COMPITO SCRITTO DI FISICA II 01/02/2002

Esercizio I

1) Si consideri una sfera S di raggio R, con densità di carica sfericamente simmetrica $\rho(r) = Q/r^3$ per $a < r < R$, e $\rho(r) = 0$ per $r < a$. Calcolare la velocità minima di una particella puntiforme di carica q e massa m, lanciata da distanza infinita verso il centro della sfera, affinchè essa attraversi completamente la sfera.

2) Si consideri ora una sfera cava S' di raggio R con densità di carica superficiale σ, rotante attorno ad un asse con velocità angolare $\vec{\omega}$. Dimostrare che il campo magnetico generato all'interno della sfera è uniforme, dato da (si usi il teorema di unicita'):

$$\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \sigma R \vec{\omega},$$

mentre all'esterno è equivalente a quello generato da un dipolo magnetico

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{3}\sigma R^4 \vec{\omega}$$

collocato nel centro della sfera.

3) Si torni ora a considerare la sfera S di cui al punto 1) e la si faccia ruotare attorno ad un asse con velocità angolare $\vec{\omega}$. Si usino le informazioni del punto 2) per ricavare il campo magnetico generato dalla sfera rotante S in tutto lo spazio.

4) Qual è il momento di quadrupolo del campo magnetico generato da S?

Esercizio II

Due sbarrette uguali di lunghezza d, massa m e resistenza elettrica R, possono scorrere senza attrito su due guide verticali, di resistenza elettrica trascurabile, immerse in un campo gravitazionale $\vec{g}$ e in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ come in figura. Le guide, inizialmente ferme a distanza l, sono allo stesso istante, quella superiore lanciata in alto a velocità $\vec{v}_0$ e quella inferiore lasciata libera di cadere.

a) Si determini la legge oraria del moto di entrambe le sbarrette.

In condizioni di regime le sbarrette si muovono alla stessa velocità; ad un certo istante, in cui la velocità comune è $\vec{v}$, la guida inferiore subisce un arresto istantaneo; contemporaneamente entra in azione un generatore di corrente costante. Si trascuri la forza tra le due sbarrette.

b) Si determini il valore della corrente generata affinché la guida superiore si fermi esattamente nella posizione di quella inferiore bloccata.

c) Si determini il lavoro compiuto dal generatore per effettuare il processo di cui in b).

Soluzioni

Esercizio I

1) Il campo elettrico che si calcola applicando il teorema di Gauss a una superficie sferica e il relativo potenziale (dall'integrazione del campo elettrico) sono:

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}(r)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\ln\frac{R}{a}, && V(r)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\ln\frac{R}{a}, && r>R,\\
&\vec{E}(r)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\ln\frac{r}{a}, && V(r)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\ln\frac{r}{a}\right], && a<r<R,\\
&\vec{E}(r)=0, && V(r)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right], && r<a.
\end{aligned}
$$

Il massimo del potenziale è nel centro della sfera. Abbiamo allora

$$
\frac{1}{2}mv_{\min}^2=qV(0)=\frac{qQ}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right],\qquad v_{\min}=\sqrt{\frac{2qQ}{m\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right]}.
$$

2) Per il teorema di unicità, è sufficiente verificare che la soluzione proposta,

$$
\vec{B}_{\rm int}=\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\vec{\omega},\qquad \vec{B}_{\rm ext}=\frac{\mu_0\sigma R^4}{3}\frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{\omega})-\vec{\omega}}{r^3},
$$

soddisfa le condizioni al contorno appropriate che vengono dalla divergenza e dal rotore di B e che sono:

$$
\left(\vec{B}_{\rm ext}-\vec{B}_{\rm int}\right)\cdot\hat{r}=0,\qquad -\left(\vec{B}_{\rm ext}-\vec{B}_{\rm int}\right)\wedge\hat{r}=\vec{K}=\sigma R\vec{\omega}\wedge\hat{r},
$$

per $r=R$, dove $\vec{K}$ è la densità di corrente superficiale dovuta al movimento rotatorio della sfera. La verifica è immediata.

