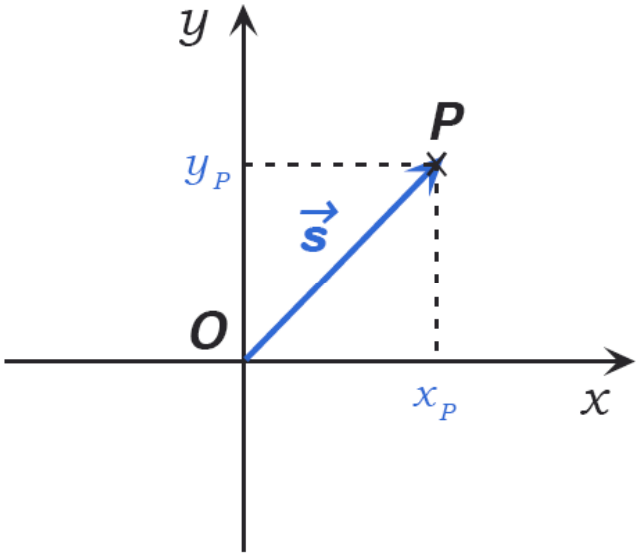
IL MOTO NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE

Vettore posizione:

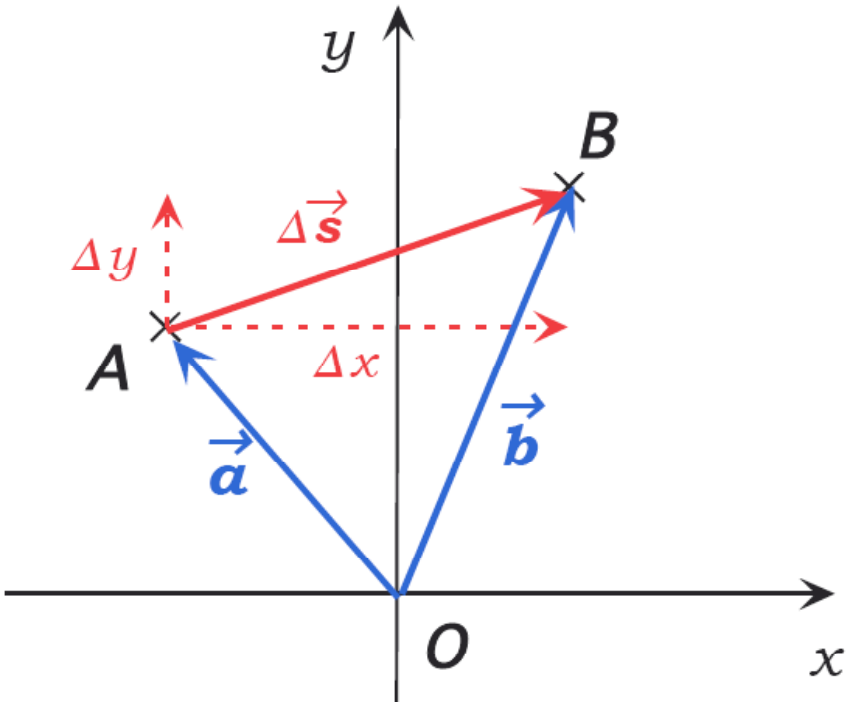


LEGGE ORARIA DEL MOTO $\vec{s} = \vec{s}(t)$

è la funzione che descrive la posizione del corpo (le sue coordinate nel sistema di riferimento) in funzione del tempo:

$$\vec{s} = \vec{s}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Vettore spostamento:



VELOCITÀ

è il rapporto tra il vettore spostamento (la variazione della posizione) e il tempo impiegato.

