Appello di Fisica Generale II — 7 Giugno 2002.

ESERCIZIO I

1) Dimostrare che un dipolo elettrico $\overrightarrow{p}$ che si muove con velocità $\overrightarrow{v}$ genera un dipolo magnetico $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{v}$. Si studi la spira infinitesima descritta durante un tempo Δt.

Una calotta sferica di raggi $a > b$ è fatta di materiale dielettrico con costante dielettrica ε. Sulla sfera di raggio b è presente una densità di carica σ distribuita uniformemente.

2) Calcolare $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{D}$ e $\overrightarrow{P}$ in tutto lo spazio.

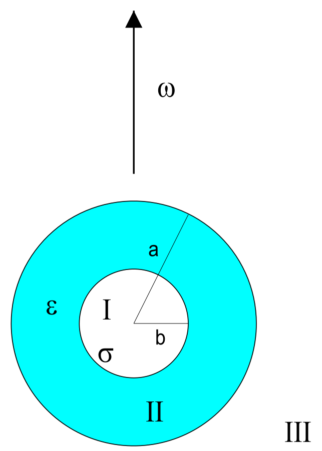
La sfera viene posta in rotazione attorno all'asse z con velocità uniforme $\overrightarrow{\omega}$.

3) Usando il risultato del punto 1), scrivere la magnetizzazione $\overrightarrow{M}$ indotta da $\overrightarrow{P}$ e dimostrare che il rotore di $\overrightarrow{M}$ è identicamente nullo.

4) Scrivere le correnti libere del problema.

5) Calcolare $\overrightarrow{B}$ e $\overrightarrow{H}$in tutto lo spazio, cercando soluzioni della forma $\overrightarrow{B}$ = campo uniforme + campo di dipolo magnetico, nelle tre regioni I, II e III definite dalla calotta sferica e imponendo le appropriate condizioni al contorno.

Esercizio I



ESERCIZIO II

Il circuito di Figura 1 e' composto da: 2 guide parallele conduttrici, un'asta libera di massa m e lunghezza l libera di muoversi su tali guide anch'essa conduttrice inizialmente ferma, una induttanza L, una resistenza R ed un generatore di f.e.m. $\epsilon = \epsilon_0 cos\omega t$.

Il tutto è immerso in un campo di induzione magnetica B uniforme e diretto come in figura.
Si risponda alle seguenti domande, trascurando la forza peso agente sulla sbarretta.
a) Si scriva l'equazione del circuito in termini delle variabili usate nel testo e della intensità di corrente I che scorre nel circuito.
b) Si verifichi che per un tempo t sufficientemente grande la soluzione dell'equazione del punto a) è quella particolare.
Per il resto dell'esercizio si consideri la situazione discussa nel punto b).
Si dica sotto quale condizione su R, L, B, l, m, ω la corrente I è sfasata di $\pi/2$ rispetto alla tensione ϵ.
c) Data tale condizione su R, L, B, l, m, ω si trovi la potenza media erogata dal generatore in un periodo.
Ad un certo istante T_0, il generatore e la induttanza sono circuitati.
d)Dopo quanto tempo la velocità si ridurrà di un fattore 1/2 rispetto a quella che la sbarretta aveva al tempo T_0?

Esercizio II

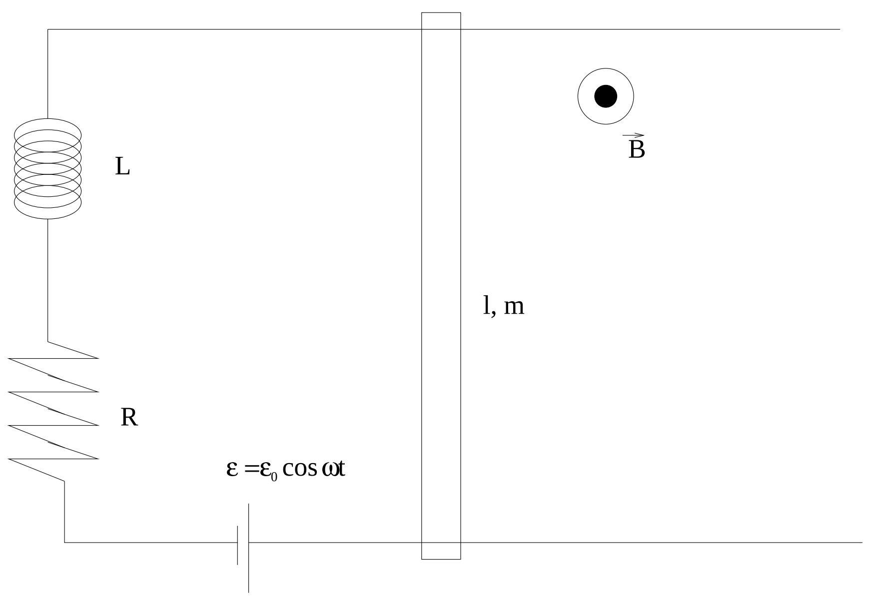
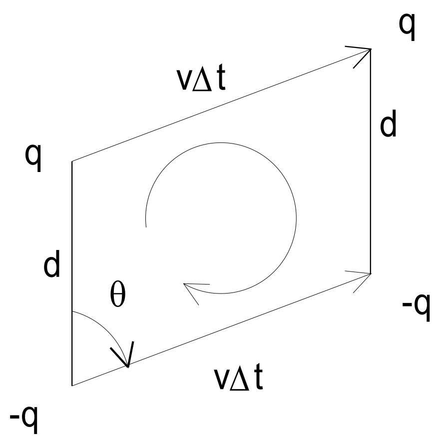


