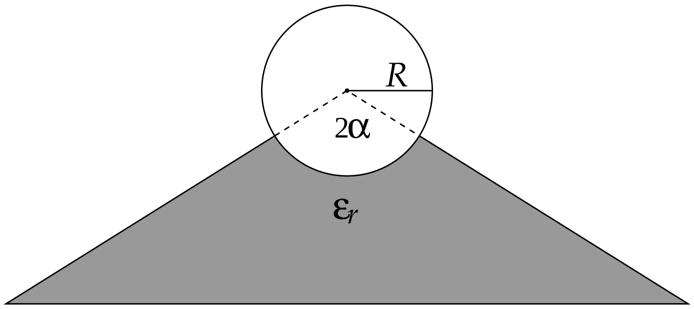
COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + II B

7 febbraio 2003

- *Gli studenti che sostengono l'esame di fisica b I con il programma dell'a.a.* **2002-2003** *devono svolgere solo gli esercizi I-1 e I-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame di fisica b I con il programma dell'a.a.* **2001-2002** *devono svolgere solo gli esercizi I-1 e I-3;*
- *gli studenti che sostengono l'esame di fisica b II devono svolgere solo gli esercizi II-1 e II-2;*
- *gli studenti che sostengono l'esame complessivo devono svolgere, a loro scelta, un esercizio tra I-1 e I-2 e uno tra II-1 e II-2.*

Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla **leggibilità** *dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI.*

Esercizio I-1



Una sfera conduttrice di raggio R poggia aderendo perfettamenta su di una depressione a forma di calotta sferica (sempre di raggio R!) alla sommità di un tronco di cono (vedi figura). Il tronco di cono ha apertura 2α ed è fatto di un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r. Se il tronco di cono fosse prolungato, il suo vertice coinciderebbe col centro della sfera. Si faccia l'ipotesi che il tronco di cono si estenda all'infinito verso il basso della figura. Sulla sfera viene posta una carica elettrica Q.

a) Calcolare la distribuzione di carica sulla superficie della sfera.
b) Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio al di fuori della sfera.
c) Calcolare con che forza la sfera viene attratta verso il cono.

Esercizio I-2

Una sfera di raggio a, cava e ricoperta di una densità di carica superficiale uniforme σ, è circondata da un guscio sferico di materiale dielettrico, di raggio esterno b, con costante dielettrica ε_r.

a) Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio e le densità di carica di polarizzazione (di superficie e di volume).

Il sistema viene fatto ruotare con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad un suo asse.

b) Calcolare la corrente di magnetizzazione all'interno del dielettrico e le correnti superficiali di magnetizzazione per $r = a$ e $r = b$.
c) Calcolare il campo magnetico $\vec{B}$ in tutto lo spazio.
d) Usare la soluzione trovata per risolvere il problema analogo della sfera dielettrica di raggio b rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad un suo asse, con una carica q posta al centro della sfera.

Esercizio I-3

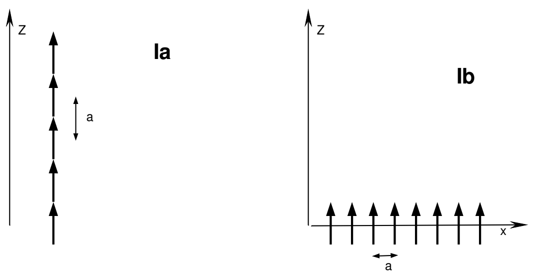
Per determinare la velocità di propagazione del suono in un gas si può far uso della generazione di onde risonanti in un cilindro chiuso ad un estremo da un pistone mobile, all'altra estremità del quale è applicata una membrana che può essere eccitata in modo da generare onde longitudinali monocromatiche. La membrana è eccitata ad una frequenza di 2 kHz. Si regola dapprima il pistone in modo da generare onde stazionarie. Lo si sposta poi di un certo tratto l, fino a che non si ha nuovamente la generazione di onde stazionarie (per nessuna delle posizioni intermedie si osservano onde stazionarie). Si trova che, nel caso in cui il gas sia aria ad una temperatura di 290 K, $l = 8.5$ cm. Si determini la velocità del suono. Se ora si sostituisce l'aria con un ugual volume di He alla medesima temperatura, si calcoli quale sarà il corrispondente valore di l.

