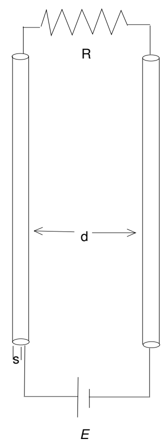

Compitino di Fisica II del 4-4-03

Si consideri il circuito in figura. I due fili hanno resistenza trascurabile, lunghezza L e spessore s, e sono paralleli e posti a distanza d, con $L \gg d \gg s$.

Il generatore fornisce una forza elettromotrice costante nel tempo $\mathcal{E}_0$.

a) Calcolare il campo elettrico e il campo magnetico nella zona in cui i fili si possono considerare infiniti e si possono trascurare gli effetti di bordo.

Il generatore fornisce ora una forza elettromotrice che varia linearmente col tempo, $\mathcal{E} = \alpha t$.

b) Calcolare il campo elettrico e il campo magnetico come nel punto a), come somma di due contributi, uno lineare nel tempo e uno costante nel tempo, mostrando che il campo elettrico ha una componente lungo z e il campo magnetico ha una componente lungo φ che dipende linearmente da z. Si trascurino gli effetti di bordo, assumendo che la densità di carica superficiale sia distribuita uniformemente lungo il filo. Nella soluzione per B si lasci indicata la costante arbitraria di riferimento per la dipendenza da z. Indicheremo questa costante con C'.

c) Scrivere la corrente che passa nei fili in funzione di z e C' e la corrente che passa per la resistenza in funzione di C'.

Si tenga presente che la differenza di potenziale ai capi della resistenza receve un contributo dall'integrale di linea del campo elettrico lungo i fili. Determinare forza elettromotrice ai capi della resistenza e usare questa informazione per fissare la costante C'.

d) Scrivere la capacità e l'induttanza del circuito. Come è fatto il circuito equivalente?

Soluzione

a) Il campo magnetico è quello generato dai due fili percorsi da corrente $i = \mathcal{E}/R$:

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{\mu_0 \mathcal{E}}{2\pi R}\left(\frac{\hat{\varphi}_1}{r_1} - \frac{\hat{\varphi}_2}{r_2}\right),$$

dove $\hat{\varphi}_{1,2} = \hat{z} \wedge \hat{r}_{1,2}$ e $\overrightarrow{r}_{1,2}$ sono i vettori che connettono i fili col punto $\overrightarrow{r}$.

Il campo elettrico è generato da una carica $\lambda = \varepsilon_0 \pi \mathcal{E} / \ln(d/s)$ per unità di superficie che si deposita sulle superfici esterne dei fili, in modo da mantenerli a differenza di potenziale $\mathcal{E}$:

$$\vec{E}(r) = \frac{\mathcal{E}}{2\ln(d/s)} \left(\frac{\hat{r}_1}{r_1} - \frac{\hat{r}_2}{r_2} \right).$$

b) La carica sui fili è ora

$$\lambda(t) = \frac{\varepsilon_0 \pi \alpha t}{\ln(d/s)}$$

e i campi si possono scrivere come somma di due contributi,

$$\vec{B}(r,t) = \vec{B}_0(r,t) + \vec{B}_1(r), \qquad \vec{E}(r,t) = \vec{E}_0(r,t) + \vec{E}_1(r),$$

dove

$$\vec{B}_0(r,t) = \frac{\mu_0 \alpha t}{2\pi R} \left(\frac{\hat{\varphi}_1}{r_1} - \frac{\hat{\varphi}_2}{r_2} \right), \qquad \vec{E}_0(r,t) = \frac{\alpha t}{2\ln(d/s)} \left(\frac{\hat{r}_1}{r_1} - \frac{\hat{r}_2}{r_2} \right)$$

e le correzioni sono dovute ai termini di corrente di spostamento e di Faraday. Abbiamo