Figure 1: Circuito.

Soluzione

ESERCIZIO I

1) Con riferimento alla figura, vediamo che le cariche q e $-q$ di un dipolo $p = qd$ in moto con velocità v, chiudono, nel tempo Δt, una spira di superficie $S = vd \sin\theta \ \Delta t$, percorsa dalla corrente $I = q \ \Delta t$. Il momento di dipolo magnetico è dunque IS, o, vettorialmente, $\vec{p} \wedge \vec{v}$.



2) Abbiamo $\vec{D} = \vec{E} = \vec{P} = 0$ in I e

$$\vec{D}(r) = \frac{\sigma b^2}{4} \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{E}(r) = \frac{\sigma b^2}{4\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{P}(r) = \frac{\sigma b^2 (\varepsilon - 1)}{4\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad inII,$$
$$\vec{D}(r) = \frac{\sigma b^2}{4} \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{E}(r) = \frac{\sigma b^2}{4\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{P} = 0, \qquad inIII.$$

3) Per la 1) abbiamo, in II,

$$\vec{M}(r) = \vec{P}(r) \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{\sigma b^2 (\varepsilon - 1)}{4\varepsilon r^3} \left[\vec{\omega} r^2 - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \right],$$

il cui rotore è identicamente zero.

4) L'unica corrente libera è la corrente superficiale sulla sfera di raggio b, uguale a

$$\vec{K} = \sigma \vec{\omega} \wedge \vec{r}.$$

5) In virtù del risultato 3), nelle tre regioni valgono $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$. Cerchiamo una soluzione della forma

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\mathrm{I}} &= \vec{B}_{\mathrm{I}}^{(0)}, \\
\vec{B}_{\mathrm{II}} &= \vec{B}_{\mathrm{II}}^{(0)} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}_{\mathrm{II}}) - \vec{m}_{\mathrm{II}}}{r^3}, \\
\vec{B}_{\mathrm{III}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}_{\mathrm{III}}) - \vec{m}_{\mathrm{III}}}{r^3}.
\end{aligned}$$

Le condizioni al contorno sono

$$\begin{aligned}
\left(\vec{B}_{\mathrm{I}} - \vec{B}_{\mathrm{II}}\right) \cdot \hat{r} = 0, \qquad & \left(\vec{B}_{\mathrm{I}} - \vec{B}_{\mathrm{II}} + \mu_0 \vec{M}\right) \wedge \hat{r} = \mu_0 \vec{K}, \qquad per\, r = b, \\
\left(\vec{B}_{\mathrm{II}} - \vec{B}_{\mathrm{III}}\right) \cdot \hat{r} = 0, \qquad & \left(\vec{B}_{\mathrm{II}} - \mu_0 \vec{M} - \vec{B}_{\mathrm{III}}\right) \wedge \hat{r} = 0, \qquad per\, r = a.
\end{aligned}$$