Dati: Costante di Boltzmann: $k = 1.38\ 10^{-23}$ J/K $\quad \gamma_{aria} = 1.4 \quad \gamma_{He} = 1.67 \quad (m)_{aria} = 29$ $(m)_{He} = 4$

Esercizio II-1

Si considerino le seguenti distribuzioni di dipoli oscillanti in fase $\left(\vec{p} = \vec{p}_0\, e^{i(\omega t - kr)}\, \hat{z}\right)$:

1) $2N$ dipoli disposti su una stringa di lunghezza l posizionata anch'essa lungo l'asse z, con passo interdipolare $a = l/N$, con $a \ll l$ (Figura Ia).
2) $2N$ dipoli disposti su una stringa di lunghezza l posizionata lungo l'asse x, con passo interdipolare $a = l/N$, con $a \ll l$ (Figura Ib).



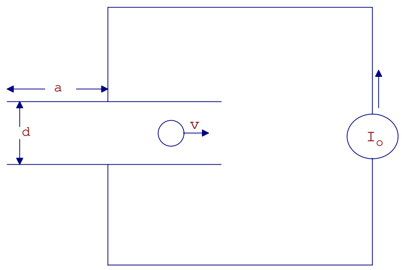
a) Si discuta la simmetria presente nella prima configurazione e non nella seconda. Basandosi solo su queste simmetrie si discuta qualitativamente la dipendenza angolare della potenza irraggiata.
b) Si calcolino i campi elettromagnetici $\vec{E}$ e $\vec{B}$, in un punto dello spazio a distanza $R \gg l$.
c) Si calcoli la distribuzione angolare della potenza irraggiata dai dipoli nelle due configurazioni.

Suggerimento: Si scrivano i campi per il dipolo centrale e poi si sommino i contributi degli altri dipoli approssimando la distanza R_n dell'ennesimo dipolo dal punto nello spazio al primo ordine di a/R.
Si ricorda che $\sum_{n=0}^{N} e^{inx} = \frac{sin[(N+1)x/2]}{sin[x/2]}$

Esercizio II-2

Un condensatore è costituito da due armature piane circolari di raggio a poste a distanza $d \ll a$. Il condensatore viene caricato attraverso un generatore di corrente costante I_0, disposto come in figura. Si trascurino gli effetti di bordo.

a) Si determinino, durante la carica, il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ all'interno del condensatore.



Una spiretta conduttrice di raggio b (con $b \ll a$), di resistenza elettrica R e coefficiente di autoinduzione L, viene spostata in direzione radiale, durante la carica del condensatore, dal centro fino a una distanza $a/2$. Tale spostamento è effettuato a velocità costante v_0 da forze esterne, in modo che il piano della spiretta sia perpendicolare a quelli delle armature del condensatore.

b) Si determinino la corrente che circola nella spiretta durante la traslazione e il lavoro effettuato dalle forze esterne.

Supponendo ora che nella spiretta circoli una corrente costante I_0, la si lasci libera di muoversi a partire dalla posizione $a/2$ sempre durante la carica del condensatore.

c) Si indichi il verso della corrente nella spiretta in modo che la forza che si determina su di essa sia di richiamo (cioè verso l'asse del condensatore) e si determini, conseguentemente, il moto della spiretta (di massa m) susseguente al suo rilascio.

SOLUZIONI DEL COMPITO SCRITTO DI FISICA b I + II B
7 febbraio 2003

Esercizio I-1

a) Il campo elettrico è sempre perpendicolare alla superficie della sfera conduttrice, quindi deve restare costante al passaggio dal vuoto al dielettrico. Questo implica che la densità superficiale di carica ha un valore costante σ_1 sulla superficie sferica affacciata sul vuoto, ed un valore costante σ_2 sulla superficie affacciata sul dielettrico, con $\sigma_2 = \varepsilon_r \sigma_1$. La superficie affacciata sul dielettrico vale

$$S_2 = \int_0^\alpha 2\pi R \sin\beta R d\beta = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha),$$

mentre la superficie affacciata sul vuoto vale $S_1 = 4\pi R^2 - S_2 = 2\pi R^2 (1 + \cos\alpha)$. Dalla relazione $S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 = Q$ otteniamo