3) Consideriamo la sfera S come un insieme di corone sferiche infinitesime con densità di carica superficiale $\sigma(r)=\rho(r)\mathrm{d}r$ e integriamo la soluzione precedente. Il campo esterno alla sfera è ancora quello di un dipolo:

$$
\vec{B}_{\rm ext}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{M})-\vec{M}}{r^3},\qquad \vec{M}=\frac{4\pi}{3}\vec{\omega}\int_0^R r^4\sigma(r)=\frac{4\pi Q}{3}\vec{\omega}\left(R^2-a^2\right).
$$

All'interno della sfera, precisamente a distanza r dal centro, distinguiamo le corone sferiche infinitesime con $r'>r$ da quelle con $r'<r$. Le prime contribuiscono con un campo uniforme, le seconde con un campo di dipolo. Abbiamo così

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_{\rm int}(r)&=\frac{2}{3}\mu_0\vec{\omega}\int_r^R r'\rho(r')\mathrm{d}r'+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\vec{m}(r)\right)-\vec{m}(r)}{r^3},\\
\vec{m}(r)&=\frac{4\pi}{3}\vec{\omega}\int_0^r r'^4\rho(r')\mathrm{d}r',
\end{aligned}
$$

e dunque

$$\overrightarrow{B}_{\rm int}(r) = \frac{2Q}{3}\mu_0 \overrightarrow{\omega}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \frac{Q\mu_0\left(r^2 - a^2\right)}{3}\frac{3\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\overrightarrow{\omega}\right) - \overrightarrow{\omega}}{r^3}, \qquad a < r < R,$$
$$\overrightarrow{B}_{\rm int} = \frac{2Q}{3}\mu_0 \overrightarrow{\omega}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right), \qquad r < a.$$

Notare che il campo magnetico è continuo ovunque.

4) Segue immediatamente dalla soluzione che tutti i momenti di multipolo magnetico sono nulli.

Esercizio II

a) Con riferimento alla figura, le equazioni del moto sono

$$m\ddot{x}_1 = -mg - \frac{B^2 d^2}{2R}\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right), \qquad m\ddot{x}_2 = -mg + \frac{B^2 d^2}{2R}\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right).$$

Sommando e sottraendo, otteniamo

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -2g, \qquad \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{B^2 d^2}{mR}\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right),$$

da cui segue

$$x_1 = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{v_0\tau}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + \frac{v_0 t}{2}, \qquad x_2 = -\frac{g}{2}t^2 - \frac{v_0\tau}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + \frac{v_0 t}{2} - l,$$

dove $\tau = mR/(B^2 d^2)$. A regime abbiamo

$$x_1 - x_2 = l + v_0\tau, \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = -gt + \frac{v_0}{2}.$$

b) Sia $\overline{t}$ l'istante a cui la velocità comune delle sbarrette è $\overline{v} = -g\overline{t} + v_0/2$. Fissiamo l'origine dei tempi quando $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \overline{v}$ e poniamo $x_2(0) = 0$, $x_1(0) = l + v_0\tau$. L'equazione del moto della sbarretta 1 è

$$m\ddot{x}_1 = -mg + Bdi,$$

e quindi si muove di moto accelerato uniforme con accelerazione

$$a = -g + \frac{Bdi}{m},$$

che deve essere positiva. Abbiamo la soluzione

$$x_1(t) = l + v_0\tau + \overline{v}t + \frac{1}{2}at^2,$$

che si annulla per

$$\overline{t}_{1,2} = \frac{1}{a}\left(-\overline{v} \pm \sqrt{\overline{v}^2 - 2a\left(l + v_0\tau\right)}\right),$$

cioè se $\overline{v}^2 > 2a\,(l+v_0\tau)$ attraversa l'origine due volte. Consideriamo il tempo $\overline{t}_1$. Vogliamo anche $\dot{x}_1(\overline{t}_1)=0$, che implica $\overline{t}_1=-\overline{v}/a$ e dunque $\overline{v}^2=2a\,(l+v_0\tau)$. Questa equazione determina la corrente i :

$$i=\frac{m}{Bd}\left(g+\frac{\overline{v}^2}{2l}\right).$$

c) Durante la decelerazione, c'è una forza elettromotrice indotta $|\mathcal{E}_I|=Bd|\dot{x}_1|$, che deve essere compensata dal generatore. Abbiamo quindi

$$\mathcal{L}_G=-\int_0^{\overline{t}_1}\mathcal{E}_I i\ \mathrm{d}t=idBl.$$