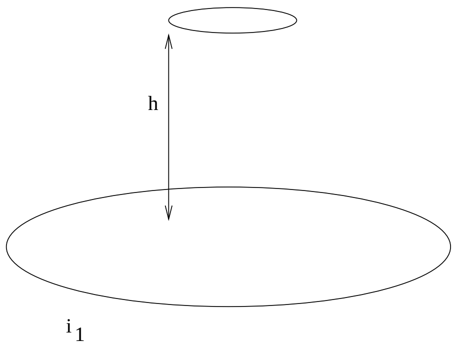
Appello di Fisica Generale II del 25/09/02

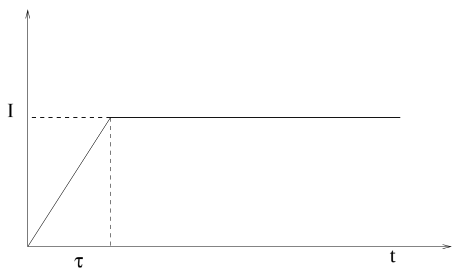
Problema I

Si condideri una distribuzione di carica superficiale su una sfera di raggio R, $\sigma = \frac{\sigma_0}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ ($\sigma = \sigma_0\ P_2(\cos\theta)$, con $P_2(\cos\theta)$ il secondo polinomio di Legendre. Si consideri inoltre una carica puntiforme Q posta al centro della sfera.
a) Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}$ in ogni punto dello spazio (dentro e fuori la sfera). Misurando in un sol punto dello spazio esterno alla sfera il potenziale elettrico, è possibile determinare Q? E misurando il campo elettrico?
b) Si metta adesso in movimento la sfera facendola girare con velocità angolare costante ω attorno all'asse passante per il centro e per $\theta = 0$. Si calcoli il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ su tale asse ad una distanza z molto, molto maggiore di R.

Problema II

Una spira circolare conduttrice giace vincolata su un piano parallelo a distanza h da quello di una seconda spira (vedi figure). La resistenza, il coefficiente di autoinduzione e quello di mutuainduzione della spira superiore siano R, L_2, M. Il coefficiente di autoinduzione della spira inferiore sia L_1. Si invii nella spira inferiore una corrente i_1 che dipenda dal tempo come in figura. Si determini:
a) la corrente i_2 della spira piccola ad ogni istante,
b) l'energia totale dissipata su R e la carica totale che l'attraversa.
Nell'ipotesi che la spira superiore di massa m sia libera di muoversi verticalmente parallelamente al suo asse, in campo gravitazionale, R sia trascurabile, τ sia abbastanza piccolo in modo che M resti costante per $0 < t < \tau$ si determini, ripetendo l'immissione della corrente i_1
c) la quota massima raggiunta dalla spira superiore, sapendo che in questa posizione il suo coefficiente di mutua induzione è M'.





Soluzioni

Problema I

a) Per calcolare il campo elettrico si procede ricavando il potenziale elettrico e poi derivando questo. Per calcolare il potenziale si può utilizzare lo sviluppo in armoniche sferiche della soluzione dell'equazione di Laplace. Il potenziale può essere scritto come somma del potenziale generato dalla carica puntiforme e quello generato dalla distribuzione di carica σ.

$$\Phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi_0}\frac{Q}{r} + \phi(r,\theta)$$

$\phi(r,\theta)$ data la simmetria di rotazione attorno all'asse z può essere scritta come:

$$\phi(r,\theta) = \sum_l \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$$

Adesso consideriamo le due porzioni di spazio:

$$I : r < R$$

$$II : r \geq R$$

Per calcolare quanto valgono A_l e B_l dobbiamo utilizzare le condizioni al controno che in questo caso sono quelle miste, ossia l'andamento all'infinito del potenziale e la carica superficiale per r=R. Consideriamo le soluzioni per le due regioni:

$$I : \qquad \phi(r,\theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

Nella regione I B_l è zero per ogni l poichè non c'è singolarità per ϕ nell'origine.

$$II : \qquad \phi(r,\theta) = \sum_l B_l r^{-(l+1)} l P_l(\cos\theta)$$

Ugualmente A_l è zero per ogni l nella regione II. Inoltre considerando il campo elettrico in direzione radiale si ottiene derivando il potenziale rispetto a r e data la distribuzione di carica $\sigma = \sigma_0 P_2(\cos\theta)$ si vede subito che l'unica soluzione accettabile è per l=2. Scriviamo quindi il sistema di equazioni per A_2 e B_2 utilizzando al continuità di ϕ sulla superficie della sfera e la discontinuità di $\mathbf{E}$ sulla stessa:

$$A_2 R^2 = B_2 R^{-3}, \qquad -2A_2 R + 3B_2 R^{-4} = \frac{1}{4\pi_0}\sigma_0$$

Da questo sistema di ricava che:

$$A_2 = \frac{1}{4\pi_0}\frac{\sigma_0}{R}, \qquad B_2 = \frac{1}{4\pi_0}\sigma_0 R^4$$