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi R^2 [\varepsilon_r (1 - \cos\alpha) + 1 + \cos\alpha]} \qquad \sigma_2 = \varepsilon_r \sigma_1.$$

b) Il campo elettrico, nullo all'interno della sfera, al di fuori di essa vale

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2 [\varepsilon_r (1 - \cos\alpha) + 1 + \cos\alpha]}$$

dove $r \geq R$ è la distanza dal centro della sfera, in tutto lo spazio. D vale $\varepsilon_0 E$ nel vuoto, $\varepsilon_0\varepsilon_r E$ nel dielettrico. Sia $\vec{E}$ che $\vec{D}$ sono radiali.

c) La pressione elettrostatica alla superficie di un conduttore vale $f_s = \sigma^2/(2\varepsilon_0\varepsilon_r)$, quindi la forza che attira la sfera verso il dielettrico vale

$$F_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_0^\alpha \sigma_2^2 \cos\beta 2\pi R \sin\beta R d\beta = \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} \pi R^2 \sigma_2^2 \sin^2\alpha$$

che viene in parte cancellata dalla forza diretta verso l'alto

$$F_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\alpha \sigma_1^2 \cos\beta 2\pi R \sin\beta R d\beta = \frac{1}{2\varepsilon_0} \pi R^2 \sigma_1^2 \sin^2\alpha.$$

La forza complessiva verso il dielettrico è quindi

$$F = F_2 - F_1 = \frac{(\varepsilon_r - 1)\sin^2\alpha Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2 [\varepsilon_r (1 - \cos\alpha) + 1 + \cos\alpha]^2}$$

Esercizio I-2

a) Per $r < a$ tutte le quantità richieste sono nulle. Per $r > b$ è come avere una carica $q = 4\pi a^2 \sigma$ posta al centro. Per $a < r < b$

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^3}\vec{r}, \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3}\vec{r} = \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r r^3}\vec{r}, \qquad \vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{q}{4\pi r^3}\vec{r}.$$

La densità di carica di polarizzazione è nulla per $a < r < b$, poiché $\rho_{\rm pol} = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$. Le densità di carica superficiale di polarizzazione $\sigma_{\rm pol} = -\vec{P} \cdot \hat{n}$ sono

$$\begin{aligned}
\sigma_a &= -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{q}{4\pi a^2} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma, && \text{per } r = a, \\
\sigma_{\rm tot} &= \sigma_a + \sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon_r} && \text{densità totale per } r = a, \\
\sigma_b &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{q}{4\pi b^2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{a^2}{b^2}\sigma, && \text{per } r = b.
\end{aligned}$$

b) $\vec{J}_{\rm M} = \rho_{\rm pol}\vec{\omega}\wedge\vec{r} = 0$, mentre le correnti superficiali di magnetizzazione sono $\vec{K}_{\rm M} = \sigma\vec{\omega}\wedge\vec{r}$, con di $\sigma = \sigma_{\rm tot}$ per $r = a$ e $\sigma = \sigma_b$ per $r = b$.

c) Per calcolare $\vec{B}$ possiamo usare il principio di sovrapposizione. Si tratta di due superfici sferiche rotanti con densità di carica superficiali uniformi uguali a $\sigma_{\rm tot}$ e σ_b, rispettivamente. Per una superficie sferica rotante di raggio R con densità di carica superficiale $\overline{\sigma}$ abbiamo all'interno un campo uniforme pari a

$$\vec{B}_{\rm int} = \frac{2}{3}\mu_0\overline{\sigma}R\vec{\omega}$$

e all'esterno il campo di un dipolo

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{3}R^4\overline{\sigma}\vec{\omega}$$

posto al centro della sfera. La sovrapposizione dà il risultato seguente. Per $r < a$ abbiamo un campo magnetico uniforme uguale a

$$\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{\omega}\left(\sigma_{\rm tot}a + \sigma_b b\right) = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\left(\frac{a}{\varepsilon_r} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{a^2}{b^2}\right)\vec{\omega}.$$

Per $r > b$ il campo magnetico di un dipolo

$$\vec{m}_{\rm ext} = \frac{4\pi}{3}\vec{\omega}\left(\sigma_{\rm tot}a^4 + \sigma_b b^4\right)$$

posto al centro. Per $a < r < b$ abbiamo la sovrapposizione del campo uniforme

$$\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma_b b\vec{\omega}$$

e del campo generato dal dipolo

$$\vec{m}_{\rm int} = \frac{4\pi}{3}a^4\sigma_{\rm tot}\vec{\omega}$$

posto al centro della sfera.

