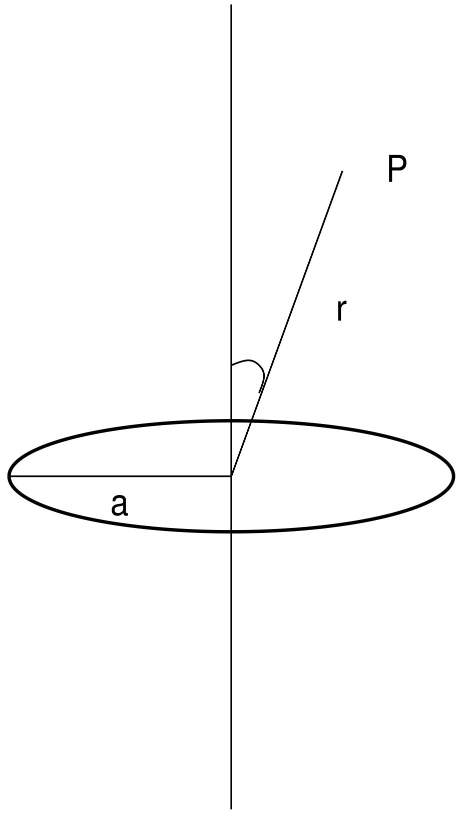
COMPITINO III di FISICA II — maggio 2002



Una particella di carica q è mantenuta in moto circolare uniforme di raggio a e frequenza angolare ω. Il moto sia non relativistico.

a) Si determinino i campi di radiazione **B** ed **E** in un punto P posto a distanza r dal centro della circonferenza con $r \gg a$ in funzione dell'angolo θ (vedi figura).

b) Si determini l'eventuale polarizzazione della radiazione in funzione di θ.

c)Si termini la potenza esterna necessaria a mantenere la particella in moto circolare uniforme.

Sull'asse della circonferenza a $\theta = 0$ e a distanza r si ponga una spira piana circolare di raggio $b \ll r$.

d) Si determini l'orientamento della spira per cui si ha il massimo della forza elettromotrice indotta (si trascuri l'autoinduzione).

Soluzione

a)

Per calcolare il campo elettromagnetico nello spazio possiamo utilizzare l'approssimazione di

dipolo, per una particella in moto con carica q, il momento di dipolo può essere scritto come:
$\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{x}$
Nel nostro caso

$$\overrightarrow{x} = a\cos(\omega t)\hat{x} + a\sin(\omega t)\hat{y}$$

Il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ e quello elettrico $\overrightarrow{E}$ si ottengono dunque dalla formula:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\hat{r}\times\ddot{\overrightarrow{p}}}{r}$$
$$\overrightarrow{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\ddot{\overrightarrow{p}}\right)}{r}$$

Utilizzando la formula per il momento di dipolo:

$$\overrightarrow{B} = -a\omega^2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\hat{r}\times\overrightarrow{p}}{r}$$

Il modo più veloce per studiare gli stati di polarizzazione probabilmente è quello di scrivere il campo magnetico in coordinate polari, difatti essendo $\hat{r}$ la direzione di osservazione, dalle formule risulta chiaro che sia E che B giaciono nel piano ortogonale ad $\hat{r}$, ossia nel piano $\left(\hat{\theta},\hat{\phi}\right)$ con θ angolo polare e ϕ quello azimutale.
Scrivendo i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ in coordinate polari e poi passando alle coordinate sferiche si ha (con ovvio significato dei simboli):

$$\hat{x} = \cos(\phi)\,\hat{\rho} - \sin(\phi)\,\hat{\rho}$$
$$\hat{y} = \sin(\phi)\,\hat{\rho} + \cos(\phi)\,\hat{\rho}$$
$$\hat{\rho} = \sin(\theta)\,\hat{r} + \cos(\theta)\,\hat{\theta}$$

Andando a sostituire nella formula per $\overrightarrow{p}$, e dopo un po' di semplice algebra si ottiene:

$$\overrightarrow{p} = -a\omega^2\left(\cos(\omega t-\phi)\sin(\theta)\,\hat{r} + \cos(\omega t-\phi)\cos(\theta)\,\hat{\theta} - \sin(\omega t-\phi)\,\hat{\phi}\right)$$
$$\hat{r}\times\overrightarrow{p} = a\omega^2\left(\cos(\omega t-\phi)\cos(\theta)\,\hat{\phi} - \sin(\omega t-\phi)\,\hat{\theta}\right)$$

Dall'ultima equazione si capisce anche che l'angolo ϕ non è rilevante, infatti si presenta come una fase ininfluente al calcolo dei campi.
b)
La polarizzazione è dunque (z positivo e' preso in modo che veda circolare la particella in senso antiorario):

- $\theta = 0$ polarizzazione circolare sinistrorsa;
- $\theta = \pi/2$ polarizzazione lineare lungo $\hat{\theta}$;
- $0 < \theta < \pi/2$ polarizzazione ellittica sinistrorsa.

- $\theta = \pi$ polarizzazione circolare destrorsa;
- $\pi/2 < \theta < \pi$ polarizzazione ellittica destrorsa.

c)
L'unico modo in cui la particella può perdere energia è per irraggiamento, se si fornisce la stessa quantità di energia dissipata la particella manterrà il suo moto circolare uniforme. La potenza dissipata si ottiene tramite la formula:

$$W = \frac{2q^2}{3c^3}|a^2|$$

dove $|a^2| = a\omega^2$.

d)
Dalla polarizzazione di B è chiaro che se la normale alla superficie della spira forma un angolo di $\pi/2$ con l'asse z, il flusso di B attraverso la superficie è massimo e dunque sarà massima anche la forza elettromotrice indotta.
L'orientazione azimutale della spira è ininfluente poichè cambia una fase nella dipendenza temporale dei campi.