Quindi Φ risulta essere:

$$I: \qquad \Phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\sigma_0}{R}r^2 P_2(\cos\theta)\right)$$

$$II: \qquad \Phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\sigma_0}{R}r^2 P_2(\cos\theta)\right)$$

Ovviamente Φ è determinato a meno di una costante. Dato quindi il potenziale possiamo scrivere quanto vale $\mathbf{E} = \Phi$:

$$I: \quad E_r = \frac{1}{4\pi_0}\left(\frac{Q}{r^2} - 2\frac{\sigma_0}{R}rP_2(\cos\theta)\right), \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi_0}\left(-3\frac{\sigma_0}{R}r\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$II: \quad E_r = \frac{1}{4\pi_0}\left(\frac{Q}{r^2} + 3\frac{\sigma_0}{r^4}R^4 P_2(\cos\theta)\right), \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi_0}\left(3\frac{\sigma_0}{r^4}R^4\cos\theta\sin\theta\right)$$

Poichè Φ è determinato a meno di una costante non è possibile rivavare Q da una sola misura. È possibile invece utilizzando il campo elettrico radiale. Basta infatti misurare il campo ad una distanza r dal centro e ad un angolo $\overline{\theta}$ tale che: $P_2(\cos\overline{\theta})$=0. La carica Q risulta quindi: $Q = \frac{1}{4\pi_0}r^2 E_r$.

b)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}' d^{3\prime}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$\mathbf{B}$ sull'asse è diretto lungo l'asse stesso per la simmetria di rotazione.

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma_0}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\omega R\sin\theta, \qquad B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma_0\omega R 2\pi\int d\cos\theta \frac{\sin\theta\,(3\cos^2\theta-1)\sin\theta R^2}{\left(R^2\sin^2\theta + (z-R\cos)\,2\right)^3/2}$$

Considerando che $z/R >>> 1$ si ha che:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma_0\omega R^3 2\pi\frac{1}{z^3}\int_0^\pi d\theta\left(4\cos^2\theta - 1 - 3\cos^4\theta\right)$$

E quindi:

$$B_z = -\frac{\pi\mu_0}{16}\frac{\sigma_0\omega R^3}{z^3}$$

È da notare che l'andamento ci B in z è proprio quello di dipolo, ossia l'approssimazione usata per trattare l'integrale.

Problema II

a) Abbiamo $i_1 = It/\tau$ per $t<\tau$ e $i_1 = I$ per $t>\tau$. A $t<\tau$

$$\frac{MI}{\tau} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + Ri_2 = 0, \qquad i_2(t) = \frac{MI}{R\tau}\left(\mathrm{e}^{-Rt/L_2} - 1\right).$$

A $t > \tau$

$$L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + Ri_2 = 0, \qquad i_2(t) = \frac{MI}{R\tau}\left(\mathrm{e}^{-R\tau/L_2} - 1\right)\ \mathrm{e}^{-Rt/L_2}.$$

b) L'energia totale dissipata in R è

$$W = \int_0^\infty R\left[i_2(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \frac{M^2 I^2}{R\tau^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-4R\tau/L_2}}{2R}L_2 - \frac{\mathrm{e}^{-3R\tau/L_2}}{R}L_2 + 2\frac{\mathrm{e}^{-R\tau/L_2}}{R}L_2 + \tau - \frac{3R}{2L_2}\right).$$

La carica totale che attraversa la resistenza è

$$Q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R} = -\frac{MI}{R},$$

dove Φ sono i flussi del campo magnetico della spira grande attraverso la spira piccola.

c) La forza elettromotrice totale attraverso la spira,

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Mi_1 + L_2 i_2\right),$$

è nulla, perché non ci sono generatori. Questo dà

$$Mi_1 + L_2 i_2 = cost., \qquad i_1(0) = 0, \quad L_2(0) = 0.$$

Dopo $\tau \sim 0$

$$i_2 = -M\frac{i_1}{L_2} = -\frac{MI}{L_2}$$

e in generale $M = M(t)$. Alla massima quota

$$i_2 = -\frac{M'I}{L_2}.$$

L'energia del campo magnetico è

$$E_{mag} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M(t) i_1 i_2 = \frac{1}{2}L_1 I^2 - \frac{1}{2}M(t)^2\frac{I^2}{L_2}.$$

La differenza di energia dela campo magnetico tra l'altezza finale e iniziale è

$$\Delta E_{mag} = \frac{1}{2}\left(M^2 - M'^2\right)\frac{I^2}{L_2}.$$

La differenza di energia potenziale gravitazionale è

$$\Delta E_{grav} = mgd.$$

$\Delta E_{mag} + \Delta E_{grav}$ è da uguagliare l'energia fornita dal generatore,

$$L = \int_i^f I\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Mi_2 + L_1 I\right)\mathrm{d}t = \left(M^2 - M'^2\right)\frac{I^2}{L_2}.$$

Finalmente abbiamo

$$d = \frac{1}{2}\left(M^2 - M'^2\right)\frac{I^2}{L_2 mg}.$$