d) Basta fare il limite $a \to 0$ con $q = 4\pi a^2\sigma$ fisso (quindi σ_b rimane costante, mentre $\vec{m}_{\rm int} \to 0$). Otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{2}{3}\mu_0\sigma_b\vec{\omega} = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\frac{\mu_0 q}{6\pi b^2}\vec{\omega}, \qquad \text{per } r < b,\\
\vec{B} &= \text{campo del dipolo } \vec{m}_{\rm ext} = \frac{4\pi}{3}b^4\sigma_b\vec{\omega} = \frac{qb^2}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\vec{\omega} \qquad \text{per } r > b.
\end{aligned}$$

Esercizio I-3

La condizione perchè si abbia risonanza tra l'onda emessa dal diaframma e la frequenza propria dell'onda nella cavità di lunghezza L_1 è:

$$L_1 = n\lambda/2$$

dove n è un intero e λ la lunghezza d'onda. Variando la lunghezza L_1, si avrà nuovamente una risonanza per:

$$L_2 = (n+1)\lambda/2$$

La differenza $L_2 - L_1$ deve uguagliare l. Si ha quindi:

$$l = L_2 - L_1 = \frac{\lambda}{2}$$

da cui:

$$\lambda = 2 \cdot l$$

Segue:

$$v = \lambda\nu = 2l\nu \;=\; 0.085 \cdot 2000 \;=\; 340\; ms^{-1}$$

La risposta alla seconda domanda è facilmente ottenibile ricordando l'espressione della velocità di propagazione delle onde in un gas:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k T_0}{m}}$$

dove $\gamma = C_P/C_V$ e dove m è la massa atomica espressa in Kg.

Il rapporto tra la velocità in aria e quella nel He è quindi:

$$R = \sqrt{\frac{\gamma_{aria} m_{He}}{\gamma_{He} m_{aria}}}$$

Sostituendo i valori numerici si trova: $R = 0.340$.

D'altronde è anche:

$$R = \frac{v_{aria}}{v_{He}} = \frac{\lambda_{aria}}{\lambda_{He}} = \frac{l_{aria}}{l_{He}}$$

Ne segue:

$$l_{He} = \frac{l_{aria}}{R} = \frac{l_{aria}}{0.340} = 0.25\; m$$

Esercizio II-1

a) La potenza irraggiata in cordinate sferiche può dipendere da due angoli: θ e l'angolo polare ϕ. Nella prima configurazione c'è simmetria sotto rotazioni attorno all'asse z e quindi non è possibile avere dipendenza da ϕ nella formula della potenza. Nella seconda configurazione non c'è questa simmetria ed in generale la potenza sarà una funzione $W = W_{(\theta,\phi)}$.

b) I campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si ottengono per sovrapposizione sommando i campi dei singoli dipoli. Consideriamo per il momento il dipolo centrale e indichiamo con R la distanza tra questo dipolo ed il punto nello spazio dove vogliamo calcolare i campi:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\omega^2}{Rc^3}\vec{n} \wedge \left(\vec{n} \wedge \vec{p}_{(t-R/c)}\right)$$

La direzione campo magnetico é invece data da $\vec{n} \wedge \vec{p}$. Data l'approssimazione suggerita nel testo, $R >> l$, i termini dovuti alla presenza degli altri dipoli differiscono da questo solo per la parte che determina il ritardo. Quindi per l'ennesimo dipolo:

$$p_{n(t-R_n/c)} = p_0 e^{-i\omega k R_n}$$

Data l'approssimazione usata, l'angolo θ_n tra la direzione del dipolo e il vettore $\vec{R}_n$ è uguale per tutti e vale θ. Dato il principio di sovrapposizione si conoscono i campi magnetici una volta che sappiamo risolvere la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{N} e^{-i\omega(t-kR_n)}$$

Per poterla calcolare bisogna esplicitare R_n.

$$R_n^2 = R^2 + r_n^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}_n$$

dove

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= (sin\theta cos\phi, sin\theta sin\phi, cos\theta) \\
\vec{r}_n &= (0, 0, na)\,, Ia \\
\vec{r}_n &= (na, 0, 0)\,, Ib
\end{aligned}$$

