Compitino di Fisica II — Dicembre 2001.

Negli anni '50 fu proposto un modello di espansione dell'universo dovuta a un non esatto bilanciamento nella materia delle cariche opposte. Immaginate un volume V sferico di dimensione astronomica contenente atomi di idrogeno di densità di volume N e assumete che la carica del protone e_p sia uguale a $(1+y)e$, dove e è la carica dell'elettrone.

a) Si determini il campo elettrico $\mathbf{E}$ a un dato raggio R.

b) Si mostri che se $y > 10^{-18}$ la repulsione elettrostatica domina sul'attrazione gravitazionale e c'è espansione.

Nelle condizioni di cui in *b*,

c) Si mostri che la velocità radiale di un atomo è proporzionale a R (si assuma che la densità di materia e di carica è mantenuta costante) e che tale velocità è $v = R/T$, dove T è il tempo necessario per l'espansione di un fattore e. (T può essere considerato l'età dell'universo e $1/T$ è assimilabile alla costante di Hubble).

Supponiamo che $y = 10^{-18}$. Vogliamo misurarlo attraverso la deflessione subita da atomi di idrogeno non ionizzati, sparati a velocità v_0 nello spazio tra le armature di un condensatore piano carico di lunghezza l e campo elettrico E.

d) se $v_0 = 10^4$ m/s, $l = 1$m, $E = 10^6$V/m, calcolare la deflessione lungo z, direzione perpendicolare alle armature del condensatore.

e) Se gli effetti di polarizzabilità delle molecole non sono trascurabili e il campo E non è uniforme, ci possono essere deflessioni dovute a interazioni tra il campi e dipoli indotti. In questo caso, come potremmo modificare le condizioni del'esperimento per ovviare a questi effetti?

Dati: $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^3 Kg^{-1} s^{-2} $m_{protone}$=1.7 10^{-27} Kg.

Soluzioni

- Domanda a)
  Si tratta di una sfera uniformemente carica con densità di carica $\rho = Ney$, quindi dal teorema di Gauss segue che: $E_{(R)} 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}R^3\rho$ e quindi:

$$\overrightarrow{E}_{(R)} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Ney}{3}\overrightarrow{R}. \tag{1}$$

- Domanda b)
  Analogamente alla domanda a), la forza gravitazionale che si esercita su una particella di massa m_p a distanza R dal centro vale:

$$\overrightarrow{F}^G_{(R)} = -G_N\frac{4\pi}{3}Nm_p^2\overrightarrow{R}. \tag{2}$$

  mentre quella elettrica vale:

$$\overrightarrow{F}^E_{(R)} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Ne^2y^2}{3}\overrightarrow{R}. \tag{3}$$

  Dato che i versi delle due forze sono opposti si ha espansione quando $\frac{F^E_{(R)}}{F^G_{(R)}} > 1$ e quindi:

$$\frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2y^2}{G_N 4\pi m_p^2} > 1 \tag{4}$$

Da cui segue:

$$
\begin{aligned}
y &> \frac{m_p}{e}(4\pi\epsilon_0 G_N)^{1/2} \Rightarrow &(5)\\
y &> 0.86 \times 10^{-18} &(6)
\end{aligned}
$$

- Domanda c)
La forza totale a cui è soggetta un atomo di Idrogeno è:

$$\overrightarrow{F}_{(R)} = N\left(\frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2y^2}{3} - G_N\frac{4\pi}{3}m_p^2\right)\overrightarrow{R}. \tag{7}$$

Con y ricavato nella domanda precedente la direzione della forza e' verso l'esterno $\Rightarrow$:

$$m_p\frac{d^2R}{d^2t} = KR \tag{8}$$

con K positivo. Le soluzioni dell'equazione sono (per $\alpha t >> 1$):

$$
\begin{aligned}
R_{(t)} &= ae^{-\alpha t} + be^{\alpha t} \sim be^{\alpha t}, &(9)\\
\alpha &= (K/m_p)^{1/2} &(10)
\end{aligned}
$$

Da cui segue che $v_{(t)}/R_{(t)} = 1/T$ con T=$(\frac{m_p}{K})^{1/2}$.

- Domanda d)
Il tempo di attarversamento $t_0 = \ell/v = 10^{-4}s$. Lungo z si ha un moto uniformemente accelerato con $a = \frac{yeE}{m_p}$, quindi al deflessione z_0 risulta:

$$z_0 = \frac{1}{2}at_0^2 \sim 4.7 \times 10^{-13}m. \tag{11}$$

- Domanda e)
Possiamo trattare l'atomo di Idrogeno come una sfera dielettrica molto piccola. Il dipolo formatosi per induzione sara' quindi proporzionale al valore di $\overrightarrow{E}$ nel punto dove si trova l'atomo. La forza sul dipolo indotto risulta quindi:

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla}E^2 \tag{12}$$

Se il campo elettrico fosse uniforme la forza agente sul dipolo sarebbe nulla e l'unica deflessione dell'atomo sarebbe imputabile ad una sua carica elettrica. Poichè però è impossibile creare un campo elettrico perfettamente uniforme la forza non è nulla e contribuisce alla deflessione dell'atomo.
Per eliminare questo effetto basta osservare che la forza è indipendente dal segno di E e quindi misurando le deflessioni con un campo elettrico diretto lungo z (deflessione z_0^+) e diretto lungo -z (deflessione z_0^-) e studiando la differenza z_0^+ - z_0^- si elimina qualsiasi effetto dovuto alla polarizzazione dell'atomo mentre viene raddoppiato il contributo dovuto alla carica elettrica.
Per misurare la differenza tra le cariche del protone e dell'elettrone sono stati fatti diversi esperimenti, il primo ad utilizzare un metodo simile a quello descritto nelle domande

precedenti è stato V. W. Hughes nel 1949 (V. W. Hughes; Phys. Rev. 76, 474 (1949)). L'esperimento è stato migliorato e ripetuto nel 1963 con atomi di Cesio e Potassio e molecole di H_2 e D_2 (V. W. Hughes et al. Phys. Rev. 189, 2566 (1963)).
Il campo elettrico utilizzato era di circa 100 kV/cm e la lunghezza del condensatore pari a circa 2 m. La figura sottostante mostra i dati ottenuti per le due diverse direzioni di E (z_0^+ cerchietti e z_0^- quadratini) in funzione di E^2. Risulta evidente come ci sia solo il termine dovuto alla interazione di dipolo.

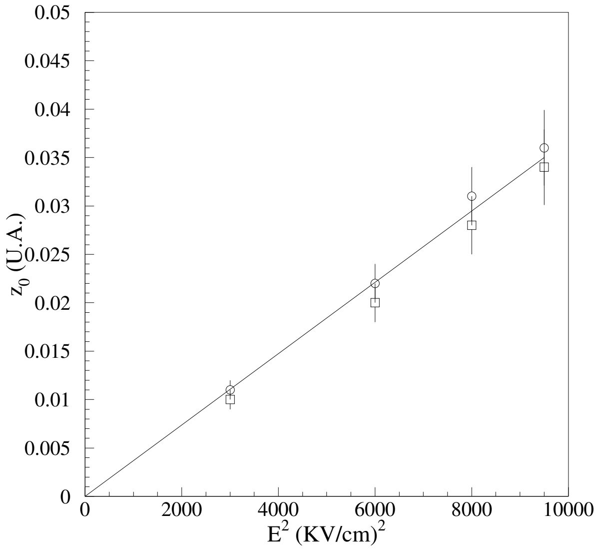

Figure 1: Risultati finali dell'esperimento.