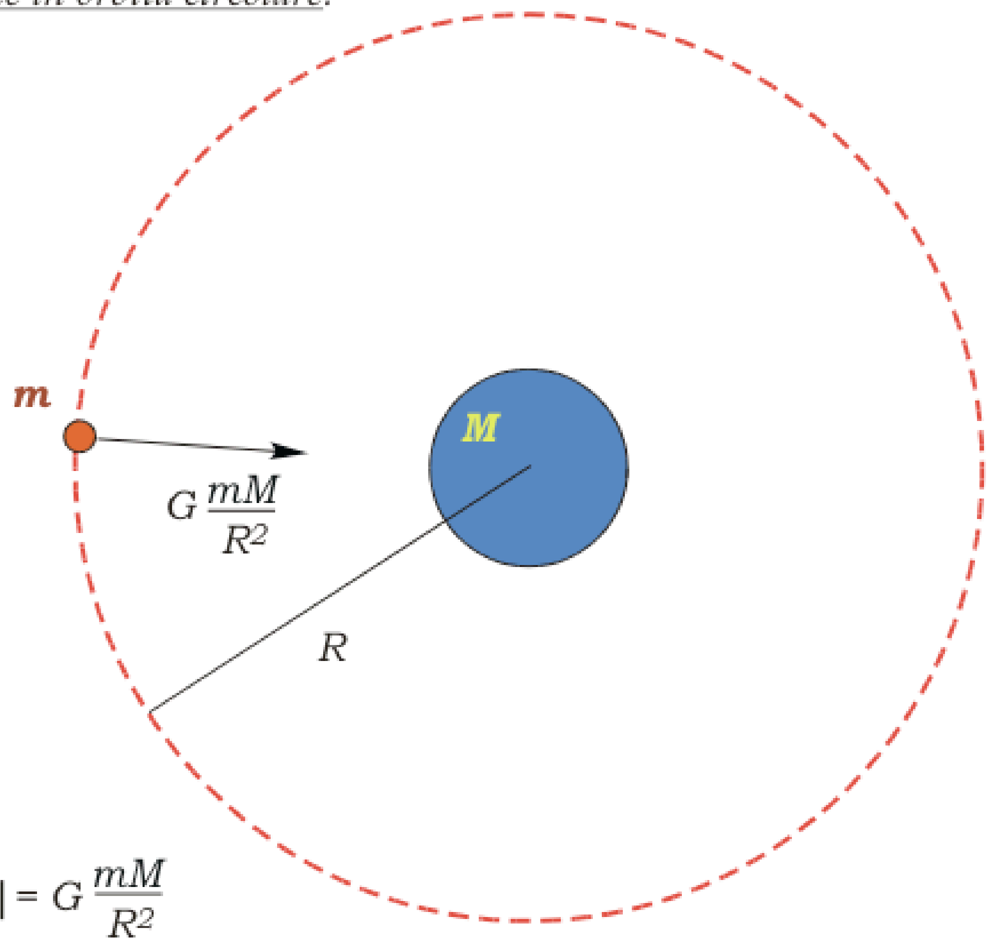
Cioè la sua velocità iniziale υ_i dovrà soddisfare la condizione:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_i^2 - G\frac{Mm}{R} \geq 0$$

VELOCITÀ DI FUGA:

$$\upsilon_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Satellite in orbita circolare:



$$|\vec{F}| = G\frac{mM}{R^2}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow \quad G\frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R} \quad ; \quad v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

Orbita geostazionaria: $\frac{2\pi R}{v} = 24 \text{ ore} = 86400 \text{ s}$

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

$$2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_T}} = 86400 \text{ s} \qquad (2\pi)^2 R^3 = G\,M_T \cdot (86400\,\text{s})^2$$

$$R = \sqrt[3]{G\,M_T \cdot (86400\,\text{s})^2/(2\pi)^2} = 4{,}23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$h \approx 36\,600 \text{ km}$$