COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + II B

17 gennaio 2003

Gli studenti che sostengono l'esame di fisica b I devono svolgere solo gli esercizi I-1 e I-2, quelli che sostengono l'esame di fisica b II devono svolgere solo gli esercizi II-1 e II-2. Gli studenti che sostengono l'esame complessivo devono svolgere, a loro scelta, un esercizio tra I-1 e I-2 e uno tra II-1 e II-2.

Esercizio I-1

In un sistema di coordinate cartesiane xyz abbiamo un campo elettrico $\vec{E} \equiv (E, 0, 0)$ ed un campo magnetico $\vec{B} \equiv (0, B, 0)$, entrambi uniformi. All'istante $t = 0$ uno ione positivo di carica q e massa m si trova esattamente all'origine del nostro sistema di riferimento.

a) Dire quanto vale e come è diretta la velocità iniziale $\vec{V}_0$ dello ione che permette a questo di viaggiare con moto rettilineo uniforme.

b) Descrivere il moto dello ione in caso di velocità iniziale $\vec{v}_0$ giacente nel piano xz, ma per il resto arbitraria. Discutere il caso particolare $\vec{v}_0 = 0$. Si consiglia di lavorare in un sistema di riferimento che trasla alla velocità $\vec{V}_0$ calcolata al punto a).

c) Adesso poniamo nell'origine una sorgente di ioni tutti di carica q e massa m. Gli ioni vengono emessi con velocità giacenti sul piano xz, ma per il resto arbitrarie. Trovare il primo punto in cui gli ioni vengono rifocalizzati.

d) La sorgente del punto precedente adesso emette ioni ancora tutti di carica q, ma di due masse diverse m ed m'. Calcolare la distanza tra i punti in cui avvengono le prime rifocalizzazioni delle due masse.

Esercizio I-2

Un dipolo magnetico $\vec{m}$ è posto in un punto P a distanza R dal centro O di una sfera superconduttrice di raggio a. Il dipolo è orientato lungo la congiungente OP. Si determini:

a) il campo magnetico $\vec{B}$ in tutto lo spazio;

b) le correnti indotte sulla superficie della sfera;

c) l'energia magnetostatica del sistema;

d) la forza che agisce sul dipolo.

Esercizio II-1

Sia data una superficie cilindrica di lunghezza l e raggio R, con $l \gg R$, su cui è depositata una carica elettrica con densità superficiale σ uniforme.

Il cilindro ruota attorno al suo asse con velocità angolare uniforme ω.

a) Calcolare il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ all'interno del cilindro.

Supponendo che ω vari linearmente nel tempo con la legge: $\omega(t) = \omega_0 + a \cdot t$,

b) Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ all'interno e all'esterno del cilindro a una distanza r dall'asse con $r \ll l$, e il momento delle forze elettriche esercitato sulla superficie cilindrica.

c) Per mezzo del vettore di Poynting si calcoli il flusso di energia sulla superficie cilindrica specificandone il verso. Si mostri inoltre che tale potenza è quella dovuta al momento delle forze elettriche calcolato in *b*).

d) Se il momento di inerzia del cilindro è I, si determini il momento delle forze esterne necessario alla sua accelerazione.

e) *(Facoltativo)* Agli effetti del bilancio energetico bisogna tener conto anche di effetti di irraggiamento dipolare? Spiegare.

Esercizio II-2

Si consideri un sistema formato da due spire superconduttrici complanari con coefficienti di autoinduzione L_1 e L_2, collegate tramite una molla isolante di costante elastica k e lunghezza a riposo l. Entrambe le spire hanno un raggio a molto minore rispetto a l. La prima spira è vincolata e non può muoversi, mentre l'altra si muove solo lungo la direzione della molla. Inizialmente nelle due spire scorrono rispettivamente le correnti I_1 e I_2, entrambe in verso antiorario.

a) Si scriva l'energia del sistema indicando quali variabili dipendono dalla posizione.

b) Considerando che la corrente della prima spira viene mantenuta costante da un generatore, si verifichi che esiste un punto di equilibrio per il sistema.

c) Assumendo che l'effetto delle forze elettromagnetiche sia molto minore rispetto a quello della forza elastica, si trovi la posizione di equilibrio. (Si consiglia di sviluppare il potenziale attorno ad l: $x_{eq} = l + \delta x$, con $\delta x << l$).

d) Descrivere qualitativamente cosa accade se i due versi delle correnti sono opposti invece che concordi. Potrebbe non esistere un punto di equilibrio?

