Compitino di Fisica II — Aprile 2002.

Un motore è schematizzabile come una ruota a 3 raggi disposti a 120^o l'uno dall'altro, vincolata nel centro e collegata a un circuito disegnato in Fig. 1, immerso in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ uniforme e diretto come in Fig. 1. Supponiamo che il motore debba sollevare la massa M in campo gravitazionale. Siano dati $\vec{B}$, R, M, la resistenza di ciascun raggio: ρ, il momento di inerzia della ruota rispetto al suo asse: I e la lunghezza di ciascun raggio: a. La massa della fune sia trascurabile.
a) Si calcoli il valore della corrente nel circuito e conseguentemente il valore di ε nell'ipotesi che M si sollevi a velocità costante, nonchè la potenza fornita dal generatore.
b) Nell'ipotesi che la fune che sostiene M si spezzi, si calcoli la nuova velocità angolare di regime a cui la ruota si pone.
c) Con argomenti energetici si calcoli l'energia fornita da ε dopo la rottura della fune fino al nuovo regime sapendo che l'energia totale in questo processo dissipata in R è L_R.
d) Si determini l'andamento col tempo della velocità angolare della ruota dopo la rottura della fune.

Soluzione

a) Il circuito equivalente è mostrato in Fig. 2: La legge di Faraday dà immediatamente la forza elettromotrice $\mathcal{E}_I$ indotta nelle maglie, che risulta

$$\mathcal{E}_I = \frac{1}{2}\omega a^2 B,$$

dove ω è la velocità angolare di regime.

Il momento totale delle forze è dato da

$$\tau = 3\int_0^a Bx\frac{i}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Bia^2 = Mga,$$

da cui ricaviamo la corrente:

$$i = 2\frac{Mg}{Ba}.$$

L'equazione per la prima maglia dà

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_I = i\left(R + \frac{\rho}{3}\right) = 2\frac{Mg}{Ba}\left(R + \frac{\rho}{3}\right),$$

da cui ricaviamo

$$\mathcal{E} = 2\frac{Mg}{Ba}\left(R + \frac{\rho}{3}\right) + \frac{1}{2}\omega a^2 B.$$

La potenza fornita dal generatore è

$$W = i^2 R + 3\left(\frac{i}{3}\right)^2 \rho + Mgv.$$

b) Al nuovo regime c'è solo la forza elettromotrice. Cioè, $\tau' = 0$, $i' = 0$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}_I'$. Ricaviamo dunque

$$\omega' = \frac{2\mathcal{E}}{a^2 B}.$$

c) L'energia fornita dal generatore è

$$U = \frac{1}{2} I \left(\omega'^2 - \omega^2\right) + \int_0^\infty i^2(t)\ R\ \mathrm{d}t + 3 \int_0^\infty \left(\frac{i}{3}\right)^2 \rho\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} I \left(\omega'^2 - \omega^2\right) + L_R \left(1 + \frac{\rho}{3R}\right).$$

d) Ora abbiamo

$$I \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \tau(t) = \frac{1}{2} B a^2 i(t), \qquad i(t) = \frac{\mathcal{E} - \omega(t) a^2 B/2}{R + \rho/3} \equiv \alpha \mathcal{E} - \beta \omega.$$

Ricaviamo

$$\omega(t) = \omega' + A \mathrm{e}^{-t/T}, \qquad T = \frac{2I}{\beta B a^2}.$$

Imponendo

$$\omega(0) = \omega,$$

fissiamo A e otteniamo infine

$$\omega(t) = \omega' + \left(\omega - \omega'\right) \mathrm{e}^{-t/T}.$$

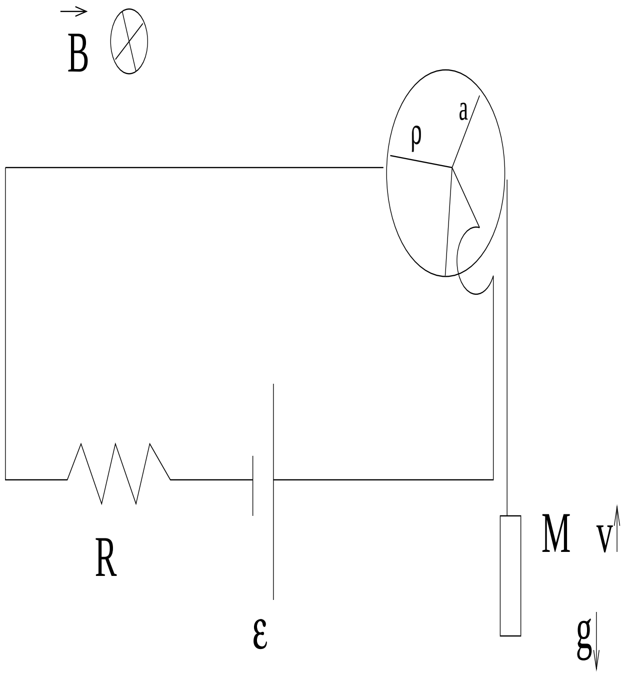

Figure 1: Circuito.

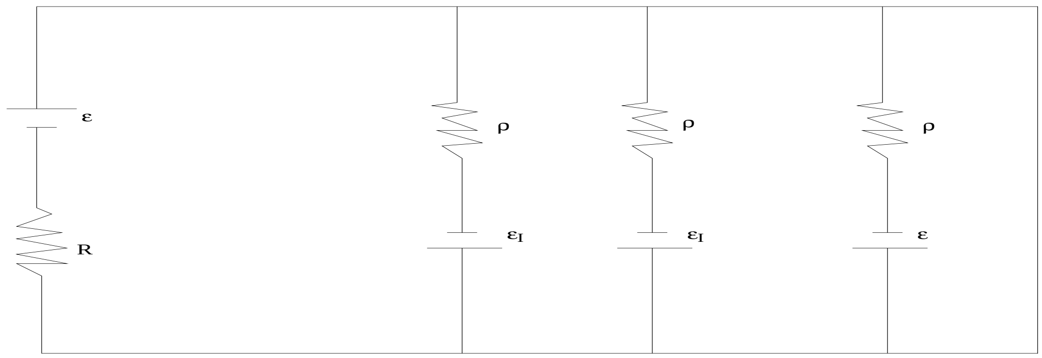

Figure 2: Circuito equivalente.