Dove con Ia e Ib abbiamo chiamato le due configurazioni. A questo punto possiamo nuovamente utilizzare l'approssimazione $R >> l$ e otteniamo per R_n la seguente formula (abbiamo trascurato i termini quadratici in na e sviluppato al primo ordine):

$$\begin{aligned} R_n &= R(1 - n\frac{a}{R}cos\theta), Ia \\ R_n &= R(1 - n\frac{a}{R}sin\theta cos\phi), Ib \end{aligned}$$

A questo punto risulta anche chiaro come la differente simmetria porti a differenti distribuzioni angolari. A parte delle fasi ininfluenti la serie risulta quindi:

$$\sum_{n=0}^{N} e^{-in\gamma} = \frac{sin[(N+1)\gamma/2]}{sin[\gamma/2]}$$

con $\gamma = \frac{a}{c}cos\theta$ per Ia e $\gamma = \frac{a}{c}\sin\theta cos\phi$. Finalmente possiamo scrivere i campi e la potenza irraggiata, ricordandosi che il valore ottenuto dalla seria va moltiplicato per due dato i dipoli erano 2N:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= K\frac{\omega^2}{R}p_0 sin\theta\frac{sin[(N+1)\gamma/2]}{sin[\gamma/2]}\hat{\phi} \\ \vec{E} &= K\vec{n} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Dove K è solo un fattore di proporzionalità.

c) Per calcolare la distribuzione angolare della potenza irraggiata basta calcolare il modulo del vettore di Poynting:

$$W_{(\theta,\phi)} = Ksin^2\theta \left(\frac{sin[(N+1)\gamma/2]}{sin[\gamma/2]}\right)^2$$

Esercizio II-2

a) La carica sul condensatore vale: $Q(t) = I \cdot t$ da cui $V(t) = (I/C) \cdot t$ e

$$E(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q(t)}{\pi a^2} = \frac{It}{\epsilon_0 \pi a^2}$$

Per la simmetria cilindrica il campo $\overrightarrow{B}$ ha solo componente tangenziale; con il teorema della circuitazione si trova:

$$2\pi r B = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} = kr$$

b) Durante lo spostamento della spiretta:

$$\Phi(t) = \pi b^2 k v_0 t \quad \Longrightarrow \quad \epsilon = -\pi b^2 k v_0 \text{ (costante)}$$

L'equazione della spiretta è:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \epsilon \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{\epsilon}{R}[1 - e^{-t/\tau}] \text{ con } \tau = L/R.$$

b') Il lavoro si calcola con un bilancio energetico tra la posizione iniziale e quella finale della sbarretta quando la corrente vale:

$$i_1 = i(T) = i(\frac{av_0}{2})$$

Il moto avviene in un campo magnetico esterno costante e in queste condizioni la variazione di energia di mutua induzione e' compensata dal lavoro del generatore di corrente I_0 e quindi nel bilancio trascuriamo entrambi. Resta:

$$
\begin{aligned}
L_F &= L_J + \frac{1}{2}Li^2 = \int_0^T R(\frac{\epsilon}{R})^2[1 - e^{-t/\tau}]^2 dt + \frac{1}{2}Li^2 \\
&= \frac{\epsilon^2}{R}[t + \frac{2L}{R}e^{-t/\tau} - \frac{L}{2R}e^{-t/\tau}]_0^T + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{\epsilon^2}{R}[T - \tau(1 - e^{-t/\tau})]
\end{aligned}
$$

c) Il campo magnetico all'interno del condensatore cresce linearmente con il raggio quindi agli effetti della forza sulla spiretta prevale l'interazione sulla semicirconferenza esterna. Perché la forza sia attrattiva, se la spiretta si trava nella metà a destra del condensatore la corrente che la percorre deve essere concorde con quella del circuito. Posto $\mu = \pi b^2 I_0,$ vale

$$F = -\mu\frac{\partial B}{dr} = -k\mu$$

L'equazione di moto è quindi:

$$m\,\ddot{r} = -kr$$

Il moto è uniformemente accelerato. Detto x l'asse su cui avviene il movimento vale

$$x(t) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{k\mu}{m}t^2 \text{ per } x > 0 \text{ cioè } t \leq t_1 = \sqrt{\frac{ma}{k\mu}}$$

Quando la spira attraversa il centro cambiano sia il verso del campo che il verso della corrente nella semicirconferenza esterna della spiretta e la forza conserva la sua direzione e verso verso l'esterno