SOLUZIONI DEL COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + II B

17 gennaio 2003

Esercizio I-1

a) La forza complessiva sullo ione vale $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. Perché si abbia moto rettilineo uniforme dobbiamo quindi avere $\vec{V}_0 \wedge \vec{B} = -\vec{E}$. Questo si ottiene per $\vec{V}_0$ diretto lungo il verso positivo dell'asse z con modulo $V_0 = E/B$.

b) Nel sistema di riferimento che trasla con velocità $\vec{V}_0$ rispetto al sistema del laboratorio lo ione si muove con una velocità $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0$, dove $\vec{v}$ è la velocità rispetto al laboratorio. La forza agente sullo ione si può quindi scrivere $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V}_0 \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B}\right) = q\vec{v}' \wedge \vec{B}$. In questo sistema il moto quindi avviene come se il campo elettrico non ci fosse, e lo ione descrive una circonferenza di raggio $r = mv'/qB$, con velocità angolare $\omega = qB/m$. Se poniamo $V_0 = R\omega$, con $R = mE/qB^2$, la traiettoria dello ione nel sistema del laboratorio può essere vista come la traccia lasciata da un punto fisso ad una distanza r dal centro di un disco di raggio R (o fisso su un prolungamento del raggio, se $r > R$), mentre il disco rotola senza strisciare con velocità $\vec{V}_0$. Il caso $\vec{v}_0 = 0$ corrisponde a $\vec{v}'_0 = -\vec{V}_0$, con $r = R$, e la traiettoria è una cicloide.

c) Nel sistema in moto con velocità $\vec{V}_0$ ogni ione descrive una circonferenza con periodo $T = 2\pi/\omega$, indipendentemente dalla velocità iniziale. Quindi, in questo sistema ogni ione si ritrova al punto di partenza dopo un numero intero di periodi. Gli ioni sono rifocalizzati per la prima volta dopo un periodo, quando il sistema, rispetto al laboratorio, ha percorso una distanza $s = TV_0 = 2\pi mE/qB^2$.

d) $\Delta s = s - s' = 2\pi E\left(m - m'\right)/qB^2$

Esercizio I-2

a) Il problema si risolve con un dipolo immagine $\vec{m}'$ posto in un punto P' a distanza $d = a^2/R$ dal centro O della sfera, sul segmento OP. Si può supporre tentativamente che $\vec{m}'$ ed $\vec{m}$ siano paralleli. Il campo magnetico totale in un generico punto $\vec{r}$ è

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3(\vec{r} - \vec{R})\frac{(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{m}}{|\vec{r} - \vec{R}|^5} + 3(\vec{r} - \vec{d})\frac{(\vec{r} - \vec{d}) \cdot \vec{m}'}{|\vec{r} - \vec{d}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} - \frac{\vec{m}'}{|\vec{r} - \vec{d}|^3}\right].$$

La condizione al contorno da imporre è che la componente perpendicolare alla superficie della sfera sia nulla, poiché il campo magnetico è identicamente nullo all'interno della sfera. Per realizzare questa condizione si trova

$$\vec{m}' = -\vec{m}\frac{a^3}{R^3}.$$

Infatti, abbiamo sulla sfera

$$|\vec{r} - \vec{d}| = \frac{a}{R}|\vec{r} - \vec{R}|,$$

per cui

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\vec{B} \cdot \vec{r} = 3a(\vec{a} - \vec{R}\cos\theta)\frac{m(a\cos\theta - R)}{|\vec{r} - \vec{R}|^5} + 3\frac{a^2}{R}(R - a\cos\theta)\frac{R^5 m' a(\cos\theta - \frac{a}{R})}{a^5|\vec{r} - \vec{R}|^5}$$
$$- \frac{ma\cos\theta}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} - \frac{R^3 m' a\cos\theta}{a^3|\vec{r} - \vec{R}|^3} = 0.$$

