

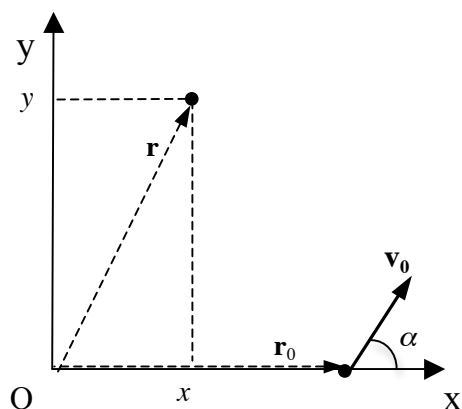
Compito di Fisica I, 27 Giugno 2011
Laurea in Matematica

Nome, Cognome matricola:

Una particella di massa m si muove nel piano (x,y) sotto l'azione di una forza centrale attrattiva, $\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$, con ω costante positiva. All'istante iniziale la particella si trova sull'asse x nella posizione r_0 corrispondente a $x=x_0$, $y_0=0$ e lanciata a velocità $\mathbf{v}_0$ facente un angolo α con l'asse x .

Si chiede:

1. L'equazione differenziale del moto ;
2. La legge oraria della particella in funzione del parametro α ;
3. L'energia totale della particella in funzione di parametri m, ω, r_0, v_0 ;
4. Il potenziale centrifugo ;
5. Il potenziale efficace ;
6. Scrivere a) le condizioni per le quali il moto è circolare uniforme e b) determinare l'energia totale della particella in funzione di solo r_0 .



RISPOSTE

1.: $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$; $d^2y/dt^2 + \omega^2 y = 0$;

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 + \omega^2 \mathbf{r} = 0$$

2.: $x = \left[r_0^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha / \omega^2 \right]^{1/2} \cos(\omega t - \arctg(v_0 \cos \alpha / r_0 \omega))$

$$= r_0 \cos(\omega t) + v_0 \cos \alpha / \omega \sin(\omega t)$$

$$y = (v_0 / \omega) \sin \alpha \sin(\omega t)$$

3.: $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r_0^2$

$$E = \frac{1}{2} m r'^2 + \frac{1}{2} m \left(L^2 / (m^2 r^2) + \omega^2 r^2 \right) ; L = m r^2 \theta' = m r_0 v_0 \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} m r'^2 + \frac{1}{2} m (r_0 v_0 \sin \alpha)^2 / r^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

4.: $\Pi_{\text{centr}} = L^2 / (2m r^2) = \frac{1}{2} m r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha / r^2$

5.: $\Pi_{\text{eff}} = L^2 / (2m r^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$

6a.: $\left[r_0^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha / \omega^2 \right]^{1/2} = v_0 \sin \alpha / \omega \Rightarrow v_0 = \omega r_0 ; \quad \cos \alpha = 0$

6b.: $\frac{1}{2} m \omega^2 r_0^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r_0^2 = m \omega^2 r_0^2$