Velocità media tra gli istanti t_1 e t_2:

$$\vec{v}_m(t_1,t_2)=\frac{\vec{s}(t_2)-\vec{s}(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (v_m)_x=\dfrac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ (v_m)_y=\dfrac{y(t_2)-y(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ (v_m)_z=\dfrac{z(t_2)-z(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$$

Velocità istantanea all'istante t_0:

$$\vec{v}(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{\vec{s}(t_1)-\vec{s}(t_0)}{t_1-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_x(t_0)=\lim\limits_{t_1\to t_0}\dfrac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y(t_0)=\lim\limits_{t_1\to t_0}\dfrac{y(t_1)-y(t_0)}{t_1-t_0}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_z(t_0)=\lim\limits_{t_1\to t_0}\dfrac{z(t_1)-z(t_0)}{t_1-t_0}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$$

La velocità istantanea all'istante t_0 è definita dal valore della *derivata (vettoriale)* della funzione $\vec{s}(t)$ per $t=t_0$.

Si arriva così a definire la funzione (vettoriale) $\vec{v}(t)$ che esprime il valore della velocità istantanea in funzione del tempo, come la derivata rispetto al tempo della funzione $\vec{s}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_x(t) = x'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y(t) = y'(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z(t) = z'(t) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases}.$$

ACCELERAZIONE

è il rapporto tra il vettore che esprime la variazione della velocità e il tempo in cui essa ha luogo.

Accelerazione media tra gli istanti t_1 e t_2:

$$\vec{a}_m(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Accelerazione istantanea all'istante t_0:

$$\vec{a}(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x(t_0) = \lim\limits_{t_1 \to t_0} \dfrac{v_x(t_1) - v_x(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ a_y(t_0) = \lim\limits_{t_1 \to t_0} \dfrac{v_y(t_1) - v_y(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ a_z(t_0) = \lim\limits_{t_1 \to t_0} \dfrac{v_z(t_1) - v_z(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{cases}$$

L'accelerazione istantanea all'istante t_0 è definita dal valore della *derivata* della funzione $\vec{v}(t)$ per $t = t_0$.

DEFINIZIONE: *la funzione vettoriale* $\vec{a}(t)$, *che dà il valore dell'accelerazione istantanea in funzione del tempo, è la derivata rispetto al tempo della funzione* $\vec{v}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x(t) = v_x'(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ a_y(t) = v_y'(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ a_z(t) = v_z'(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Poiché $\vec{v}(t)$ *è la derivata della funzione* $\vec{s}(t)$, *la funzione* $\vec{a}(t)$ *è la* derivata seconda *della funzione* $\vec{s}(t)$ *rispetto al tempo.*

$$\vec{a}(t) = \vec{s}''(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{s}}{\mathrm{d}t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x(t) = x''(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y(t) = y''(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z(t) = z''(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

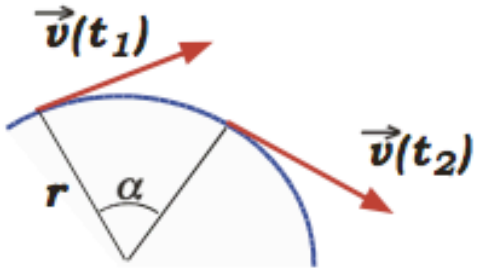
$$\vec{s}(t) \xrightarrow{\text{derivata}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{derivata}} \vec{a}(t)$$

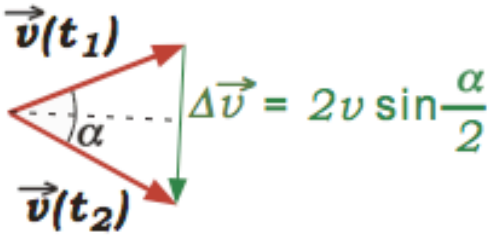
ATTENZIONE:

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \quad \not\Rightarrow \vec{a} = 0$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME:

Moto su traiettoria circolare con velocità v *costante in modulo*





$$\alpha = \frac{|\vec{v}| \cdot \Delta t}{r}$$

$$\vec{a}_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2v\sin\alpha/2}{\alpha r/v}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{v^2}{r} \cdot \frac{\sin\alpha/2}{\alpha/2}\right) = \frac{v^2}{r} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha/2}{\alpha/2}$$

$$\Rightarrow \qquad |\vec{a}| = \frac{v^2}{r}$$

la direzione di $\Delta\vec{v}$ *per* $\Delta t \to 0$ *è verso il centro*

$\Rightarrow$ *accelerazione centripeta*