b) Le correnti superficiali sono

$$\vec{K} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \wedge \hat{r} = \frac{3m\sin\theta}{4\pi}\frac{R^2 - a^2}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{5/2}}\hat{\phi}.$$

c) L'energia magnetostatica del sistema risulta

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m^2 a^3}{(R^2 - a^2)^3}.$$

d) La forza a cui è soggetto il dipolo è

$$F = -\frac{dU}{dR} = \frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m^2 R a^3}{(R^2 - a^2)^4}.$$

Esercizio II-1

a) Supponiamo di dividere il cilindro nell'altezza unitaria in striscie di larghezza δ quindi esso è assimilabile a un solenoide con densità di spire n con $n = 1/\delta$. La corrente I che circola in ciascuna spira è: $I = \sigma \cdot \delta \cdot \omega \cdot R$ e quindi il campo $\vec{B}$ solenoidale all'interno vale: $\vec{B} = \mu_0 n I = \mu_0 \sigma \omega R$.

b) Data la simmetria cilindrica ci aspettiamo che le linee di forza del campo elettrico $\vec{E}$ indotto dalla variazione di $\vec{B}$ siano circonferenze con il centro sull'asse del solenoide. Facciamo la circuitazione di $\vec{E}$ sulla circonferenza di raggio r:

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

da cui

$$E = -\frac{rR}{2}\mu_0\sigma a \quad \text{se } r < R \qquad\qquad E = -\frac{R^3}{2r}\mu_0\sigma a \quad \text{se } r > R$$

Il momento delle forze elettriche per unità di lunghezza Γ è diretto in verso contrario a ω e vale

$$\Gamma = \int R \cdot dF = \int R \cdot E(R) \cdot \sigma R \cdot d\vartheta = \pi R^4 \mu_0 \sigma^2 a$$

c) il campo $\vec{E}$ gira in senso contrario a ω, definiamo con $\vec{S}$ il vettore di Poynting: $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$. Il vettore $\vec{S}$ è diretto verso l'interno del cilindro. Il suo flusso integrato su una superficie di altezza unitaria vale

$$\Phi(S) = 2\pi R \cdot (EH) = \pi R^4 \mu_0 \sigma^2 a(\omega_0 + at)$$

La potenza dovuta alla forza elettrica vale

$$P = \Gamma \cdot \omega = \pi R^4 \mu_0 \sigma^2 a \omega$$

d) L'equazione cardinale per il momento delle forze vale:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{\text{tot}}$$

con $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_{\text{est}} - \Gamma$, quindi

$$Ia = \Gamma_{\rm est} - \pi R^4 \mu_0 \sigma^2 a$$

da cui $\Gamma_{\rm est}$.

e) E' facile dimostrare che il sistema non ha momento di dipolo elettrico. Ha tuttavia un momento di dipolo magnetico $\mu = I_{\rm tot}\pi R^2$ in cui $I_{\rm tot}$ è la corrente totale dovuta alla rotazione di tutta la carica e che quindi dipende linearmente dal tempo. Tuttavia la potenza irraggiata dipende dalla derivata seconda nel tempo del momento di dipolo e quindi anche questo contributo e' nullo.

Esercizio II-2

a) L'energia potenziale delle due spire si può scrivere come:

$$U = \frac{1}{2}k\left(x-l\right)^2 + \frac{1}{2}L_1 I_1^2(x) + \frac{1}{2}L_2 I_2^2(x) - \frac{1}{2}\vec{m}_1(x)\cdot\vec{B}_2(x) - \frac{1}{2}m_2(x)\cdot\vec{B}_1(x)$$

Dove $\vec{m}_i$ sono i dipoli dovuti alle correnti che scorrono nelle spire e $\vec{B}_i$ i campi magnetici generati da questi, considerando le spire nel piano xy:

$$\vec{m} = \pi a^2 I \hat{z}$$
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(\vec{m}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}}{r^3} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