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = -\frac{\mu_0 \alpha}{2\pi R} \left(\frac{\hat{\varphi}_1}{r_1} - \frac{\hat{\varphi}_2}{r_2} \right), \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1 = \frac{\alpha}{2c^2 \ln(d/s)} \left(\frac{\hat{r}_1}{r_1} - \frac{\hat{r}_2}{r_2} \right).$$

Per sovrapposizione, è sufficiente risolvere i seguenti problemi:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = -\frac{\mu_0 \alpha}{2\pi R} \frac{\hat{\varphi}}{r}, \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{W} = \frac{\alpha}{2c^2 \ln(d/s)} \frac{\hat{r}}{r},$$

dove i campi vettoriali $\vec{V}$ e $\vec{W}$ sono a divergenza nulla. Nel primo caso $\vec{V}$ ha solo componente z e basta fare la circuitazione lungo un rettangolo che giace su un piano passante per il filo. Nel secondo caso $\vec{W}$ ha solo componente φ, che si può calcolare integrando sulla superficie compresa fra z e $z+h$, sottesa da un certo angolo $\Delta\varphi$. Si trova

$$\vec{V} = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 \alpha}{2\pi R} \ln \frac{r}{s} + C \right), \qquad \vec{W} = -\frac{\alpha (z + C')}{2c^2 \ln(d/s)} \frac{\hat{\varphi}}{r},$$

dove C e C' sono costanti arbtrarie. Abbiamo dunque

$$\vec{E}_1 = \hat{z} \frac{\mu_0 \alpha}{2\pi R} \ln \frac{r_1}{r_2}, \qquad \vec{B}_1 = -\frac{\alpha (z + C')}{2c^2 \ln(d/s)} \left(\frac{\hat{\varphi}_1}{r_1} - \frac{\hat{\varphi}_2}{r_2} \right).$$

La costante C è fissata per simmetria $1 \leftrightarrow 2$.

c) La carica accumulata su una porzione di filo compresa tra 0 e z è

$$q(t) = \lambda(t) z$$

e dunque l'equazione di continuità dà

$$\delta i(z) - \delta i(0) = -\frac{\varepsilon_0 \alpha \pi z}{\ln(d/s)}, \qquad \delta i(0) = -\frac{\varepsilon_0 \alpha \pi C'}{\ln(d/s)},$$

dove δi indica la corrente aggiuntiva rispetto a $\alpha t/R$. Questa corrente spiega la dipendenza da z del campo magnetico trovato nel punto precedente e infatti la relazione tra δi e C' può essere letta dalla discontinuità di $\vec{B}_1$ sulla parete del filo. La corrente totale che passa per i fili è dunque

$$i(z) = \frac{\alpha t}{R} - \frac{\varepsilon_0 \alpha \pi (z + C')}{\ln(d/s)}$$

e per la resistenza passa una corrente

$$i_R = \frac{\alpha t}{R} - \frac{\varepsilon_0 \alpha \pi (L + C')}{\ln(d/s)}.$$

D'altra parte, la forza elettromotrice ai capi della resistenza si ottiene integrando il campo elettrico lungo z, e da ciò si ricava infine la costante C':

$$\begin{aligned} V_R &= \alpha t - \frac{\mu_0 \alpha L}{\pi R} \ln(d/s) = i_R R, \qquad \Rightarrow \\ C' &= \frac{\mu_0 L}{\varepsilon_0 \pi^2 R^2} \ln^2(d/s) - L = . \end{aligned}$$

d) La capacità e l'autoinduttanza del circuito sono uguali a

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi L}{\ln(d/s)}, \qquad \ell = \frac{\mu_0 L}{\pi} \ln(d/s).$$

Il circuito equivalente è fatto di un continuo di capacità infinitesime in parallelo colla resistenza, e induttanze infinitesime in serie colla resistenza. Per calcolare la corrente che passa per la resistenza, basta considerare un circuito colla capacità C e l'induttanza L calcolate sopra in parallelo e serie colla resistenza, rispettivamente.