Esse danno

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\mathrm{I}}^{(0)} - \vec{B}_{\mathrm{II}}^{(0)} - \frac{2\mu_0}{4\pi b^3} \vec{m}_{\mathrm{II}} &= 0, \\
\vec{B}_{\mathrm{I}}^{(0)} - \vec{B}_{\mathrm{II}}^{(0)} + \frac{\mu_0}{4\pi b^3} \vec{m}_{\mathrm{II}} + \frac{\mu_0 \sigma b\, (\varepsilon - 1)}{4\varepsilon} \vec{\omega} - \mu_0 \sigma b \vec{\omega} &= 0, \\
\vec{B}_{\mathrm{II}}^{(0)} + \frac{2\mu_0}{4\pi a^3} \left(\vec{m}_{\mathrm{II}} - \vec{m}_{\mathrm{III}}\right) &= 0, \\
\vec{B}_{\mathrm{II}}^{(0)} - \left(\vec{m}_{\mathrm{II}} - \vec{m}_{\mathrm{III}}\right) \frac{\mu_0}{4\pi a^3} - \frac{\mu_0 \sigma b^2\, (\varepsilon - 1)}{4\varepsilon a} \vec{\omega} &= 0.
\end{aligned}$$

La soluzione è

$$\begin{aligned}
\vec{m}_{\mathrm{II}} &= \frac{\pi \sigma b^4}{3} \frac{3\varepsilon + 1}{\varepsilon} \vec{\omega}, \\
\vec{m}_{\mathrm{III}} &= \frac{\pi \sigma a^2 b^2}{3\varepsilon} \left(\varepsilon - 1 + \frac{b^2}{a^2} (3\varepsilon + 1)\right) \vec{\omega}, \\
\vec{B}_{\mathrm{II}}^{(0)} &= \frac{\mu_0 \sigma b^2\, (\varepsilon - 1)}{3\varepsilon a} \vec{\omega}, \\
\vec{B}_{\mathrm{I}}^{(0)} &= \frac{\mu_0 \sigma b}{6\varepsilon} \left(3\varepsilon + 1 + \frac{b}{a} (\varepsilon - 1)\right) \vec{\omega}.
\end{aligned}$$

Per il teorema di unicità, la soluzione proposta è la soluzione al problema.

ESERCIZIO II

a)

L'equazione del circuito si ricava dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\epsilon - \epsilon_I &= L\dot{I} + RI \\
\epsilon_I &= Blv(t) \\
m\dot{v}(t) &= BIl
\end{aligned}$$

L'equazione risulta quindi:

$$\dot{\epsilon} = L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{(Bl)^2}{m} I$$

È facile riconoscere l'equazione di un oscillatore forzato e smorzato. La soluzione generale è la combinazione lineare della soluzione dell'equazione omogenea ed una soluzione particolare.

b)

Consideriamo l'equazione omogenea e cerchiamo una soluzione del tipo $I_t = I_0 e^{j\omega t}$ con una ω appropriata:

$$\omega^2 - j\omega R/L + \frac{(Bl)^2}{mL} = 0$$

Le soluzioni sono:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\left(R/L\left(j \pm \sqrt{\frac{4(BlL)^2}{mLR^2} - 1}\right)\right)$$

Da queste soluzioni risulta chiaro che per $t >> R/L$ si puo' considerare solo la soluzione particolare, considerando $\epsilon = \Re(\epsilon_0 e^{j\omega t})$ e cercando una soluzione del tipo $I = I_0 e^{j\omega t}$.

$$j\epsilon_0 = -\omega^2 L I_0 + j\omega R I_0 + \frac{(Bl)^2}{m} I_0$$
$$I_0\left(jR\omega + \left(\frac{(Bl)^2}{m} - L\omega^2\right)\right) = j\epsilon_0$$

Sotto la condizione: $\left(\frac{(Bl)^2}{m} - L\omega^2\right) >> R\omega$ la corrente risulta sfasata di $\pi/2$ rispetto alla tensione.

c)

La potenza media erogata dal generatore in un periodo si ottiene integrando $\int_0^T I\epsilon dt$ e dividendo per T. Visto però che la corrente é sfasata di $\pi/2$ rispetto alla tensione, tale integrale risulta 0 e quindi anche la potenza media erogata in un periodo è zero.

d)

Cortocircuitando il generatore e l'induttanza l'equazione del circuito risulta:

$$-\epsilon_I = RI$$

utilizzando le equazioni del punto a) si ricava:

$$R\dot{I} = -\frac{(Bl)^2}{m} I$$
$$I(t) = I_0 e^{-\frac{(Bl)^2}{mR} t}$$

di conseguenza:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{(Bl)^2}{mR} t}$$

con $t = t - T_0$, la velocità si dimezza dopo un tempo $t = \frac{mR}{(Bl)^2} \ln 2$.