Per spire superconduttrici ed in assenza di generatori, le uniche variabili dipendenti dalla posizione sono quelle indicate nella formula.

b) La dipendenza da x delle correnti è determinata dal fatto che il flusso del campo magnetico attraverso una spira superconduttrice rimane costante. Si noti che, una volta inserito il generatore nella prima spira, la corrente I_1 rimane costante in quanto imposta dal generatore, mentre il flusso attraverso di essa, Φ_1, può variare in quanto il circuito della prima spira stessa non è più interamente superconduttore. Indicando con Φ_2 il flusso, costante, attraveso la seconda spira:

$$\Phi_2 = L_2 I_2(x) - \pi a^2 \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \frac{1}{x^3}$$

da cui segue che:

$$I_2(x) = \frac{1}{L_2}\left(\Phi_2 + \pi a^2 \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \frac{1}{x^3}\right) = A + \frac{B}{x^3},$$

con A e B costanti positive. La potenza erogata dal generatore é $W = VI$, dove I é la corrente che scorre nella spira e V è la differenza di potenziale che deve bilanciare la $f.e.m$ dovuta alla variazione di flusso del campo magnetico attraverso la spira. Risulta quindi

$$V = \frac{d\left(L_1 I_1 - \pi a^2 B_2(x)\right)}{dt},$$

e quindi dato che la differenza di energia è:

$$\Delta E = \int W dt$$

e dato che I_1 è mantenuta costante si ha il lavoro fatto dal generatore:

$$L_{\rm gen} = L_1 I_1^2 - \vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2.$$

Per calcolare la forza agente sulle spire (e quindi la posizione di equilibrio) basta considerare il lavoro fatto dalla forza elastica, dalle forze elettromagnetiche e dal generatore:

$$L = -\delta U_{\text{e.m.}} - \delta U_{\text{elastica}} + L_{\text{gen}}.$$

Si vede che il termine del generatore va a cancellare completamente il termine dovuto alla mutua induzione, e quindi il potenziale completo risulta:

$$U = \frac{1}{2}k\left(x-l\right)^2 - \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2(x),$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(x-l\right)^2 - C + \frac{1}{2}L_2\left(A^2 + \frac{B^2}{x^6} + 2\frac{AB}{x^3}\right)$$

Poiché il potenziale risulta la somma (a parte la costante C) di una parabola e di una funzione monotona decrescente, esiste un punto di minimo.

c) La posizione di equilibrio, data la forma del potenziale, si trova cercando gli zeri della sua derivata prima (ossia dove si annulla la forza):

$$k\left(x-l\right) + \frac{1}{2}L_2\left(-6\frac{B^2}{x^7} - 6\frac{AB}{x^4}\right) = 0$$

Sostituendo nell'equazione $x_{\text{eq}} = l + \delta x$, con $\delta x \ll l$ e sviluppando al primo ordine si trova che:

$$k\delta x - 3L_2\frac{B^2}{l^7}\left(1 - 7\frac{\delta x}{l}\right) - 3L_2\frac{AB}{l^4}\left(1 - 4\frac{\delta x}{l}\right) = 0,$$

$$\delta x\left(k + 21L_2\frac{B^2}{l^8} + 12L_2\frac{AB}{l^5}\right) = 3L_2\frac{B^2}{l^7} + 3L_2\frac{AB}{l^4},$$

$$\delta x = \frac{1}{\left(k + 21L_2\frac{B^2}{l^8} + 12L_2\frac{AB}{l^5}\right)}\left(3L_2\frac{B^2}{l^7} + 3L_2\frac{AB}{l^4}\right)$$

d) (*Facoltativa)* Se i versi delle correnti sono discordi, il termine di mutua interazione dipolo-campo cambia segno. La formula per calcolare la corrente

$$I_2$$

in funzione diventa:

$$I_2(x) = A - \frac{B}{x^3},$$

con A e B costanti positive. Il potenziale non è più somma di sole funzioni positive e l'esistenza di un punto di equilibrio dipende dai valori delle costanti in gioco.